

# 有稜邊的毛細曲面

*Kirk E. Lancaster*

本文原稿為英文，由本刊編輯室翻譯為中文。

衆所周知：有些液體，譬如油和水，不相混合；而另一些液體，譬如酒精和水，可相混合。我們稱可相混合的液體是互溶的 (miscible)，不相混合的液體是不互溶的 (immiscible)。有個常用於預測溶解度的通俗格言：「同類互溶 (like dissolves like)」，雖是簡化的說法，但應是極有價值的經驗法則。譬如，油是由非極性分子組成的流體，水是由極性分子組成的流體，因此油和水不互溶。

毛細曲面是介於兩種、三種或多種互不相溶流體之間的界面 (其中的一種流體可能是氣體，譬如空氣)。舉例來說，在平衡狀態下漂浮於水上的油滴，其表面是水、油和空氣之間的界面，是即毛細曲面。我們將考慮剛硬容器中不互溶的兩個流體的界面；我們不妨想像兩者分別是水 (或水與親水性液體的混合物) 及氣體。

介於不互溶的兩種流體之間的界面，與容器的剛硬管壁接觸時，流體之一 (以及界面) 可能會因流體和管壁之間的相互作用而上升或下降。早期對毛細曲面的研究，多在探討凸的楔形鉛直玻璃容器裡，水和空氣之間的界面。Francis Hauksbee 和 Brook Taylor 曾拿兩片鉛直玻璃形成的尖銳 (例如 2.5 度) 楔形容器來做實驗，觀察其內之毛細曲面的行為，並分別於 1711 年及 1712 年，在英國皇家學會會刊上發表觀察報告。(Brook Taylor 曾發現泰勒定裡、泰勒公式和泰勒級數；J. L. Lagrange 曾於 1772 年稱泰勒公式為「微積分的主要基礎」。Francis Hauksbee 曾擔任牛頓的實驗室助理；英國皇家學會於 2010 年頒發 Hauksbee 獎，表彰和獎勵無名英雄對英國科學、技術、工程和數學做出的卓越貢獻，並紀念該學會成立 350 週年。)

毛細曲面與剛硬管壁相交的曲線，名為接觸線或接觸曲線。1805 年及 1806 年，Thomas Young 和 Pierre Simon Laplace 分別對下述觀察提出論證：當管壁和流體都為均勻，且整體配置處於平衡狀態時，流體界面以恆定角度 — 稱為接觸角 — 碰觸管壁。1830 年，Johann Carl Friedrich Gauss 援用虛功原理 (the principle of virtual work) 證明：在上述條件下，接觸角恆常不變；而當容器的管壁不均勻時，接觸角可隨位置而變化。

假設流體所在的容器之支撐面 (support surface, 亦即邊界) 為  $W$ ， $W$  可能是試管、柱面 (其橫截面不必是圓形)、水平面或其他曲面。想像整個配置位於重力場，重力可朝下、朝上或指向其他方向，甚或重力場不存在。懸掛於天花板的水滴是懸滴 (pendent drop)；你或可將

自己倒懸，感受朝上的重力場，眼見該物體往上跑。地板上的水滴是座滴 (sessile drop)，承受朝下的重力。而在運行的太空船裡，牆上的水滴未承受重力。另外，鉛直試管或鉛直柱體中的流體，承受朝下的重力場。而汽車擋風玻璃上的水滴，位於近似水平的曲面上，其重力場的指向略為傾斜。在下圖，可以假設重力場 (如果存在的話) 朝下。



圖 1: 流體界面  $S$ , 支撐面  $W$

圖 1 中，流體界面  $S$  沿接觸曲線與支撐面  $W$  接觸。在左側接觸點，圖示了  $W$  及  $S$  朝下取向的單位法向量 (分別標為黑色及紅色)，而該配置被賦予的邊界條件是：這兩個向量的夾角是給定的接觸角  $\gamma$ 。如果流體 (例如水和空氣) 和容器都為均勻，則接觸角  $\gamma$  在接觸曲線的各點都相同，但如果它們不為均勻，則接觸角  $\gamma$  可隨位置而變化。化學工程師能使用氣相沉積 (vapor deposition) 之類的技術，來改變平坦水平板的表面化學性質，從而建構接觸角逐點變異的水平板。他們在板上放置液滴，觀察液滴為了落實最小能量的平衡狀態，在板上移動的路徑；表面化學而非重力決定了此運動。

圖 2 中，支撐面  $W$  是鉛直柱體  $C$  的邊界。右側標示出的水平向量，與柱體正交，是其 (向外) 單位法向量，而另一朝下偏斜的單位向量，與毛細曲面正交。這兩個向量的夾角是即接觸角。接觸角小於直角時，我們可想像容器的管壁將液體吸起；在此情況，我們說容器 (鄰近  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  的接觸點) 是潤濕的 (wetting)。而當接觸角大於直角時，我們可想像容器管壁將液體下壓；在此情況，我們說容器 (鄰近  $\gamma > \frac{\pi}{2}$  的接觸點) 是非潤濕的 (nonwetting)。接觸角  $\gamma = 0$  和  $\gamma = \pi$  分別對應完全潤濕 (perfect wetting) 和完全未潤濕 (perfect nonwetting) 的情況。

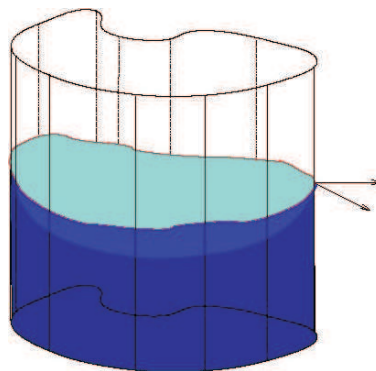


圖 2: 柱體中的毛細曲面

是什麼形塑了流體界面  $S$ ? 考慮三維空間曲面的均曲率 (mean curvature)。若在完全彈性的曲面各點施加恆定的壓力差, 則曲面的均曲率可視為曲面形變的度量。未承受壓力差的肥皂薄膜是最小曲面, 曲面各點的均曲率都為零; 而肥皂泡沫 (在平衡狀態下) 的各點具有相同的非零均曲率, 其值取決於內部和內部的壓力差。要理解毛細曲面的形狀, 均曲率的概念至關緊要。

現選定支撐面  $W$ 、重力場、容器、流體的物理特性以及柱體中液滴或流體的體積, 並要求整體配置使系統的能量處於平衡狀態。整體配置的能量是下述三種能量的總和: 重力位能、自由曲面能量 (與表面積成比例) 及配置的潤濕能 (wetting energy); 流體和柱體之間的潤濕能是它們之間的粘附能, 決定了接觸角。或許有人認為平衡狀態的配置會取得能量的局部最小值或絕對最小值, 但數學上我們無法排除不穩定的均衡 (儘管我們做實驗時不樂見不穩定的配置)。天花板上的懸滴取得能量的局部最小值, 卻非絕對最小值, 因為一旦它墜落地板, 且地板離天花板夠遠, 則墜落後它將有更少的能量。

毛細曲面的另一個實例是: 兩個剛硬物體 (譬如兩個平行的水平板) 之間的液體連接橋 (liquid bridge), 其形狀體現系統能量的平衡。有關液體連接橋的一個有趣的實驗記錄在 *Philosophical Transactions of the Royal Society* 第 27 卷 (1710~1712 年) 的 395-396 頁, 論文標題為 “An Account of an Experiment Touching the Direction of a Drop of Oil of Oranges, between Two Glass Planes, towards Any Side of Them That is Nearest Pressed Together (兩玻璃面之間的橙色油滴連接起迫近面的實驗記錄)”。作者為 Francis Hauksbee, 在 <https://www.jstor.org/stable/i206892> 可免費閱覽文章, 亦可附帶找到 Francis Hauksbee (及其他人) 的一些文章。

數學上, 毛細問題的形式極為優雅。我們要找的曲面, 其均曲率  $H$  為給定的函數 (視為位置的函數), 並以給定的角度 (視為位置的函數) 與支撐面  $W$  接觸。然而, 從分析的角度來看, 該問題極具挑戰性, 要在涉及導數之非線性函數的邊界條件下, 解決高度非線性的偏微分算子的邊界值問題。

假設重力場均勻且朝下作用, 則流體不可壓縮, 且溫度恆定 (即我們可忽略熱效應)。在此情況, 曲面  $S$  的平均曲率  $H$  是高度  $z$  的仿射函數:

$$H(x, y, z) = \kappa z + A,$$

其中高度  $z$  是相對於某個參考水平面做測量所得, 而  $H$  是高度的遞增函數 (即  $\kappa > 0$ )。Robert Finn 教授 (任教於史坦福大學) 等學者, 研究了流體可壓縮的情況下, 流體界面  $S$  的統御方程; 該方程涉及相關流體的壓力、密度的組成關係。要強調的是, 毛細曲面 (在時間上) 為靜止, 因此牛頓流體和非牛頓流體之間的區別不顯著, 至關緊要的是壓力和密度 (和溫度) 之間的關係。

假設  $\Omega$  是平面上夠好的區域, 在邊界  $\partial\Omega$  上的點  $O$  處有稜角; 不妨假設稜角位於平面座

標系的原點 (即  $O = (0, 0)$ )。我們考慮鉛直柱體  $C$ , 其橫截面為  $\Omega$  的邊界 (即  $C = \partial\Omega \times \mathbb{R}$ ), 如圖 3 所示。

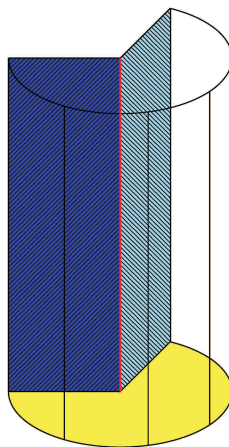


圖 3: 有皺褶的鉛直柱體

因此, 讓我們考慮開集  $\Omega$ , 其邊界在原點處形成小於  $\pi$  的尖角, 如圖 4 所示。假設給定的接觸角  $\gamma$  隨位置而變化, 但與高度無關:

$$\Gamma(x, y, z) = \gamma(x, y);$$

為簡單起見, 我們設接觸角在  $\Omega$  的的上邊界  $\partial^+\Omega$  為常數  $\gamma_1$ , 在  $\Omega$  的下邊界  $\partial^-\Omega$  為常數  $\gamma_2$ 。我們感興趣的是: 在摺痕  $\mathcal{O} \times \mathbb{R}$  附近的毛細曲面 (局部) 行爲。

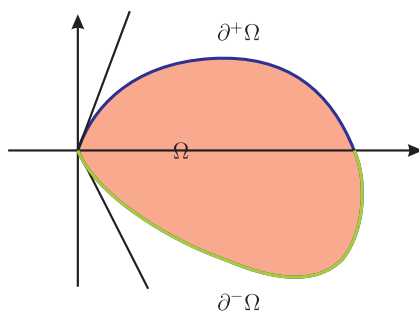


圖 4: 有稜角的凸域

首先注意到, 無論重力是否存在, 鉛直柱體中的毛細曲面  $S$  必為函數圖形; 這個結果的證明最初是由 Finn 教授提出, 而後 Texas A&M 大學的 Thomas Vogel 教授於 1988 年推廣

它至更一般的情況。設毛細曲面  $S$  為函數  $f$  的圖形, 亦即

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}.$$

在  $O = (0, 0)$  處, 函數  $f$  沿方向  $\theta$  的徑向極限, 是  $S$  沿方向  $\theta$  接近原點時趨近的高度; 換言之, 假設向量  $(\cos \theta, \sin \theta)$  指向區域  $\Omega$ , 則沿方向  $\theta$  的徑向極限是

$$Rf(\theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

藉由探討這些徑向極限, 我們可以理解毛細曲面在摺痕附近的行爲。

本文的目的, 是要描述徑向極限的行爲及 Concus-Finn 猜想的證明。該猜想於 1970 年提出, 迄今已四十載, 相關研究仍持續進行。

十九世紀至二十世紀初, 毛細曲面的研究蔚爲風潮; 舉例來說, 愛因斯坦於 1900 年時發表的首篇科學論文 (刊登於 *Annalen der Physik*), 題目正是“*Folgerungen aus den Capillaritätserscheinungen* (毛細現象的推論)”。隨後毛細作用不復風行, 未再獲深入的研究。到線上資料庫 MathSciNet, 搜索標題或評論包括“capillary”一詞的論文時, 1900 年至 1960 年僅列出 29 篇。固然, 基於諸多因素, 這個列表並不完整, 但這仍確實反映了毛細作用的普及度。然而在 1970 年至 1990 年期間, 相同搜索列出了 527 篇論文。衆人對毛細作用的興趣緣何遽增? 據我所知, Paul Concus 和 Robert Finn 的工作引爆了人們對毛細作用的興趣。

1960 年代, Paul Concus (任職於柏克萊 Lawrence 實驗室暨加州大學柏克萊分校) 研究了 NASA 太空船的油箱設計。在外太空, 重力的影響可忽略不計, 是即所謂的「零重力」(或「微重力」) 狀態。零重力下的毛細曲面, 均曲率爲常數, 如同肥皂泡沫。他的計算顯示, 在零重力下, 燃料箱的形狀足以防止燃料進入小型發動機或推進器的燃料泵, 因此返航時能以正確的定向啟動主發動機。Paul Concus 與 Robert Finn 對此進行討論, 開啟了持續五十年的合作。

令  $\gamma_1$  及  $\gamma_2$  爲接觸角  $\gamma$  沿邊界兩側在原點的極限, 且令  $2\alpha$  爲  $\Omega$  在  $(0, 0)$  處的角度。Concus 和 Finn 在接觸角爲常數 (因此  $\gamma_1 = \gamma_2$ ) 的情況, 證明: 若  $|\pi - \gamma_1 - \gamma_2| > 2\alpha$  (因此, 在圖 5 中,  $(\gamma_1, \gamma_2)$  在主對角線上, 且位於  $D_1^+$  或  $D_1^-$  中), 則鉛直柱體  $\Omega \times \mathbb{R}$  中, 不存在滿足接觸角邊界條件的常均曲率曲面, 在 1969 年寫成衆所矚目的論文 “*On the behavior of a capillary surface in a wedge* (楔形曲域上毛細曲面行爲)”, 發表於美國的 *Proceedings of the National Academy of Sciences*。他們在文章中以數學證明: 美國 NASA 推進器的油箱設計有缺陷, 而「Concus-Finn 條件」隨後出現在工程、流體力學、化學工程和法律專利文獻中。他們也同時證明了: 在正重力下, 具有恆定接觸角 (因此  $\gamma_1 = \gamma_2$ ) 的毛細問題解必無界; 事實上, 在正重力下趨近角落時, 若  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於  $D_1^+$ , 則毛細曲面升至  $+\infty$ , 而若  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於  $D_1^-$ , 則毛細曲面降至  $-\infty$ 。

1970 年, Concus 和 Finn 推測: 零重力或正重力下, 在角度爲  $2\alpha$  的凸角處, 不等式

$$|\pi - \gamma_1 - \gamma_2| < 2\alpha \quad \text{且} \quad 2\alpha + |\gamma_1 - \gamma_2| \leq \pi \quad (1)$$

是毛細曲面為連續的充要條件，是即 Concus-Finn 猜想。圖 5 的矩形現稱「Concus-Finn 矩形」，其中標記為  $R$  的（黃色）區域滿足 (1)。1980 年，史坦福大學的 Leon Simon 證明：若  $\gamma_1 = \gamma_2$  且  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於區域  $R$  的內部，則毛細曲面在尖角為連續。譚聯輝於 1986 年證明了：  $\gamma_1 = \gamma_2$  且  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於區域  $R$  的邊界時也是如此。

迄 1996 年，Concus 和 Finn 已證明：若  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於圖 5 中標記為  $D_1^+$  或  $D_1^-$  的（綠色）區域，則不存在滿足接觸角邊界條件的有界解。1996 年，他們建構出一些在尖角連續的毛細曲面，其  $(\gamma_1, \gamma_2)$  在區域  $R$  中且  $\gamma_1 = \gamma_2$ ；他們同時也建構了圖 5，標示他們對  $2\alpha < \pi$  角處毛細曲面連續性的看法。（圖 5 中未標記出  $R$  的頂點座標，我們注意到它們僅取決於  $2\alpha$ ；例如，底角的座標為  $(\pi - 2\alpha, 0)$ ，亦即， $\gamma_1 = \pi - 2\alpha, \gamma_2 = 0$ ）。他們對毛細曲面的見解，迄今讓人驚歎。

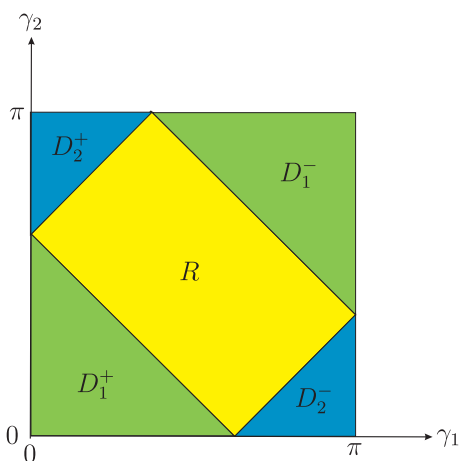


圖 5:  $2\alpha < \pi$  情況下的 Concus-Finn 矩形

然而，他們並未對更一般的情況證明：當  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於（黃色）區域  $R$  時，毛細曲面在尖角連續。他們也未能證明：當  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於標記為  $D_2^+$  或  $D_2^-$  的（藍色）區域時，毛細曲面不連續，儘管數值計算結果如此顯示。始自 1989 年，David Siegel（任教於 Waterloo 大學）和我合作，研究稜角處毛細曲面徑向極限的行為，並於 1996 年發表研究成果，證明徑向極限在諸多情況下存在，並對其行為做定性描述。這項研究得出推論：當  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於標記為  $R$  的區域時，毛細曲面連續。Math Reviews 列該論文為 *Featured Review*。

2003 年夏天，我訪問德國萊比錫的 Max Planck 數學研究所；當時該所邀集諸多研究毛細曲面的學者，包括 Maria Athanassenas、Finn、John McCuan、Erich Miersemann、Siegel、Henry Wente 等。當時的主要討論議題是 Concus-Finn 猜想的正確性。2010 年，我證明：若  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於標記為  $D_2^+$  或  $D_2^-$  的（藍色）區域，且毛細曲面  $z = f(x, y)$  滿足接觸角邊界條件，則該曲面在尖角不連續，Concus-Finn 猜想也於焉得證。

這結果顯示：相較於類似但更傳統的線性偏微分方程（例如 Laplace 方程或 Poisson 方程）的解行為，毛細曲面在尖角的徑向極限行為截然不同。我將描述有界毛細曲面的這種行為；在我將討論的情況，毛細曲面在尖角的極限接觸角  $\gamma_1$  及  $\gamma_2$  位於  $D_2^+$  或  $D_2^-$  — 因為當  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於  $D_1^+$  或  $D_1^-$  時，不存在有界毛細曲面，而當  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於  $R$  時，毛細曲面在尖角連續。我也會將這種行為與更傳統的方程解做比對。

下文中，我將考慮的毛細曲面  $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$ ，在角度為  $2\alpha$  的稜角，接觸角極限為  $\gamma_1$  及  $\gamma_2$ 。對原點做適當旋轉，使得在  $(0, 0)$  處  $\theta = \alpha$  是上邊界的切線方向， $\theta = -\alpha$  是下邊界的切線方向，如圖 4 所示；該圖中  $2\alpha < \pi$ 。

我們先討論  $2\alpha < \pi$  的情況，亦即凸角的情況。首先設  $2\alpha < \pi$  且  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於  $D_1^+$ 。我們知道，在此情況，毛細曲面的高度  $z = f(x, y)$  在尖角不連續，且  $f$  的徑向極限具如下之形式：

$$Rf(\theta) \text{ 爲 } \begin{cases} \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [-\alpha, -\alpha + \gamma_2], \\ \text{嚴格遞增,} & \text{若 } \theta \in [-\alpha + \gamma_2, \alpha - \gamma_1], \\ \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [\alpha - \gamma_1, \alpha], \end{cases}$$

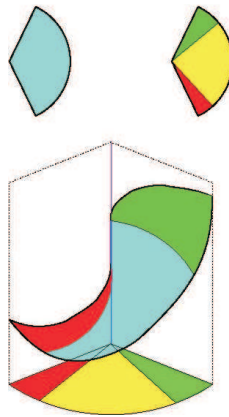


圖 6: 在凹角的不連續性

其次假設  $2\alpha < \pi$  且  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於  $D_1^-$ 。在此情況，毛細曲面的高度  $z = f(x, y)$  在尖角不連續，且  $f$  徑向極限具如下之形式：

$$Rf(\theta) \text{ 爲 } \begin{cases} \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [-\alpha, -\alpha + \pi - \gamma_2], \\ \text{嚴格遞減,} & \text{若 } \theta \in [-\alpha + \pi - \gamma_2, \alpha + \gamma_1 - \pi], \\ \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [\alpha + \gamma_1 - \pi, \alpha], \end{cases}$$

這些毛細曲面看來像是圖 6 的反轉版本。

現考慮非凸角  $2\alpha > \pi$  的情況，也就是所謂的凹角。Concus 和 Finn 未提供凹角情況的「Concus-Finn 矩形」，但我們不難建構出形同圖 5 的矩形；雖然該圖形仍全然取決於稜角的角度  $2\alpha$  (且與重力無關)，但兩張圖裡區域  $R$  的頂點座標不同；例如，凹角時底角座標為  $(2\alpha - \pi, 0)$ ，參見圖 8。相較於凸角的情況，在非凸角附近毛細曲面必為有界。當  $2\alpha > \pi$  且  $(\gamma_1, \gamma_2)$  不在圖 8 的區域  $R$  時，我在 2012 年證明：在此情況，高度  $f$  在稜角不連續。更甚者，我們觀察到新的現象：徑向極限在角度為  $\pi$  的扇形域為常數；我們稱該扇形域為中央扇 (central fan)。

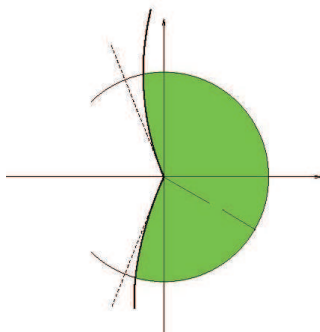


圖 7: 凹角 ( $\pi < 2\alpha < 2\pi$ )

回想圖 5 中  $2\alpha < \pi$  的情況，若  $(\gamma_1, \gamma_2)$  在區域  $D_2^+$ ，則徑向極限在  $[-\alpha, -\alpha + \gamma_2]$  及  $[\alpha - \gamma_1, \alpha]$  等兩個區間內為常數，而若  $(\gamma_1, \gamma_2)$  在區域  $D_2^-$  中，則徑向極限在  $[-\alpha, -\alpha + \pi - \gamma_2]$  及  $[\alpha + \gamma_1 - \pi, \alpha]$  為常數；雖然這些區間未特別標示，但我們因此而得知： $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於區域  $R$  時，毛細曲面的高度  $z = f$  在凸角連續。這些區間稱為側扇 (side fan)。而在凹角的情況，必會出現下述型態之一。

1. 高度  $f$  在凹角連續，且  $Rf(\theta)$  在  $[-\alpha, \alpha]$  為常數；這情況會發生，唯當角度非凸且  $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於下圖 Concus-Finn 矩形中標記為  $R$  的區域。然而， $(\gamma_1, \gamma_2)$  位於  $R$  是  $f$  在非凸角連續的必要但非充分條件。

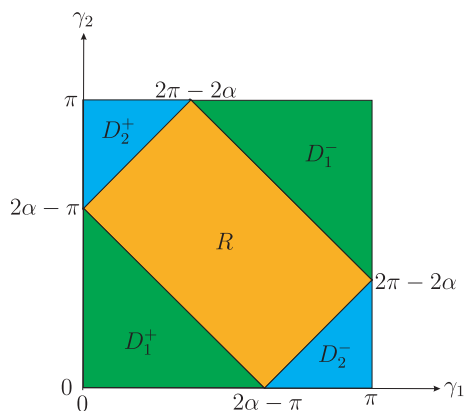


圖 8: 凹角情況的 Concus-Finn 矩形



在其餘情況，毛細曲面的高度  $f$  在凹角不連續。側扇的確切尺寸  $[-\alpha, -\alpha + \sigma_2]$  及  $[\alpha - \sigma_1, \alpha]$  (即  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的值) 並不重要。情況 4 和情況 5 的中央扇  $[\theta_1, \theta_1 + \pi]$  有半空間的角度量，但中央扇的位置 (即  $\theta_1$  的值) 未知。

2.

$$Rf(\theta) \text{ 爲 } \begin{cases} \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [-\alpha, -\alpha + \sigma_2], \\ \text{嚴格遞增,} & \text{若 } \theta \in [-\alpha + \sigma_2, \alpha - \sigma_1], \\ \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [\alpha - \sigma_1, \alpha], \end{cases}$$

3.

$$Rf(\theta) \text{ 爲 } \begin{cases} \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [-\alpha, -\alpha - \sigma_2], \\ \text{嚴格遞減,} & \text{若 } \theta \in [-\alpha + \pi - \gamma_2, \alpha + \gamma_1 - \pi], \\ \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [\alpha - \sigma_1, \alpha], \end{cases}$$

4.

$$Rf(\theta) \text{ 爲 } \begin{cases} \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [-\alpha, -\alpha + \sigma_2], \\ \text{嚴格遞減,} & \text{若 } \theta \in [-\alpha + \sigma_2, \theta_1], \\ \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [\theta_1, \theta_1 + \pi], \\ \text{嚴格遞增,} & \text{若 } \theta \in [\theta_1 + \pi, \alpha - \sigma_1], \\ \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [\alpha - \sigma_1, \alpha], \end{cases}$$

5.

$$Rf(\theta) \text{ 爲 } \begin{cases} \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [-\alpha, -\alpha + \sigma_2], \\ \text{嚴格遞增,} & \text{若 } \theta \in [-\alpha + \sigma_2, \theta_1], \\ \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [\theta_1, \theta_1 + \pi], \\ \text{嚴格遞減,} & \text{若 } \theta \in [\theta_1 + \pi, \alpha - \sigma_1], \\ \text{常數,} & \text{若 } \theta \in [\alpha - \sigma_1, \alpha], \end{cases}$$

中央扇的存在性是極為重要且尚待解決的問題。2008 年，Monash 大學的 Maria Athanassenas 教授和我在聯名論文中主張：在鉛直柱體內的毛細曲面的研究中，這是最難且最重要的問題。毛細曲面沿著皺摺、「釘紮線 (pinning line)」等地方的行為，似乎與鉛直柱體中的行為相同；最早出現這種主張的，是 Dieter Langbein 的書，題為“*Capillary surfaces. Shape-stability-dynamics, in particular under weightlessness* (失重狀態下毛細曲面之形狀、穩定性、動力學)” (Vol. 178, *Springer Tracts in Modern Physics* (2002))。我目前正致力於此看法的證明。

數學家，物理學家，工程師正進行研究的，包括：柱體及試管中有皺摺的毛細曲面、觸及「釘紮線」的液滴及流體、微小電子元件上的毛細曲面等。生物學家感興趣的，是致病有機體可以在粉塵粒子的微觀流體儲存器中存活。另外，談到光刻 (photolithography, 亦稱 optical lithography)，它對薄膜或塊狀基板上的圖案化部件進行微加工，而由於水的折射率高於空氣，

因此它使用水 (以及具有更高折射率的其他流體) 製造微芯片和微電路; 在該製造過程中, 使用的水 (或其他流體) 與周圍大氣 (或真空) 之間的界面是即毛細曲面, 因此理解這些毛細曲面的行為乃屬必要。我很幸運, 能與身在世界各地的傑出學者進行合作。

—本文作者為美國 Wichita 州立大學退休教授—

## 2019 Spring Probability Workshop

日期：2019 年 5 月 20 日 (星期一) ~ 2019 年 5 月 22 日 (星期三)

地點：台北市大安區羅斯福路四段1號 天文數學館 6 樓

詳見：

[https://www.math.sinica.edu.tw/www/file\\_upload/conference/201905PROB/Prob.html](https://www.math.sinica.edu.tw/www/file_upload/conference/201905PROB/Prob.html)