數學傳播 43卷1期, pp. 19-37

等周長不等式

林琦焜

1. Dido 問題

『為了用列舉法證明圓的周長比任何具有相同面積的其他圖形的周長都小, 我們不必考察所有可能的圖形, 只需對幾個特殊圖形進行證明, 結合運用歸納法, 就可以得到與對所有其他圖形都進行證明得出的相同結論。』

— René Descartes (1596 ∼ 1650) —

圖 1: Dido 公主與其獸皮

等周長問題可推溯至古希臘。根據傳奇[1]故事, 古 Phoenicia(腓尼基)(位在現在的敘利亞)

[1]從聖經文學的角度而言所謂傳奇(legend) 意思是一個傳統的故事, 有時被普遍認為是歷史的, 但未經過認證。它介於神話 (mythology) 與歷史(history) 之間, 傳奇是以歷史的事實作為其根據, 而神話卻並非如此。一個傳奇並不一定是不可靠的, 它可能也會提示出歷史的要點。

的 Tyre 城的 Dido 公主 (B.C.900)[2], 她在國王被謀殺之後, 逃至北非地中海, 在那裡她成爲迦太基創立者的繼承人, 據傳說她是迦太基第一個女王。當她抵達北非地中海海岸時, 當地居民給她一塊獸皮, 並答應獸皮所圍的部分之土地就屬於她的。Dido 公主將獸皮切成條, 沿著海岸邊圍成半圓。她的方法是正確的, 如此可得最大面積。

西元前 814 年, 迦太基城在今日的突尼斯城附近誕生, 比羅馬建城還早了 61 年,『迦太基 (Carthage)』是從腓尼基語『Qart-hadašt』蛻變而來, 意思是『新城』。腓尼基人是住在地中海東岸的中東人, 擅長海上貿易, 更是優秀軍事家, 因此控制了地中海沿岸。他們對人類文化最大的貢獻是發明字母, 這些字母被其他國家和民族學習引進後, 成爲希臘文、阿拉伯文、希伯來文的文字原形和基礎。

利用中學數學就可以推得固定周長 L 的矩形以正方形所圍的面積爲最大

$$x\left(\frac{L}{2}-x\right)=-x^2+2\frac{L}{4}x=-\left(x-\frac{L}{4}\right)^2+\frac{L^2}{16}\leq\frac{L^2}{16}; \tag{1.1}$$

這是因爲正方形比矩形更對稱 (旋轉 90 度比旋轉 180 度有更多的對稱性)。我們可以模仿古希臘 Eudoxus 的窮盡法 (Method of exhaustion), 將正方形擴充爲正八邊形然後正十六邊形 $\ldots$。令D_{2^n}表示周長等於L的正2^n邊形之面積則簡單的計算可得

$$D_4\leq D_8\leq D_{16}\leq\cdots\leq D_{2^n}\leq\cdots \tag{1.2}$$

邊越多就有越多的對稱性, 因此所圍面積越大。這是一個遞增數列有上界因此極限存在 (是一個周長等於 L 的圓 $B_2(r)$!) 而且

$$D_{2^n}\leq D_\infty=\lim_{n\to\infty}D_{2^n}=|B_2(r)|=\pi r^2=\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2=\frac{L^2}{4\pi}, \tag{1.3}$$

現在將正 2^n 邊形換爲一般區域。若 L 爲封閉曲線 $C=\partial\Omega$ 之長度、A 爲其所圍區域 Ω 之面積, 則 L 與 A 之關係爲 $4\pi A\leq L^2$, 這就是著名的等周長不等式 (isoperimetric inequality):

定理 1.1(**等周長不等式:二維平面曲線**): 平面上具有固定長度的簡單封閉曲線 (*simple close curve*) 中, 圓所圍之面積爲最大。換言之, 若 L 是簡單封閉曲線 $C=\partial\Omega$ 的長度、A 是曲線 C 所圍區域 Ω 的面積, 則面積 A 與周長 L 滿足關係式;

$$4\pi A\leq L^2; \tag{1.4}$$

更且等號成立時, 封閉曲線 $C=\partial\Omega$ 必定是一個圓 (看到 π 就應聯想到圓)。

[2]話說迦太基的創始者狄多 (Dido) 公主 Queen Elissa, 成爲迦太基女王後, 改名爲『Dido』, 意思是『流浪者』。著名史詩《埃涅阿斯 (Aeneid)》使她得以名垂千古。

如果我們先入爲主認定這個事實的話, 則容易精確地猜出 (1.4) 這個不等式

$$L = 2\pi r \quad \Longrightarrow \quad A = |\Omega| \le |B_2(r)| = \pi r^2 = \pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}, \tag{1.5}$$

而且 (1.4) 兩邊是量綱平衡 (dimensional balance), 至於 π 則暗示了圓的存在 (有 π 就有圓、有圓就有 π)。西元前 200 年左右, 古希臘數學家 Zenodorus 證明: 在固定周長、相同邊數的多邊形中正多邊形所圍的面積最大。如果 n 是固定, 給定 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一 n 邊形, 則等周長不等式 (1.4) 爲

$$4n|\Omega| \tan\frac{\pi}{n} \le |\partial\Omega|^2; \tag{1.6}$$

等式成立的話若且唯若 Ω 是一個正 n 邊形。(1.6) 左邊是一遞增數列有上界因此極限存在 (是該數列的最小上界), 令 $n \to \infty$ 也可推得 (1.4)

$$\lim_{n\to\infty} 4n|\Omega| \tan\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} 4\pi|\Omega| \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} = 4\pi|\Omega| \le |\partial\Omega|^2.$$

具有固定長度的所有封閉曲線中, 以圓所圍的面積最大。這是數學中“*顯而易見*” 的事實之一, 但只有用近代的分析才能得到嚴格的證明。第一個嚴謹的數學證明直到 19 世紀才出現。其中 Jakob Steiner (1796∼1863)[3] 在 1838 年以純幾何的方法證明: *若答案存在*, 則必然是圓形。之後, 數學家們陸續給出了不同的證明, 其中有不少是非常簡單的。

等周長問題 (isoperimetric problem)[4] 是促進數學中變分法 (Calculus of Variations) 早期發展的一個重要問題。在 17∼18 世紀曾經被瑞士 Bernoulli 家族的數學家們作爲一個課題研究過。其中最著名的是最速下降曲線 (極速線) 問題 (Brachistochrone problem), 這是由 Johann Bernoulli (1667∼1748) 所提的。當時這個問題吸引了全歐洲居領導地位的數學家: 牛頓、Leibniz、Jacob Bernoulli、L'Hospital、$\cdots$。儘管 Bernoulli 兄弟, 牛頓及同時代的其他人利用特殊的技巧解決了最速下降曲線問題, 但要到了十八、十九世紀 L. Euler (1707∼1783), J. Lagrange (1736∼1813), Karl Weierstrass (1815∼1897), Ostrogradskii (1801∼1862) 等人之努力才發展成完整的理論。

2. 幾何對稱的證明

如圖所示, 設 g、g' 爲兩條平行直線, 與 $C = \partial\Omega$ 相切於 P、Q 兩點, 而 $s = 0$、s_0 則分別是 P、Q 之參數。另外我們作一半徑爲 r 的圓 $\bar{C} = \partial B_r$ 與直線 g、g' 分別相切於 $\bar{P}$、$\bar{Q}$

[3]Jakob Steiner 人們稱他是瑞士的牧羊人, 在 14 歲以前都還沒有正式到學校就讀, 到了 18 歲抑制不了內心對於求知的渴望, 離家出走追尋他自己的人生, 最終由牧羊人 (農夫) 成爲 19 世紀上半葉最重要的幾何學家之一。等周問題聽說他給出了五個純幾何 (對稱) 的證明, 關於他的生平可以參考 [15]。

[4]等周長(isoperimetric) 由兩個字 iso (相同) perimeter (周長) 組合而成; iso-perimetric=same+boundary。

兩點, 假設其圓心爲原點。命 C 之參數式爲

$$\varphi(s)=(x(s),y(s)), \qquad (x(0),y(0))=(x(L),y(L)); \tag{2.1}$$

因爲 s 是弧長所以

$$(x')^2+(y')^2=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=\frac{dx^2+dy^2}{ds^2}=\frac{ds^2}{ds^2}=1,$$

而 $\bar{C}$ 之參數式爲 $\bar{\varphi}(s)=(\bar{x}(s),\bar{y}(s))$ 其中 $\bar{x}(s)=x(s)$

$$\bar{y}(s)=\begin{cases}-\sqrt{r^2-x^2(s)}\,, & 0\le s\le s_0,\\ \sqrt{r^2-x^2(s)}\,, & s_0\le s\le L.\end{cases} \tag{2.2}$$

根據 Green's 定理長度爲 L 之封閉曲線所圍的面積可利用線積分來表示

$$\text{面積}=\int_{y(0)}^{y(L)} x\,dy=\int_0^L xy'ds=-\int_0^L yx'ds=\frac{1}{2}\int_0^L (xy'-x'y)ds. \tag{2.3}$$

將此公式應用到 $C=\partial\Omega$ 與 $\bar{C}=\partial B_r$ 得

$$\begin{cases}|\Omega|=\displaystyle\int_0^L xy'ds,\\ |B_r|=\pi r^2=-\displaystyle\int_0^L \bar{y}\bar{x}'ds=-\int_0^L \bar{y}x'ds.\end{cases} \tag{2.4}$$

兩式相加

$$|\Omega|+|B_r|=A+\pi r^2=\int_0^L (xy'-x'\bar{y})ds=\int_0^L \sqrt{(xy'-x'\bar{y})^2}\,ds. \tag{2.5}$$

但由 Cauchy-Schwarz 不等式 (2.5) 最後一項根號內部可以估計爲

$$(xy'-\bar{y}x')^2=[(x,-\bar{y})\cdot(y',x')]^2\le(x^2+\bar{y}^2)((y')^2+(x')^2)=x^2+\bar{y}^2. \tag{2.6}$$

因此由 (2.5) 得

$$A+\pi r^2\le\int_0^L \sqrt{(x^2+\bar{y}^2)[(x')^2+(y')^2]}\,ds\le\int_0^L \sqrt{x^2+\bar{y}^2}\,ds=Lr. \tag{2.7}$$

因爲兩個正數的幾何平均小於或等於它們的算術平均, 所以

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2}\le\frac{1}{2}(A+\pi r^2)\le\frac{1}{2}Lr, \tag{2.8}$$

取平方就是等周長不等式 (1.4)

$$4\pi A\le L^2.$$

現在假設等周長不等式 (1.4) 的等號成立, 則 A 與 πr^2 的幾何平均與算術平均相等 $A=\pi r^2$、$L=2\pi r$, 因為直線 g、g' 的方向是任意的, 因此 C 在所有的方向都有相同之寬度, 因此比較 (2.5)、(2.7) 兩式

$$A+\pi r^2=\int_0^L \sqrt{(xy'-x'\bar{y})^2}\,ds=\int_0^L \sqrt{x^2+\bar{y}^2}\,ds \tag{2.9}$$

必處處成立, 特別地

$$(xy'-x'\bar{y})^2=(x^2+\bar{y}^2) \quad\Longrightarrow\quad (x,-\bar{y})\parallel(y',x'), \tag{2.10}$$

於是

$$\frac{x}{y'}=-\frac{\bar{y}}{x'}=\pm\sqrt{x^2+\bar{y}^2}=\pm r.$$

由 (2.5) 知其比值為 r, 即 $x=ry'$、$\bar{y}=-rx'$, x、y 交換上式亦成立 $y=rx'$ 因此可得

$$x^2+y^2=r^2,$$

於是證明了 $C=\partial\Omega$ 是一個圓。 □

註解:

(i) 關係式 (2.10) 雖然是由幾何平均等於算術平均而得, 但事實上也正是 Cauchy-Schwarz 不等式 (2.6) 之等號成立時, 向量 $\{(x,-\bar{y}),\,(y',x')\}$是線性相依 (linearly dependent) 因此是兩個平行的向量。

(ii) 對稱 (symmetry) 出現在變動直線 g、g' 的方向, 由此得出 $C=\partial\Omega$ 在所有的方向都有相同之寬度, 所以必定是一個圓。一個極值問題必定與對稱性有關。

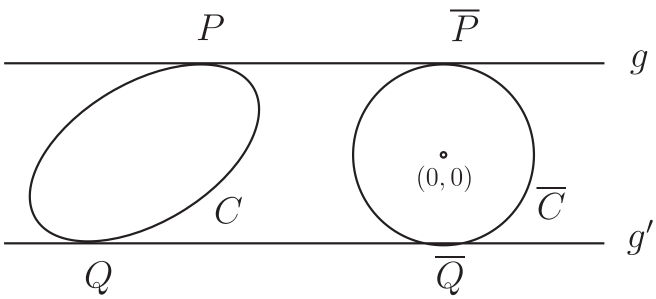

圖 2: 等周長不等式的幾何證明

3. 變分學: 極值問題

等周長問題簡單描述為: 試求一封閉曲線, 其長度固定而所圍面積為最大? 不失一般性可

假設曲線爲凸函數, 且可被 x 軸所平分。所以問題化爲底下積分之極值的問題

$$\max_y \int_0^\xi y(x)dx, \qquad y(0)=y(\xi)=0, \qquad \int_0^\xi \sqrt{1+(y')^2}dx=L. \tag{3.1}$$

解法一: 根據 Lagrange multiplier 可取

$$F=F(y,y',\lambda)=y+\lambda\sqrt{1+(y')^2}, \tag{3.2}$$

因此 Euler-Lagrange 方程爲

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)-1=0, \tag{3.3}$$

微分展開得

$$\kappa=\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\lambda}. \tag{3.4}$$

這是一條曲率 (curvature) 等於 $\kappa=\frac{1}{\lambda}$ 之曲線, 而這顯然是圓的一部份。將 (3.4) 視爲 y' 的一階微分方程直接積分

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{x-c_1}{\lambda}, \qquad c_1\in\mathbb{R},$$

解得 y' 之後再積分

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2, \qquad c_2\in\mathbb{R}. \tag{3.5}$$

這個曲線是圓心等於 (c_1,c_2) 半徑爲 λ 之圓的一部份, 而且 $1<L<\frac{\pi}{2}$。如果將限制條件 $y(0)=y(\xi)=0$ 代入得

$$\pi\xi=L, \qquad c_1=\frac{L}{2\pi}, \qquad c_2=0, \qquad \lambda=\frac{\xi}{2}.$$

解法二: 利用參數式 $x=x(t)$、$y=y(t)$ 則問題化爲求積分之極值

$$\max\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot{y}-y\dot{x})dt, \qquad \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=L, \tag{3.6}$$

一樣仿解法一 Lagrange multiplier 可取

$$F=F(x,y,\dot{x},\dot{y},\lambda)=\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, \tag{3.7}$$

因此 Euler-Lagrange 方程爲 (此時有兩個變數、兩個方程式)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial F}{\partial x}=0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

展開得

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\Big)-\dfrac{1}{2}\dot{y}=0, \\ \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\Big)+\dfrac{1}{2}\dot{x}=0, \end{cases} \tag{3.8}$$

積分得

$$-y+\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=-c_2\,, \qquad x+\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=c_1,$$

或者

$$y-c_2=\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\,, \qquad x-c_1=\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}};$$

取平方得 (我們並不需要解$x-c_1$、$y-c_2$!)

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2, \tag{3.9}$$

因此曲線是以 (c_1, c_2) 爲圓心半徑等於 λ 的圓。

解法三: 這個事實也可透過極座標來看 $(r=r(\theta))$:

$$\max_r \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta, \qquad L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}d\theta,$$

此時

$$F=F(r,r')=\frac{1}{2}r^2+\lambda\sqrt{r^2+(r')^2},$$

其 Euler-Lagrange 方程爲

$$\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{d}{d\theta}\Big(\frac{\partial F}{\partial r'}\Big)=0.$$

展開得

$$r+\lambda r\Big[r^2+(r')^2\Big]^{-\frac{1}{2}}-\frac{d}{d\theta}\Big[\lambda r'(r^2+(r')^2)^{-\frac{1}{2}}\Big]=0,$$

或

$$\kappa=\frac{rr''-2(r')^2-r^2}{(r^2+(r')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\lambda}; \tag{3.10}$$

此曲線爲曲率 κ 等於常數$\frac{1}{\lambda}$是半徑爲λ之圓。 □

註解:

(i) Lagrange 乘子 λ 的幾何意義是所得曲率等於 $\kappa=\frac{1}{\lambda}$ 的圓之半徑, 而積分常數 (c_1, c_2) 正好是圓心。

(ii) 等周問題之 Euler-Lagrange 方程是二階微分方程, 積分兩次所得之常數c_1、c_2之幾何意義是決定 圓心所在之位置。

(iii) 嚴格地推導 Euler-Lagrange 方程 (3.3) 需要變分 (Calculus of Variations) 或泛函分析 (Functional Analysis) 的知識, 但是我們可以藉由全微分與分部積分 (不嚴格) 直觀地看

$$\begin{aligned} dF(y,y') &= \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial y'}dy' \\ &= \frac{\partial F}{\partial y}dy - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}dy = 0 \qquad \text{(分部積分)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

將 dy 視爲廣義函數的測試函數 (test function), 所以得 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0;$$

這裡負號表示分部積分一次, 而且 Euler-Lagrange 方程是量綱平衡

$$\frac{[F]}{[y]} = \frac{1}{[x]}\frac{[F]}{[y]/[x]},$$

如此就可猜出 $\dfrac{d}{dx}$ 是作用到 $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$。

4. Fourier 分析: Wirtinger 不等式

藉由 Fourier 分析可以證明等周長不等式, 這是 Hurwitz (1859~1919)[5] 的想法, 這是一個純分析的方法。但是我們必須先證明 Wirtinger 引理[6]。

引理 4.1 (Wirtinger Lemma): 已知 $f(t)$ 是一週期爲 2π 之連續函數, 具有連續的導數 $f'(t)$, 且平均值等於 0

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0, \tag{4.1}$$

則底下不等式成立

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \le \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt, \tag{4.2}$$

且等號成立之條件是

$$f(t) = a\cos t + b\sin t, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

---

[5]Adolf Hurwitz 是猶太裔的德國數學家, 師從 Felix Klein 主要研究橢圓函數。他於 1884 年受邀前往柯尼斯堡大學擔任傑出教授; 在那裡他遇見並影響了 David Hilbert 與 Hermann Minkowski。這三位偉大數學家每週固定的散步並分享一週來研究數學的心得構築了數學史上最美的畫面。

[6]Wilhelm Wirtinger (1864~1945) 是奧地利數學家, 我們對他比較陌生, 但實際上他在研究與教學上都是有非凡成就的數學家。

證明: 將 $f(t)$ 展開成 Fourier 級數,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{4.4}$$

其中 Fourier 係數爲

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt dt, & n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt dt, & n = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{4.5}$$

因爲 $f(t)$ 是連續函數, 其 Fourier 級數可逐項微分 (因爲一致收斂)

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nt - na_n \sin nt). \tag{4.6}$$

因爲

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0,$$

由 Parseval 公式 (Fourier 級數的畢氏定理) 可得 (分別作用到 (4.4), (4.6))

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2), \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2). \end{cases} \tag{4.7}$$

因此 (4.7) 兩式相減得

$$\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt - \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \pi\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \geq 0. \tag{4.8}$$

上式 (4.8) 等於零的條件是 $a_n = b_n = 0$, $n = 2, 3, \ldots$, 所以

$$f(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t. \tag{4.9}$$

□

註解:

(i) 看到週期函數直接就聯想到 Fourier 級數, 這是對數學稍有認識的人該有的常識 (common sense)。

(ii) Wirtinger 引理也可以由變分的角度來看。考慮積分

$$F(f,f')=\int\frac{1}{2}\Big[|f'(x)|^2-|f(x)|^2\Big]dx, \tag{4.10}$$

則其 Euler–Lagrange 方程爲

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)=0, \tag{4.11}$$

這是一個二階常微分方程其解正是 (4.9)

$$f''+f=0 \quad\Longrightarrow\quad f(x)=a\cos x+b\sin x, \qquad a,b\in\mathbb{R}. \tag{4.12}$$

(iii) Wirtinger 不等式 (4.2) 可視爲一維的 Poincaré 不等式, 有時也稱爲 Poincaré-Wirtinger 不等式, 事實上就是 Sobolev 不等式的變形。另一類型的 Wirtinger 不等式爲 $f\in C^1[a,b]$、$f(a)=f(b)=0$, 則

$$\int_a^b|f(x)|^2dx\le\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b|f'(x)|^2dx, \tag{4.13}$$

而且 $\dfrac{(b-a)^2}{\pi^2}$ 是最佳的常數, 這個不等式可視爲一維的 Friedrich 不等式。(參考 [7])

Hurwitz **之證明** (**等周長不等式**): 假設曲線參數方程式爲 $x=x(t)$、$y=y(t)$, $t=\frac{2\pi s}{L}$ 其中 s 是弧長 (arc length) 而且$x(0)=x(2\pi),y(0)=y(2\pi)$。將 $x(t)$、$y(t)$ 展開成 Fourier 級數:

$$\begin{cases} x(t)\sim\dfrac{1}{2}a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\\ y(t)\sim\dfrac{1}{2}c_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nt+d_n\sin nt),\end{cases} \tag{4.14}$$

則 $\dot{x}(t)$、$\dot{y}(t)$ 之 Fourier 級數爲 (我們假設微分與無窮級數之順序可以互換!)

$$\begin{cases} \dot{x}(t)\sim\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nt-na_n\sin nt),\\ \dot{y}(t)\sim\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(nd_n\cos nt-nc_n\sin nt),\end{cases} \tag{4.15}$$

再由 Parseval 公式得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)dt=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2),\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}x\dot{y}dt=\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n),\end{cases} \tag{4.16}$$

另外由已知的邊長可得

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{2\pi}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)dt=\frac{L^2}{2\pi}. \tag{4.17}$$

根據 Green 定理, 面積可以轉換爲線積分

$$A=|\Omega|=\oint_{\partial\Omega} xdy=-\oint_{\partial\Omega} ydx=\oint_{\partial\Omega}\frac{1}{2}(xdy-ydx)=\int_0^{2\pi} x\dot{y}dt, \tag{4.18}$$

因此由單位法向量得

$$2A=\oint_{\partial\Omega}(x,y)\cdot\left(-\frac{dy}{ds},\frac{dx}{ds}\right)ds\le\oint_{\partial\Omega}|(x,y)|ds. \tag{4.19}$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}
2A &\le \left(\oint_{\partial\Omega}|(x,y)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\oint_{\partial\Omega}1^2ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&=|\partial\Omega|^{\frac{1}{2}}\left(\oint_{\partial\Omega}(x^2+y^2)ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&=L^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{2\pi}(x^2+y^2)\frac{L}{2\pi}dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{變數變換 } t=\tfrac{2\pi}{L}s) \\
&=\frac{L}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2\pi}(x^2+y^2)dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le\frac{L}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2\pi}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{Wirtinger 不等式 (4.2) }) \\
&=\frac{L}{\sqrt{2\pi}}\frac{L}{\sqrt{2\pi}}=\frac{L^2}{2\pi} \qquad (\text{根據}(4.17)).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

這就證明了等周長不等式 (1.4) 。另外由 (4.16) 可以將 (4.20) 表示爲

$$\begin{aligned}
0\le\frac{L^2}{4\pi}-A&=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)-2n(a_nd_n-b_nc_n)\Big] \\
&=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(na_n-d_n)^2+(nb_n+c_n)^2+(n^2-1)(c_n^2+d_n^2)\Big];
\end{aligned} \tag{4.21}$$

若等號成立則必須是

$$a_1=d_1, \qquad b_1=-c_1, \qquad a_n=b_n=c_n=d_n=0, \qquad n>1,$$

於是待求之曲線爲

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \\ y = \dfrac{1}{2}c_0 - b_1 \cos t + a_1 \sin t, \end{cases} \tag{4.22}$$

或者表示爲

$$\Big(x - \frac{1}{2}a_0\Big)^2 + \Big(y - \frac{1}{2}c_0\Big)^2 = a_1^2 + b_1^2; \tag{4.23}$$

這是以 $\Big(\dfrac{1}{2}a_0, \dfrac{1}{2}c_0\Big)$ 爲圓心、半徑等於 $r = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ 的圓。 □

5. 複變函數論的方法

等周長不等式也可以利用複變 (Complex Analysis) 的方法來證明, 其實這也是合理、自然的。只要是二維的問題 (例如二維無旋、不可壓縮流體) 都可以化爲複數利用成熟、漂亮的複變函數論來證明。我們先介紹複數與共軛複數

$$z = x + iy, \qquad \bar{z} = x - iy \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \tag{5.1}$$

由連鎖律得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i\Big(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big), \end{cases} \tag{5.2}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big). \tag{5.3}$$

面積元素 (area element) 可以表示爲

$$dA = dx \wedge dy = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \wedge \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) = \frac{i}{2}dz \wedge d\bar{z}; \tag{5.4}$$

這裡我們默認

$$dz \wedge dz = d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0. \tag{5.5}$$

另外我們也需要 Green 定理, 考慮全微分

$$\begin{aligned} d[f dz] &= \frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \wedge dz \\ &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(dx - idy) \wedge (dx + idy) = 2i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}dx \wedge dy, \end{aligned} \tag{5.6}$$

(5.6) 積分就是複數形式的 Green 定理

$$\oint_{\partial\Omega} f(z)dz = \iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 2i \iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx \wedge dy. \tag{5.7}$$

其次是繞數 (winding number)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{w-z} dw = 1, \qquad z \in \Omega; \tag{5.8}$$

因爲 $\partial\Omega$ 是單純曲線所以 (5.8) 這個積分等於 1, 實際上這個積分可以是任何的整數。將面積表爲積分

$$\begin{aligned}
4\pi A = 4\pi|\Omega| = 4\pi \iint_\Omega dA &= \iint_\Omega 2\pi i \, dz \wedge d\bar{z} \\
&= \iint_\Omega dz \wedge d\bar{z} \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{w-z} dw \qquad (\text{利用 (5.8) 刻意將} 2\pi i \text{表示爲積分}) \\
&= \oint_{\partial\Omega} dw \iint_\Omega \frac{1}{w-z} dz \wedge d\bar{z} \qquad (\text{變換積分順序}) \\
&= \oint_{\partial\Omega} dw \oint_{\partial\Omega} \frac{\bar{w}-\bar{z}}{w-z} dz \qquad (\text{複數形式的Green 定理 (5.7)}) \\
&\le \oint_{\partial\Omega} dw \oint_{\partial\Omega} dz = |\partial\Omega|^2 = L^2 \qquad \left(\left| \frac{\bar{w}-\bar{z}}{w-z} \right| \le 1 \right),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

這就證明了等周長不等式 (1.4) 。 □

註解:

(i) 由 (5.8) 所定義的繞數 (winding number) 除了複變函數論之外在流體力學與代數拓樸 (Algebraic Topology) 也扮演重要的角色。它一定是一個整數而且與積分的路徑無關, 這可以透過量綱分析 (dimensional analysis) 來看:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{w-z} dw \approx \frac{1}{[w-z]}[w] = \frac{1}{[w]}[w] = 1;$$

這個積分是無量綱 (dimensionless)! 所以與 $\partial\Omega$ 無關。另外 $2\pi i$ 這個量則告訴我們: 繞了一圈的意思。

(ii) 通常我們有一個笑話:『*複變要讀兩遍, 但是實變就要讀十遍。*』這還真有道理! 複變由其來源: A. Cauchy (1789∼1857) 計算特殊的積分或 B. Riemann (1826∼1866) 想解決流體力學的問題, 都是比較具體直觀的。而實變就抽象多了, 使得人們覺得它困難。但根本原因是學習的方法有問題, 還有教的人的素養不足導致對*她沒有感覺*! 讀數學一定要有例子 (Example), 我們是透過例子來理解定理。

『在做數學證明的時候, 心中要有個瞭如指掌、non-trivial 的例子, 然後用這個例子去檢驗證明上出現的每個公式。一旦你的例子與公式有所出入, 公式就是錯的。』

— 費曼的方法(Method of Feynman) —

6. Sobolev 不等式

我們先介紹幾個量: 令 $\omega_n = S^{n-1}(1)$ 是 n 維單位球 $B_n(1)$ 之表面積

$$\omega_n = |\partial B_n(1)| = S^{n-1}(1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}, \tag{6.1}$$

其中 Γ 則是 gamma 函數

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad x>0, \tag{6.2}$$

$S^{n-1}(r)$ 是半徑等於 r 之 n 維球 $B_n(r)$ 之表面積, 則由均勻性 (homogeneity) 可得

$$|\partial B_n(r)| = S^{n-1}(r) = r^{n-1}S^{n-1}(1) = r^{n-1}\omega_n. \tag{6.3}$$

其次 $V_n(r)$ 代表半徑等於 r 之 n 維球 $B_n(r)$ 的體積:

$$|B_n(r)| = V_n(r) = r^nV_n(1) = \frac{r^n}{n}\omega_n. \tag{6.4}$$

比較 (6.3), (6.4) 兩式得知

$$V_n'(r) = S^{n-1}(r), \qquad \text{(球體積對半徑的微分等於表面積!)}. \tag{6.5}$$

正是這個緣故我們以 $\partial\Omega$ 表示 Ω 之邊界, 這裡 ∂ 是有微分的意義。藉由 (6.5) 這個關係式與高斯積分可以得到 n 維球之體積與表面積, 或者先推導出 $V_n(1)$ 與 $V_{n-1}(1)$ 之遞迴關係, 此時 Γ-函數與 Beta-函數自然而然會出現。總之 n 維球體積與表面積的本質就是 Gamma 與 Beta 函數。我強烈鼓勵讀者一生至少要算過一次, 其實連大學教授少說也有一半不曾算過, 有的甚至是不會算。

仿 (1.5) 的想法可以將 (1.6) 推廣爲三維空間的等周長不等式, 這是 H. Schwarz (1843 ∼1921) 的貢獻

$$\begin{gathered}|\partial\Omega| = S^2(r) = 4\pi r^2 \quad\Longrightarrow\quad |\Omega| \le V_3(r) = \frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{|\partial\Omega|}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}},\\ 36\pi|\Omega|^2 \le |\partial\Omega|^3, \qquad (\mathrm{L}^3)^2 = (\mathrm{L}^2)^3.\end{gathered} \tag{6.6}$$

同理可推論 n 維空間的等周長不等式, 這是 E. Schmidt (1876~1959) 的貢獻

$$\begin{aligned}|\partial\Omega| = S^{n-1}(r) = \omega_n r^{n-1} \quad &\Longrightarrow \quad |\Omega| \le V_n(r) = \frac{\omega_n}{n} r^n = \frac{\omega_n}{n}\left(\frac{|\partial\Omega|}{\omega_n}\right)^{\frac{n}{n-1}}, \\ n^{n-1}\omega_n|\Omega|^{n-1} \le |\partial\Omega|^n, \qquad &(\mathrm{L}^n)^{n-1} = (\mathrm{L}^{n-1})^n. \end{aligned} \tag{6.7}$$

定理 6.1 (**等周長不等式: 高維空間**): 已知 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一有界區域, 邊界爲 $\partial\Omega$, Ω 之體積爲 $|\Omega|$、表面積爲 $|\partial\Omega|$, 則體積 $|\Omega|$ 與表面積 $|\partial\Omega|$ 滿足關係式

$$|\Omega|^{\frac{n-1}{n}} \le C_n|\partial\Omega|, \qquad C_n = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{6.8}$$

而且等式成立的話若且唯若 Ω 是一個球。

我們先介紹特徵函數 (characteristic function)

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases} \tag{6.9}$$

這是研究 Lebesgue 積分的基本函數:

特徵函數 $\Longrightarrow$ 單純函數(simple function) $\Longrightarrow$ 可積函數。

此時刻意將體積與表面積表示爲特徵函數的積分

$$|\Omega|^{\frac{n-1}{n}} \to \|\chi_\Omega\|_{\frac{n}{n-1}}, \qquad |\partial\Omega| \to \|\nabla\chi_\Omega\|_1,$$

所以等周長不等式 (6.8) 本質上就是一個積分不等式

$$\|\chi_\Omega\|_{\frac{n}{n-1}} \le C_n\|\nabla\chi_\Omega\|_1, \qquad \forall\Omega. \tag{6.10}$$

因爲任意 (可測集合) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 都成立, 所以對於可積分的函數 f 也成立, 也就是可以將 (6.10) 中的特徵函數 χ_Ω 換爲 f:[7]

$$\|f\|_{\frac{n}{n-1}} \le C\|\nabla f\|_1 \qquad (\chi_\Omega \to f); \tag{6.11}$$

這就是大名鼎鼎的 Sobolev 不等式 ($p = 1$ 的情形)。

[7] 這裡的討論方式就是數學分析的稠密性論證 (density argument);《一個可積函數差不多就是一個特徵函數》。我在台大讀碩士班的時候有一次與指導教授張秋俊老師聊天, 他告訴我在芝加哥大學讀書時曾上過 A. Zygmund (1900~1992) 的實變 (Real Analysis) 的課。任何一個定理 Zygmund 都會說我們先看看《特徵函數》對不對? 如果對了那麼就對了, 細節就留給學生。『與師一席談, 勝讀十年書。』那次聊天好比使徒保羅在往大馬士革的路上被光照的經驗, 之後我就理解甚麼是實變! 甚麼是分析。

定理 6.2 (Sobolev **不等式: 全空間**): 已知 $n \geq 2$、$1 \leq p < n$, 則 $\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{p^*} \leq C\|\nabla f\|_p, \qquad \frac{n}{p^*} = \frac{n}{p} - 1, \tag{6.12}$$

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n), \qquad p^* = \frac{np}{n-p}. \tag{6.13}$$

這就是 S. L. Sobolev (1938), L. Nirenberg (1959) 與 E. Gagliardo (1958) 的貢獻。實際上 Sobolev 只證明了 $p > 1$ 的情形, 而 $p = 1$ 則是 Nirenberg 與 Gagliardo 的工作。由 $p = 1$ 的結果可推得 $p > 1$ 的情形 (請參考 [4, 11])。另外 $p = 1$ 的 Sobolev 不等式就是等周長不等式

等周長不等式等價於 Sobolev 不等式。

事實上等周長不等式還給的更多, 它告訴我們最佳的情形: 等號成立時則有界區域 Ω 必定是一個球(或圓)。這裡引發一個有趣的問題: 爲何 19 世紀甚至 20 世紀初期的幾何學家們沒有從等周長不等式得出 Sobolev 不等式? 反而要等到 20 世紀由於理論物理的蓬勃發展, 特別是改變人類思維的量子力學促進偏微分方程之研究。最早是 S. L. Sobolev 利用 Riesz 位勢 (Riesz potential), 而後 L. Nirenberg 與 E. Gagliardo 藉由微積分基本定理得到現在耳熟能詳的 Sobolev 不等式。我想其中一個主要原因是 H. Lebesgue (1875∼1941) 的測度與積分理論是在 1904 年才出現, 另外幾何學家對於不等式並不像分析學家那麼敏感。分析本質上是不等式:

$$\text{分析} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{極限} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{逼近} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{不等式。}$$

註解:

(i) Sobolev 不等式 (6.12) 的指數 (p, p^*) 必須滿足量綱關係 $\frac{n}{p^*} = \frac{n}{p} - 1$, 這是不需要死背的。$L^p$ 空間的量綱是 $\frac{n}{p}$, 微分一次量綱少一次, 然後根據量綱平衡的原則可得 (6.12) 的量綱關係

$$\|f\|_{p^*} \to \frac{n}{p^*}, \quad \|\nabla f\|_p \to \frac{n}{p} - 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{n}{p^*} = \frac{n}{p} - 1.$$

有興趣的讀者可參考 [4, 8, 11, 13]。

(ii) Sobolev 不等式在偏微分方程的應用是先考慮方程的弱解, 也就是先設法利用泛函分析的方法證明方程式屬於 Sobolev 空間 $W^{m+j,p}(\Omega)$ 之某種意義下的弱解(廣義解) 的存在性之後, 再利用 Sobolev 不等式

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\bar{\Omega})$$

斷定弱解是 $C^j(\bar{\Omega})$ 的函數, 如果 j 比方程式的階數高, 那麼我們就可以得到古典意義下解的存在性。

(iii) 真正嚴格證明 Sobolev 不等式與等周長不等式是等價的需要共面積公式 (co-area formula), 有興趣的讀者可以參考 [8, 11]。

(iv) 在數學中特徵(characteristic) 這個名詞出現的非常頻繁, 線性代數、微分方程、機率、實變 ⋯ 到處都看的見, 根本就是氾濫成災, 讀者要弄清楚自己是身在何處。但是 Character 原文是希臘文, 有兩個意思: 一個是印章; 另一個是指 印章在臘上所捺印下來的印痕, 而印痕與印章是完全一致的。聖經裡面說耶穌是上帝的真像 這個字就是 character。如果從希臘文的角度來看特徵值 (characteristic value) 這個名詞是取的非常精確而且深具文學涵養。

例題 6.3: 已知正實數 $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, 證明

$$(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3)^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^3, \tag{6.14}$$

或

$$(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3)^{\frac{1}{3}} \le (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

解: 我們將利用 (6.6) 來證明。假設有 n 個半徑等於 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的球, 則其表面積與體積爲

$$|\partial\Omega| = 4\pi x_1^2 + 4\pi x_2^2 + \cdots 4\pi x_n^2 = \sum_{i=1}^n 4\pi x_i^2,$$
$$|\Omega| = \frac{4}{3}\pi x_1^3 + \frac{4}{3}\pi x_2^3 + \cdots \frac{4}{3}\pi x_n^3 = \sum_{i=1}^n \frac{4}{3}\pi x_i^3.$$

再根據等周長不等式 (6.6) 得

$$36\pi|\Omega|^2 \le |\partial\Omega|^3 \quad\Longrightarrow\quad 36\pi\Big(\sum_{i=1}^n \frac{4}{3}\pi x_i^3\Big)^2 \le \Big(\sum_{i=1}^n 4\pi x_i^2\Big)^3;$$

這就是 (6.14)。 □

註解:

(i) 等周長不等式 (或 Sobolev 不等式) 也提供我們關於體積的增長情形: 首先球體積對半徑 r 的微分等於球之表面積

$$\frac{d}{dr}V_n(r) = |\partial V_n(r)| = S^{n-1}(r).$$

令 $\Omega = V_n(r)$ 則等周長不等式 (6.7) 是一個微分不等式

$$\frac{d}{dr}V_n(r) \ge C_n^{-1}\Big(V_n(r)\Big)^{(n-1)/n} \quad\Longrightarrow\quad V_n(r) \ge \frac{\omega_n}{n}r^n. \tag{6.15}$$

換句話說, Sobolev 不等式 (或等周長不等式) 等價於 $V_n(r)$ 之體積成長條件 $V_n(r) \geq cr^n$。

誌謝: 本文是作者於 2009 年暑假在中研院數學所《數學名題及其故事》一系列演講之一, 在此特別謝謝李志豪教授的鼓勵與安排。

參考資料

1. C. Bandle, *Isoperimetric Inequalities and Applications*, Piman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1980.

   這本書 20 年前就印了但一直束之高閣, 主要是與自己的研究還有點距離。但我個人對於等周長不等式始終保持一定的興趣, 再加上此書的書寫方式非常直觀且友善, 尤其第二章關於 Symmetrizations 是我極欲理解的主題。這是重要的方法, 有興趣的讀者應該好好的花功夫, 我確信會有豐富的回報。本書作者另外寫了一篇文章介紹等周問題:《*Dido's Problem and Its Impact on Modern Mathematics*》Notices of AMS, Vol. 64, No. 9, P, 980-984, 2017.

2. I. Chavel, *Isoperimetric Inequalities, Differential Geometric and Analytic Perspectives*, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 145, Cambridge University Press, 2001.
3. E. Hairer and G. Wanner, Analysis by Its History, UTM *Reading in Mathematics*, Springer-Verlag, 1995.

   早期的數學書籍傾向於形式化, 它們花在形式化證明上的篇幅過多, 以至於對於啟發與思考是沒有幫助的。Springer-Verlag 這一套《*Reading in Mathematics*》給大學部學生數學教科書非常優雅簡練, 如果妳/你不喜歡定義、定理、證明這種無血、無淚、沒有感情之三段式論證的書, 那麼我肯定妳/你會喜歡這一套叢書。第一次看到就被書名所吸引, 經過詳細閱讀越來越喜歡, 之後這本書就一直是我教學與寫作最重要的參考書。

4. D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd dition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 224, Springer-Verlag, 1983.
5. O. Hijab, *Introduction to Calculus and Classical Analysis*, UTM, Springer-Verlag, 2007.

   第一次看到此書是被第五章的應用所吸引: 從 Γ-函數到 Euler-Maclaurin 公式, 這些都是一般分析的書所沒有的, 這個欠缺猶如生命的斷裂, 使人誤以爲 *分析* 只是 ϵ-δ 的技巧訓練。第五章有九個章節, 每一節都可單獨作爲一個主題在討論班探討, 我確信這可以增長對於分析的認識。

6. R. Courant and H. Robbin, *What is Mathematics*? An Elementary Approach to Ideas and Methods, 2nd edition, with additional material by Ian Stewart, Oxford University Press, London, 1996. 中譯本:《數學是什麼 (上, 下)》容士毅譯, 左岸文化出版, 2011。

   只要看到 R. 庫朗 (R. Courant; 1888-1972) 的書都應該收藏。本書寫作的背景正值新數學在美國興盛之時, 數學越來越形式主義, 數學教學竟演變爲空洞的解題訓練, 爲了抵抗這股逆流並有感於教師少得可憐的熱情, 還有大量枯燥乏味、商業氣息十足的教科書和無視智力的教學風氣, 作者特別寫了這本只需中學程度即可看懂的書來告訴人們《*數學是*

什麼?》 雖然這本書可以看爲通俗數學的書, 但我個人到現在仍不時拿起閱讀並嚐試體會這位師祖的數學思想。

7. H. Dym and H. P. Mckean, *Fourier series and Integrals, Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 14, Academic Press, New York and London, 1972.
8. W. Maz'ya, *Sobolev Spaces, Springer Series in Soviet Mathematics*, Springer, 1985.
9. George Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning* [Two Volumes in One], Martino Fine Books, 2014. 中譯本:《數學與猜想》 九章出版。

   我中學時出於興趣就看過美籍匈亞利數學家 Polya (1887∼1985) 的《如何解題》, 但一直沒有深刻印象, 除了數學成熟度之外, 主要是一般的中文翻譯實在是令人無法指敎, 兩下子就把這股熱情給澆滅了。坦白而言, 最好是有志同道合的死黨一起組織讀書會比較能夠維持學習的熱情。Polya 也有其它解題的書而且還有一定的難度, 有空不妨拿幾個題目折磨一下自己, 無形間妳/你會成長不少。這本書的等周長不等式寫得非常詳細, 我覺得是整本書最好的兩部分之一, 另一部分是 Euler 著名的公式

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

10. R. Osserman, The Isoperimetric Inequality, *Bulletin of the Americian Mathematical Society*, Vol. 84, No. 6, 1182–1238, 1978.

   這篇文章幾乎完整地評論了等周長不等式, 對於這個問題有興趣的讀者應該好好地看一看。我曾經要大三的學生閱讀這篇文章並完成一份相當有份量的暑期數學研究報告。Osserman 是微分幾何專家, 我曾經看過他最小曲面的書《*A survey of minimal surface, Dover, 1986.*》另外天下文化出版的《宇宙的詩篇》是他在加州理工學院 (California Institute of Technology, 縮寫:Caltech) 通識課的教材, 談到幾何學與天文學的關係。這是我最喜歡的科普書籍之一, 讀了 N 遍每次總是感慨萬千, 人家的通識課是由大師級的人物擔當! 反觀我們的大人物瞧不起這種課也不屑去上 (可能也沒有能力)。學生也只是把它當成營養學分, 缺課、睡覺是常態。有一次與陳宜良教授聊天時他告訴我加州理工學院的學生至少要修 1/3 人文方面的課, 大學是要教育出有靈魂的人, 而不是訓練出有技術無文化、有知識無思想的齒輪 (cog), 隨時可以被取代、更換。加州理工學院的校訓是出自聖經的一段話意義深遠:

   The truth shall make you free. (真理必叫你們得以自由)

11. L. Saloff-Coste, *Aspects of Sobolev-Type Inequalities*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 289, Cambridge University Press, 2002.
12. 林琦焜。Green 定理與應用。數學傳播季刊, 21(4), 25-41, 1997。
13. 林琦焜。Riesz 位勢與 Sobolev 不等式。國立交通大學出版社, 2008。
14. 林琦焜。從量綱看世界。數學傳播季刊, 33(3), 13–27, 2009。
15. 康明昌。從農夫到數學家。數學傳播季刊, 10(1), 8–13, 1986。

—本文作者爲國立交通大學應用數學系退休教授—