

## 有朋自遠方來——專訪

# Maria Chudnovsky 教授



策 劃：劉太平

訪 問：劉太平、李國偉

時 間：民國 106 年 11 月 13 日

地 點：中央研究院數學研究所

整 理：編輯室、黃馨霈

Maria Chudnovsky 教授 1977 年 1 月 6 日出生於俄國聖比得堡，後移居以色列。於 2003 年普林斯頓大學得博士學位。任教普林斯頓大學，哥倫比亞大學，自 2015 年任普林斯頓大學教授。2012 年獲頒 MacArthur Fellow。在本訪談中，可以感受到 Chudnovsky 教授對組合學的熱誠，並可以領略其深刻的見解。

劉太平 (以下簡稱「劉」): 謝謝妳遠道而來。國偉提醒我，妳在俄羅斯待到十三歲。

Chudnovsky (以下簡稱「C」): 確實如此。

劉: 那是人生非常重要的章節，對吧？而今妳在普林斯頓。這整個經歷極其非線性吧？怎麼一路走來的？

C: 我出生於俄羅斯。十三歲時，舉家獲准離開俄羅斯，因此移居以色列；這是好的選擇。因此我在以色列上高中、學習數學。隨後我決定攻讀數學方面的博士學位，申請了心目中最適合做我喜歡的數學的地方。普林斯頓大學收了我，於是我到普林斯頓攻讀博士學位，並在那裡做了三年的博士後。當時我自忖該找份工作，於是轉赴哥倫比亞，在那裡工作了九年，非常愉快，之後回到普林斯頓。

劉: 我想知道妳在俄羅斯的時期。妳當時是否對數學感興趣？是否認真看待數學？

C: 在俄羅斯時,我念的是一所特殊的數學學校。那裡的氣氛和文化都非常好。基本上,當時的首要之務是讓自己長於數學。據我所知,學校裡的學生都希望能以數學見長。我在十三歲時想過:如果自己非常幸運,將會一輩子做數學。這個志趣或許根源於那所學校。

李國偉(以下簡稱「李」):妳是經過篩選才進入那所特殊學校?

C: 進一年級時校方會做一些篩選,並不偏重數學,只是一般性的篩選。之後在六年級結束時,我們必須參加一個非常慎重的考試,才能進入七年級,我參加了,也通過了。我記得這是我今生第一個慎重的考試。那是三小時的考試,而我才十二歲。還記得走出考場時,我只想著“這輩子沒這麼累過”。我覺得凡人不可能累成這樣。

李: 考試涵蓋哪些課題?

C: 我不記得了。非常累人。

李: 有幾何問題嗎?

C: 可能。一定有。但我的意思是,老實說,我這麼說只是基於常識,譬如,你可以問十二歲的學生什麼樣的問題? 嗯,有一些幾何問題、一些方程、一些代數。它不像是數學競賽。它考你在學校剛學到的東西,問的盡是些困難的問題。

劉: 更像在測試智商?

C: 不。類似學校的數學測驗,但是非常困難、漫長。它不是標準化的數學測試,也不是數學競賽,就只是一次困難的學校考試。

劉: 俄羅斯是否到處有那種學校?

C: 我不太確定。我想在莫斯科和聖彼得堡可能比較是如此。但我們談論的是 1988 年左右的事。現在如何,我真的不知道。當時如何,其實我也不確定。我知道在聖彼得堡至少還有一所這樣的高中。我認識的那些出身於聖彼得堡的數學家,大都上過我的高中或那所高中。

李: 舉家搬到以色列,是在蘇聯解體之後?

C: 不,是在解體之前的好幾年。我們離開後,蘇聯仍然存在。

劉: 到西方後的頭幾年,妳年紀或許還太小,無法觀察文化衝擊之類的事?

C: 我當然看得出文化差異的存在。我非常渴望學習它們、接納它們。

李: 到以色列後,說的是什麼語言?

C: 我會用希伯來語。

李: 小時候在家學過希伯來語嗎?

C: 不。移居前, 我拿到一本希伯來語的自學書, 夏天時開始自學; 到以色列時, 已經會說一些。以色列有來自各地的衆多移民, 因此提供很好的希伯來語學習課程, 所以語言不構成問題。翌年, 基本上我已能將希伯來語運用自如。

劉: 希伯來語不容易學。

C: 實際上它是非常簡單的語言。它非常非常的數學, 幾乎沒有例外。它有非常明確的規則。例如, 所有動詞可置入一個矩陣, 以兩個屬性為索引值 (index)。矩陣中的位置告訴你如何將動詞結合起來。英文就不搞這種名堂。更有甚者, 語言是由字根構建的, 而創建單字的方式有限。所以, 如果你知道字根, 即使不認識這個詞, 也可以知道它的意涵。實際上, 如果你會數學, 這是一種有趣的語言。

李: 它是從右到左書寫的嗎?

C: 對的, 它是從右到左書寫的。但你會習慣的。書寫時它沒讓母音出現, 其實, 當你閱讀任何語言, 並未確實去讀每一個字母; 看到一個單字時, 你只是瞥它一眼, 猜想它是什麼。希伯來文母音是內置的 (built-in), 沒寫出來。

李: 母音不會出現在印刷品中?

C: 不會。但它們在童書中會出現。

李: 了解。

C: 結果是所有的書都非常薄。與厚書相較, 薄的書讀來心理上愉快些。

劉: 母音的存在其實被清楚暗示著。

C: 是的。就好比閱讀英文故事時, 四處看到“ct”而非“cat”, 但你可以猜出它是什麼。

李: 妳在以色列拿到碩士學位。

C: 沒錯。

李: Aharoni<sup>1</sup> 是妳的指導教授。他用 Menger 定理的某個版本, 完成了無限組合 (infinite combinatorics) 的一些工作。

C: 沒錯。他研究組合學; 著力於 Menger 定理, 也研究過超圖。實際上, 我與他共事時, 研究的是超圖匹配 (hypergraph matchings)。

李: 妳跟著他時, 一直在研究超圖?

C: 是的。當時我沒著手任何其他的事。

李: 他也使用了一些集合論上的方法, 對吧? 像是無限著色 (infinite coloring) 之類的東西。

---

<sup>1</sup>Ron Aharoni (1952~), 以色列數學家, 任教於以色列理工學院, 研究組合學, 並有多本數學教育及數學普及著作。

C: 我想他對無限的東西非常感興趣, 但我與他共事的那幾年, 他暫時放下了無限圖 (infinite graph) 的工作。

李: 據我所知, 他寫了一本書《*Arithmetic for Parents*<sup>2</sup>》。

C: 沒錯。

李: 他曾在小學任教?

C: 我不認為他曾在小學任教過, 但他想...

李: 嘗試一下—

C: 不。他難以接受以色列教數學的方式。他和善、精力充沛, 去和大家談: 不應該這樣做、應該那樣做。他成功了。他們改變了數學的教學方式。我難以相信, 單靠一人可以做出改變。

李: 妳曾參與那個專案計畫嗎?

C: 不, 但他推動計畫的能力令我敬畏。

李: 能否描述一下以色列如何發展離散數學的?

C: 我起步時, 它已卓然有成。它在以色列是個非常強大的領域。我不知道何以致此。

李: Erdős<sup>3</sup> 必定會對此產生重大的影響, 對吧?

C: 確實如此。他造訪過以色列, 且與以色列保持聯繫。你知道現在有本關於 Erdős 的童書嗎?

李: 是的。我聽說過。那是一本漫畫書?

C: 不, 像本童書。有個小男孩。名叫 Paul, 喜歡數字。書裡大篇幅談論他如何與朋友合作做數學。有一張插圖, 畫的是 Erdős 和朋友們圍坐在桌子旁, 其中的每個人都有真人版: 金芳蓉在那裡, Ron Graham<sup>4</sup>在那裡, Béla Bollobás<sup>5</sup> 也在那裡。我的手機有這張圖片; 我會記得拿給你們看。

我在以色列時確實曾遇見 Erdős, 但他沒有看到我。我在兩次會議的兩回演講中見過他。對十七歲的我來說, 那是難以置信的經歷。

李: 我能了解。94 年或稍早, 我去舊金山參加一個會議, 當時 Erdős 竟然在投影片上寫了一些東西; 他通常寫在黑板。會議結束後, 大家理應離開會場時, 我想這些投影片很珍貴, 於是把它們收集起來了。

---

<sup>2</sup>中文譯本《小學算術教什麼, 怎麼教: 家長須知, 也是教師指南》, 由天下文化出版, 譯者為訪談者之一李國偉教授。

<sup>3</sup>Paul Erdős (1913~1996), 匈牙利數學家, 發表論文高達 1525 篇。他四處遊歷, 與當地數學家合作, 曾與 511 人合寫論文。

<sup>4</sup>Ronald Graham (1935~), 出生於美國, 與夫人金芳蓉教授皆為傑出組合學者, 並與 Paul Erdős 為至交。

<sup>5</sup>Béla Bollobás (1943~), 出生於匈牙利, 任教於英國劍橋大學, 研究領域涵蓋泛函分析、滲透理論及圖論。他自幼受 Paul Erdős 啟迪, 與 Paul Erdős 在圖論有重要合作成果。

C: 還保存著?

李: 是啊。

C: 很酷。

李: 這是珍品。妳到普林斯頓後, 立即對完美圖猜想 (perfect graph theorem) 產生興趣?

C: 我到那裡時, 得知 Paul Seymour<sup>6</sup> 正在研究這猜想。我膽大包天, 不懂分寸, 逕自去找他說:「我想與你合作完美圖形猜想的論文, 可以嗎?」。我猜他十分驚訝, 回說:「可以」。

李: 當時他是否已結束了次圖 (graph minors) 的研究計劃?

C: 我想是的。工作早已完成, 但沒寫下來。事實上, 最後一篇論文在幾年前才發表。

李: 第幾篇?

C: 22。

李: 22。好。

C: 當時已不再談論次圖了。我念大學時, 對離散數學產生興趣。想必我曾修過一些很好的課程, 因為當時我已在數學起步, 並且想做數學, 而有些數學對我較有吸引力, 另外一些數學不那麼有吸引力。我最喜歡的是離散數學。我總質疑: 是你的大腦讓你較為擅長某種數學, 或者是你遇到的某些老師讓你喜歡它?

李: 找他之前, 妳修過他的課嗎?

C: Paul 的?

李: Paul 的。

C: 我知道他正在研究圖論。我對圖論略有所知, 也已獲碩士學位。到普林斯頓與 Paul 合作是我的計劃, 他也知道此事。見面之前我們通過信。我終於現身時, 說道:「嗨, 我在這裡, 可以和你一起工作嗎?」

李: 除了 Paul, 普林斯頓大學還有其他人在研究圖論嗎?

C: Benny Sudakov<sup>7</sup>, 他較偏機率。

李: 他已移居瑞士?

C: 是的, 他在瑞士, 之前在加州大學洛杉磯分校待了好幾年。

李: 是否有人提供獎項給強完美圖猜想的解決方案?

---

<sup>6</sup>Paul Seymour (1950~), 出生於英國, 任教於普林斯頓大學, 研究成果涵蓋擬陣、四色定理及完美圖猜想。

<sup>7</sup>Benny Sudakov (1969~), 出生於以色列, 目前任教於 ETH Zurich, 研究 Ramsey 理論、隨機圖、位置博弈。

C: 這實際上是一個很有趣的問題。我經常在演講中談到它。數學家 Gérard Cornuéjols<sup>8</sup>寫了一本價值連城的書<sup>9</sup>。那是一本值 90,000 美元的書, 其中包含 18 個問題; 每道問題的解決方案都值 5000 美元。

李: 真的? 那本書未經公開嗎?

C: 是的。但你必須在 2020 年之前完成, 所以時間幾近告罄。而 Cornuéjols 指出: 靠解決書中的問題賺錢, 很沒效率。無論如何, 強完美圖形猜想在書裡, 另外還有偏斜分隔猜想 (skew partition conjecture), 而我們證明了兩者。但我們有些掛慮。根據偏斜分隔猜想, 在強完美圖猜想的最小反例不可能發生某些事情。所以, 一旦你證明了強完美圖猜想, 偏斜分隔猜想也跟著解決。問題是: 我們會獲得一個猜想、還是兩個猜想的獎金? 我很高興地報告: 我們得到了兩個猜想的獎金。

劉: 妳對圖論的未來有何看法? 妳想完成哪些工作? 妳想像的畫面是何樣貌?

C: 我希望看到圖論與其他領域建立聯繫, 因為我認為圖論最好能有一些可用的工具。一方面, 感覺上, 你坐下來, 就可以做圖論, 不需要學習多年。你需要學習些手法、技巧, 但不需要學習很多背景知識。這很有趣, 也很好。但另一方面, 我認為所有容易的問題已經都被解決了。現在許多圖論的論文技術上非常、非常繁複, 而很好的是, 一些工具或將以某種方式帶來更多—

李: 對理論的某種感覺?

C: 是的。

李: 妳不認為妳的圖結構定理是理論的一部分嗎?

C: 它是的。但很難這麼說: 「我們發展出這結果, 現在你可以用它來做那工作。」我並非... 例如, 我們發展了所有這些定理, 證明了強完美圖形猜想, 而今我們可以改變它們的一部分, 也可以證明其他東西。但下一代學者並不因此而可以說: 我們能用他們所發展的理論來做那工作。

擁有一些這類的東西會很好。譬如, 有一次我在哥倫比亞大學與 David Bayer<sup>10</sup>交談。他有一些藉由代數幾何證明四色定理的想法, 但我不認會奏效。其他人也有過類似的想法, 但截至目前為止, 我認為它們全都不可行; 但是這類的東西可以讓妳和其他領域產生連結。

李: 妳是否著手研究過 Hadwiger 猜想<sup>11</sup>?

---

<sup>8</sup>Gérard Cornuéjols (1850~), 出生於法國, 目前任教於卡內基美隆大學, 研究領域涵蓋組合最佳化及圖論。

<sup>9</sup>Gérard Cornuéjols, *Combinatorial optimizations: Packing and Covering*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Math. 74, 2001.

<sup>10</sup>David Bayer (1955~), 任教於哥倫比亞大學, 在符號計算領域有重要貢獻, 並曾擔任電影《美麗境界》顧問。

<sup>11</sup>Hadwiger猜想: 如果  $k$  點的完全圖不是圖  $G$  的次圖, 則圖  $G$  的著色數至多為  $k$ 。

C: 是的。這是一個美麗的猜想, 我得到一些結果。

李: 一旦它被解決, 對四色定理會有所啟發。

C: 我猜想它要是被解決, 那個證明會用到四色定理。

劉: 我知道四色定理有一個電腦輔助的證明, 是否有不必用到電腦的證明?

C: 沒有一個證明沒用到電腦。

劉: 如妳所述, 妳希望有個工具, 或是發展一個工具。妳心目中必然有個來自數學的其他部分的工具, 有個發展好的工具。

C: 糟糕的是, 並非如此。在數學的其他部分, 似乎總有些一般性的方法, 可用以處理事情。我不很知道, 也許我搞錯了, 可能它們不存在。我想我的意思是... 例如, 當我與 Ron Aharoni 合作時, 使用了拓樸方法。面對一個圖論問題、或超圖問題時, 你把它轉譯成爲單純複形 (simplicial complexes) 的問題。而單純複形的理論已廣爲人知, 所以你可以逕自使用同調性等等, 推斷出組合問題的結論。對這些事例, 你可以說: 「此物似彼物, 因爲它實際上是某種更一般情況的特殊場景...」。

劉: 傑出的調和分析學者 Lennart Carleson<sup>12</sup>曾說: 他不訴諸一般理論、一般工具, 而是把問題轉化, 使其核心的部份是一個組合問題, 而後再好好計算出這個組合問題。

C: 我必須說, 雖然我認爲持有工具是件好事, 但我的工作完全不需要工具。打從開頭, 你就可以自行發展所需的工具來解決某個問題, 而後轉到下一個問題... 我的意思是... 不完全正確地說, 一些想法遷移 (transfer) 了, 但或許這能用別種方式講得更確切。它未必是來自數學其他部分的工具。我們有了所有這些想法, 而後教導我們的學生, 好讓他們了解它們。若以某種方式使它們成爲集大成者, 會很美好。那麼你可以直接引用一些東西, 而非做調整, 亦即, 援用基本上存在的理論後, 再做調整, 使其適用於另一種情況。

李: 因爲我們的雜誌是供一般讀者閱讀, 所以想請妳講解一下完美圖的基本定義, 也請談談強完美圖猜想, 好幫助讀者。

C: 圖論中有「圖著色」的概念, 意味著: 爲頂點指定顏色, 使相鄰頂點有不同的顏色。使此種配置成爲可能的最小顏色數即爲圖的「著色數 (chromatic number)」。著色數有明顯的下界, 是即頂點兩兩相鄰的那些子集之頂點數量最大值; 這第二個參數被稱爲圖的「團數 (clique number)」。首要事實是, 著色數不小於團數, 但另一方面, 著色數並無取決於團數的上界, 團數爲 2 的圖可以有任意大的著色數。因此問題變成: 何時著色數的上界會是團數的函數? 第一步是去了解: 團數和著色數何時相等? 這需要更多技巧; 而如果兩個數字相等, 基本上

---

<sup>12</sup>Lennart Carleson(1928~), 瑞典數學家, 在調和分析 and 動力系統領域, 解決諸多懸宕多年的難題, 做出開創性的深刻貢獻。他曾於 1992 年獲 Wolf 獎, 2006 年獲 Abel 獎。

圖形是「完美的」。

有一個猜想，由法國數學家 Claude Berge<sup>13</sup>提出；它陳述完美圖的結構特徵，列出所有不完美的最小圖 (minimal graph)，懸宕 40 年後，由 Robin Thomas<sup>14</sup>，Neil Robertson<sup>15</sup>，Paul Seymour 和我提出證明，是即強完美圖猜想<sup>16</sup>。

李：妳見過 Berge 嗎？

C：未曾見過，失之交臂。我們證出定理時，他已病危臨終。我們不確定他是否知道問題已得解。他有被告知，但不清楚他是否還能夠理解。

李：我在菲律賓見過他一次。那是 91 年左右的會議，我去參加了，見他在菲律賓受到熱烈歡迎。他當時收集了人類學方面各式各樣的物品。

C：沒錯。他必定是個非常有趣的人。很遺憾，我沒能見他一面。

李：證明強完美圖定理之後，妳發展了其他面向的結構圖論 (structural graph theory)，對吧？

C：是的。我們致力於解決強完美圖猜想；有個問題是：如何設計有效演算法來測試各個圖是否完美？我們團隊發現了這種演算法，解決了這問題。但從某種意義上說，完美圖尚未搞定。一個概括性的問題是：「如何構建最具一般性的完美圖？」。我們不知道答案。強完美圖定理的證明，是從那個方向起步，但當我們了解夠多，足以推導出強完美圖猜想時，我們就此停步，因為不知何去何從。這仍是一個非常有趣的未解問題。

我會在明天的演講中談及此事。當時值 2002 年，我想藉由導出子圖 (induced subgraph) 來描述完美圖的結構特徵。如我之前所述，這個猜想其實是在問：最小非完美圖是何樣貌。而要稱它為最小，你需要先訂好一個大小次序。「身為導出子圖」是一個你想得到的包含關係。我迄今一直在探究它。

另外還有與排除導出子圖有關的問題。例如，現在有個非常活躍的領域：「完美圖的著色數和團數相同；而若著色數是團數的函數，又會是如何？何時會如此？」該領域已獲諸多進展，我也參與其中。一個問題是：「有什麼其他圖，可排除其為導出子圖的可能性，並可理解其結構？」有一些這類的定理，但似乎太難了。有趣的是，有個「被排除的次圖定理 (excluded minor theorem)」，出現在我的年代之前；我想：無妨，我對世界的貢獻將會是個「被排除的導出子圖定理」。但它總出差錯。或許我可以對小的圖做些什麼，但不能對一般的結構這麼做。我不很清楚它可能是什麼。現在看來，似乎只是需要重新定義，調整期望。對於排除一般導出子圖，也許我們能說些什麼，但不能像排除次圖那樣明確。也許它是一些演算法。

<sup>13</sup>Claude Berge(1926-2002)，法國數學家，是當代圖論的奠基者，曾提出完美圖猜想。

<sup>14</sup>Robin Thomas (1962~)，出生於捷克，任教於喬治亞理工大學，研究領域涵蓋圖論及組合最佳化。

<sup>15</sup>Neil Robertson (1938~)，出生於加拿大，為俄亥俄州州立大學榮譽退休教授，研究拓撲圖論。

<sup>16</sup>強完美圖猜想：圖不為完美圖，若且唯若包含頂點數目為大於或等於 5 的奇數的 odd hole 或 odd antihole。



李: 請妳補充一下, 完美圖何以重要?

C: 完美圖何以重要? 平心而論, 我認為它們之所以重要, 主要是因為 1961 年時 Berge 定義了它們, 而後有數以百萬人致力研究它們, 卻都一無所獲。因此, 2001 年之際, 它們極為重要。數學就是如此。如果它立即被解決, 乏人聽聞它。如果它太難以至於一籌莫展, 也會沒沒無聞。但如果人們持續探討它, 則在懸宕了 30 至 40 年之際, 它會突然重要起來。它與各種事物有聯繫。它推廣了許多當時廣為人知的圖論結果。它與組合最佳化 (combinatorial optimization) 相關。我可以講一些它如何與其他事物產生聯繫的故事, 但我認為它之所以成為重要定理, 真正原因是這麼多人試圖解決它。它很漂亮。基本上它說: 世界不混亂, 世界是美麗的, 因為這個很好的性質只有兩個障礙。再一次地, 這就是數學。它不是渾沌的, 是有這類結構的。

李: 妳發展了無爪圖 (claw-free graphs) 和所謂的無牛圖 (bull-free graphs) 的結構定理?

C: 是的。無牛圖, 對的。

李: 這兩種圖何以重要?

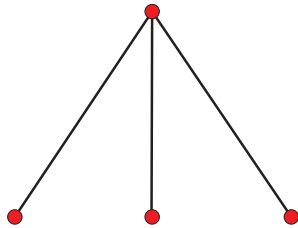
C: 我試著回溯。對無牛圖及無爪圖而言, 有多種最佳化問題可以在多項式時間內解決, 但一般而言, 這些問題是 NP-complete。你總好奇, 何以致之? 何以問題有時會變得如此簡單? 或許是因為存在一些深層的結構。也許開發演算法的人並未理解此結構, 但這些演算法之所以有效, 是因為存在一個結構。這是一個標準過程; 了解結構之後, 演算法就手到擒來。無爪圖的情形是如此。實際上, 我記得 Bruce Shepherd 總不停地到 Paul Seymour 的辦公室說:「無爪圖, 無爪圖。你應該做無爪圖」。也許還有其他人這麼說, 但我清楚記得 Bruce Shepherd —

李: 無爪圖和完美圖是否有共通的結構?

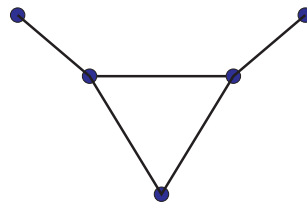
C: 這是一個非常有趣的問題。實際上有種結構同時出現於兩者。有一陣子這看來神奇, 而且我們很清楚要如何使其更具一般性。它似乎類同於次圖理論中的曲面概念。但如今看來它不過是個錯覺。

李: 想請妳先告訴我們無牛圖的定義。牛圖 (bull graphs) 緣何出現?

C: 爪子是一個頂點外加它的三個相鄰頂點, 而這三者互不相連。無爪意味著任意頂點都不會有三個互不相連的鄰點。公牛是一個三角形外加兩個懸掛的頂點。如果你畫得正確, 三角形就是公牛的臉。我正努力回溯自己如何開始研究無牛圖。



爪子 (claw)



牛圖 (bull graph)

無牛或無爪的完美圖都有些已知的定理。它們是出自同一批作者的幾個類似的定理。如果再加以把勁，我們或可完整描述這些圖的結構，甚或圖也不需要是完美的。

容我再多談一下無牛圖。有個很難的結構定理；有這個定理是好事，但我認為基本上它太難用了。它產生了一些非常好的東西。有一個名為「Erdős-Hajnal 猜想」的推測，它說：排除任何導出子圖後，突然會在圖中出現一個非常大的團、或一個非常大的穩定集 (stable set)。團是由兩兩相鄰的頂點所組成，而穩定集的成員是互不相鄰的頂點。對很少數的圖來說，這個猜想已知屬實。我們可以這麼操作：若你知道對某些圖這猜想屬實，可以把它們拼湊在一起，從而得知對更大的圖這猜想也屬實。但是，談到質圖 (prime graphs)，姑不論其確切定義，你無法藉由上述操作得到它，因此對它知之甚少。已知的這類圖中，最重要的是牛圖。我想，在我對無牛圖的研究中，這可能是最漂亮的部分。絕對是最漂亮的部分，也是最重要的部分。它好極了，是一篇大約 15 頁的論文，其中的一切都神奇地美好。

李：但妳的圖結構定理的證明很長。

C：定理本身就很长。譬如，無爪圖的結構定理說的是，你可用某種方式粘合基本圖形（名為條帶 (strips)）來獲得所有無爪圖。有 15 種條帶；令人驚訝的是，有 15 種而非無限多種。

李：對。

C：如你所知，這些定理值得寫下、發表。但定理的敘述長達五頁，因為你必須描述 15 種條帶。

劉：普林斯頓有頗具規模的群組在研究有限數學 (finite math)，對吧？

C：對，這是做離散數學的好地方。我們有資深人員、資淺人員，人員流動不息。另外還有學生。這是一個完美的地方。

劉：美國還有哪些地方在做有限數學？

C：卡內基美隆大學，聖地亞哥。我是指普林斯頓、卡內基美隆大學、史坦福、加州大學聖地亞哥分校、加州大學洛杉磯分校。

李：麻省理工學院？

C：麻省理工學院。還有哪裡？有幾處，伊利諾大學香檳分校，可能還有其他的地方，我忘了。

劉: 我總有個模糊的印象: 對電腦科學來說, 有限數學極其重要; 它們密切相關。是這樣嗎?

C: 我認爲這是因爲我們是從演算法的面向來看, 而兩者都對演算法感興趣。我所處理的一組問題與複雜性相關, 是要設計有效演算法。排除一個導出子圖後, 我們希望以多項式時間的演算法來爲圖形著三色。一般來說, 著三色是 NP-complete 問題, 但排除一些導出子圖之後, 會成爲多項式時間的問題。而之所以會有多項式時間算法, 一個原因是: 所有障礙都是有限的。再說一次, 如果世界是美好的, 情況會是如此。但世界不很美好; 有時障礙的數量無限, 可是有效演算法仍然存在。我們和合作群組曾著手設計有效演算法, 藉由它完成一些工作。而後我們開始考慮有限的障礙; 對身爲數學家的我來說, 這是一個微妙很多的好問題。我們確切發現了障礙數量有限的所有情況, 將成果投稿到電腦科學的會議。他們拒絕了我們的論文, 說道:「遺憾的是, 這只談論了障礙的數量, 並未探討演算法的複雜性。」從他們的角度, 我確知文章看起來像什麼。從我的角度來看, 問題有趣而基本。

李: 妳還隸屬應用和計算數學的學程 (PACM, Program of Applied and Computational Mathematics)。這是什麼性質的學程?

C: 普林斯頓有此成規: 做離散數學的人要同時隸屬數學系和 PACM。

李: 這並非一個系?

C: 不是系, 是一個應用和計算數學的學程。

李: 妳曾和工學院的人共事過?

C: 我在哥倫比亞大學時曾如此。在哥倫比亞大學時, 我隸屬工學院, 和電機工程師有些聯名論文。我曾和電腦科學系的某位人士進行過諸多合作, 我們共有的, 不僅是聯合論文, 還有一名學生。這是身在工學院的有趣部分。人們會敲我的門, 問些我能夠回答的問題。

李: 劉俊宏博士是妳的團隊成員嗎?

C: 是的。

李: 妳正與他合作?

C: 是的, 我們合寫了一篇論文

李: 他畢業於台灣大學。

C: 沒錯。他要我來造訪此地。我說:「俊宏, 我收到台灣的邀請函, 這是什麼?」他說:「我不知道它是什麼, 但妳去就對了」

李: 他很優秀。

C: 他非常優秀、非常優秀。

李: 他是張鎮華的碩士生, 曾去喬治亞理工學院, 對吧?

C: 沒錯。他在那裡拿到博士學位。

李: 指導教授是 Thomas。

劉: 妳目前著手於什麼問題?

C: 我正著手於幾件事。我正在研究與 Erdős-Hajnal 猜想相關的問題; 該猜想說, 排除一個導出子圖之後, 會得到一個大的團或一個大的穩定集。我正在處理「著色數以團數的函數為上界」的相關問題。我也正在研究下述問題: 「需要排除什麼, 才能使著色問題成為多項式時間?」這問題幾乎解決了, 不是我的成果, 而是眾人之功。基本上, 已確知其是否為多項式時間的情況, 幾乎都是非多項式時間。但仍殘存一些你還想嘗試排除的圖。我正在研究這個問題。它很有趣。某種角度看來, 這是一個具一般性的問題, 但剩下能做的東西不多。這是一個有趣的工作方向。

李: 這是個大問題, 對吧? 一旦完成了, 會是個重大結果。

C: 希望如此。

劉: 前些日子, 一位名叫 Nalini Joshi<sup>17</sup>的澳洲女性數學家來此地參加性別差距 (gender gap) 會議。對妳而言, 是否存在性別差距?

C: 容我講個故事。因為我在以色列長大, 所以必須服兵役。從軍首日, 我去問我的上司: 「我想在大學修課, 可以在週四晚上遲到晚退嗎?」我想他過於震驚, 回答: 「好的」。後來得知, 事實上這麼做是可以的, 但前提是你已經在那裡待了若干年。幸運的是我沒去查看規則。不過分關注你該做什麼、不該做什麼, 是饒有助益的。

李: 或許可以這麼說: 沒有感受到性別差距的人, 就能安然無恙。

C: 我不是很想談這個, 因為我認為事情並非如此簡單。

劉: 我了解。

C: 大膽行事後, 會遭逢相應的回擊。盡力推進是有益的, 但另一方面, 如你所知—

劉: 我們不要假裝這不存在。因為它存在。

C: 固然不該以此為藉口而不竭力推進, 但另一方面, 世事不盡完美。我很樂意多說一些, 但我不想對性別差距以偏概全。這很複雜, 數學相形容易 (easy)。「容易」或許不是正確用詞, 該說數學比較「單純 (simple)」。

劉: 對身屬多數族群的人來說, 聲稱可以感受到少數族群的痛苦時, 往往感受不是那麼貼切吧?

---

<sup>17</sup>Nalini Joshi, 生於緬甸, 任教於澳洲雪梨大學, 研究可積系統, 2018年七月當選國際數學聯盟副主席。

C: 嗯, 你可以意識到的。感受痛苦與試圖減少他人痛苦, 兩者有所不同。要成爲獸醫, 不需要先成爲猴子。並非每件都需要切身體驗。

李: 國際數學聯盟與國際化學聯盟協力, 贊助調查性別差距。這個專案計畫由國立台灣師範大學的一位女教授主持, 今年剛舉行了工作會議。

劉: 這就是 Joshi 來訪的原因。

李: 這就是她來訪的原因。

劉: 哪種文化有較大的性別差距, 並不很清楚。

C: 我同意。

劉: 譬如, 台灣存在性別差距, 但在某些方面, 我認爲差距比美國小?

C: 我的旅遊指南是這麼說的。

劉: 好好享受在這裡的時光及故宮之旅。

C: 好主意。那是我的計劃。

劉: 謝謝。

C: 非常謝謝。

—本文訪問者劉太平任職中央研究院數學研究所, 李國偉任職中央研究院數學研究所, 整理者黃馨霈訪談時爲中央研究院數學研究所助理—