# 圓冪和圓系

何景國

現行高中教材第四册討論「直線系」，但「圓系」方面較少提及。本文主要目的是藉著課本第三册中向量內積的技巧來介紹「圓冪」的意義；並分析平面解析幾何上的「圓系」及其一些性質。實際上，這樣子處理問題特點是簡捷，易於了解與思考。同時更能融會貫通圓系的代數形式及幾何意義。

## 一、圓　冪

現在來介紹圓冪的概念。

首先在平面上取一直角座標系$S_0=(\mathbf{O};\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$。給定一圓

$$K: f(x,y)=x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

及一固定點 $M(\alpha,\beta)$。設一直線$L$通過點$M$且交圓$K$於兩點$A,B$時，我們考慮兩向量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$ 的內積。（見圖一）

由於

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A})\cdot(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega B})$$

其中$\Omega$爲$K$的圓心。設 $B'$ 爲點$B$對$\Omega$的對稱點。我們將上式寫成:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}&=(M\Omega+\Omega A)\cdot(M\Omega-\Omega B')\\&=|\overrightarrow{M\Omega}|^2-|\overrightarrow{\Omega A}|^2\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}&=(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2-(a^2+b^2-c)\\&=\alpha^2+\beta^2-2a\alpha-2b\beta+c\end{aligned}$$

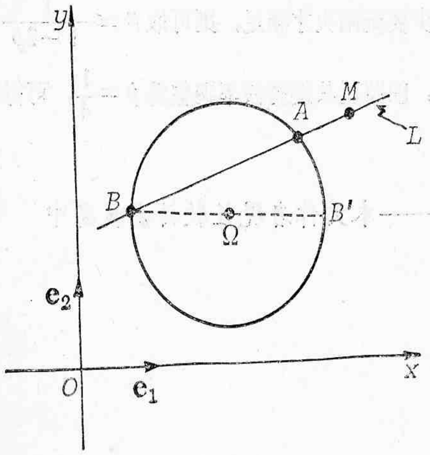



圖　一

爲求簡便，向量內積 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 以符號 $\mathscr{P}(M;K)$ 表之，並稱之爲點$M$對於圓$K$的圓冪，因此可得:

$$\mathscr{P}(M;K)=\alpha^2+\beta^2-2a\alpha-2b\beta+c=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$$

上式說明了點$M$對於圓$K$的圓冪計算公式。

**性質**

(1)點$M$在圓$K$外$\Longleftrightarrow\mathscr{P}(M;K)>0$

(2)點$M$在圓$K$上$\Longleftrightarrow\mathscr{P}(M;K)=0$

(3)點$M$在圓$K$內$\Longleftrightarrow\mathscr{P}(M;K)<0$

## 二、共軸圓系

### I. 兩圓的根軸

在直角座標系中，給予兩已知圓心相異的圓。

$$K_1: x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0$$
$$K_2: x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0$$

及平面坐標上任意一點 $M(x_0,y_0)$ 則:

$$\begin{aligned}&\mathscr{P}(M;K_1)-\mathscr{P}(M;K_2)\\&=2(a_2-a_1)x_0+2(b_2-b_1)y_0-(c_2-c_1)\end{aligned}$$

上面式子告訴我們點$M$對於兩圓 $K_1,K_2$ 的圓冪差是一常數。特別地，當這個常數爲零的時候，我們不難得到所有點$M$描出的軌跡圖形是一直線，且其方程式爲:

$$(a_2-a_1)x+(b_2-b_1)y+(c_1-c_2)/2=0$$

這條直線我們稱之爲兩圓的根軸。並且記成：根軸$\triangle$。我們將$\triangle$寫成集合形式得:

$$\triangle=\{M(x,y)/(a_2-a_1)x+(b_2-b_1)y+\frac{c_1-c_2}{2}=0\}$$

下面是兩圓根軸的一些重要性質。

**性質 1:**

兩圓的根軸必垂直於兩圓的連心線

**證明:**

設兩圓 $K_1, K_2$ 的圓心分別爲 $\Omega_1, \Omega_2$ 且其半徑分別爲 $r_1, r_2$ 若直線△爲兩圓 $K_1, K_2$ 的根軸，則我們可得:

$$\forall M\in\triangle,\ \mathscr{P}(M;K_1)-\mathscr{P}(M;K_2)=0$$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{M\Omega_1}|^2-|\overrightarrow{M\Omega_2}|^2=(r_1^2-r_2^2)=\lambda \text{ (常數)}$$

取兩圓的連線 $\overline{\Omega_1\Omega_2}$ 之中點 $I$ 得:

$$|\overrightarrow{M\Omega_1}|^2-|\overrightarrow{M\Omega_2}|^2=|\overrightarrow{I\Omega_1}-\overrightarrow{IM}|^2-|\overrightarrow{I\Omega_2}-\overrightarrow{IM}|^2=\lambda$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}\overrightarrow{IM}=\lambda$$

**故根軸△與兩圓連心線互相垂直**

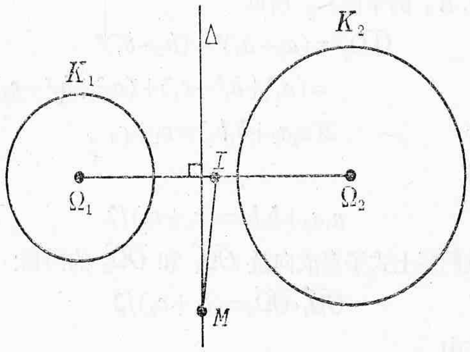



圖 二

**討論:**

(1)若兩圓相交於兩點 $A, B$，則兩圓的根軸△爲通過 $A, B$ 的直線，（見圖三）

(2)若兩圓相交於一點 $H$，則兩圓的根軸△爲通過 $H$ 的兩圓公切線（見圖四）

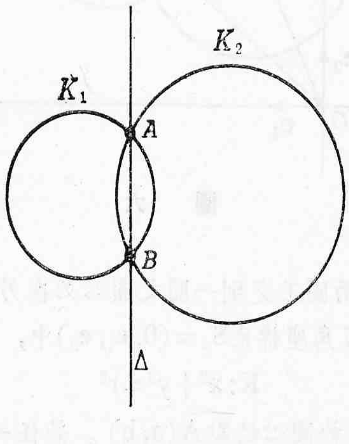



圖 三

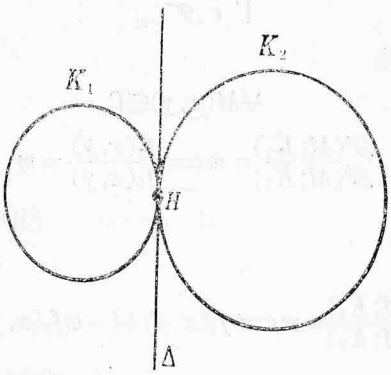



圖 四

(3)若兩圓爲同心圓，則兩圓的根軸是不存在的。

(4)若兩圓爲同一圓，則圓上任一切線皆可其本身的根軸。

(5)若兩圓相離，則兩圓的根軸 △ 必垂直於兩圓的連心線。

設 $\triangle\cap\overline{\Omega_1\Omega_2}=\{H\}$

則

$$2\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}\cdot\overrightarrow{IM}=r_1^2-r_2^2\Rightarrow\overline{IH}=\left|\frac{r_1^2-r_2^2}{2\cdot\overline{\Omega_1\Omega_2}}\right|$$

（見圖五）

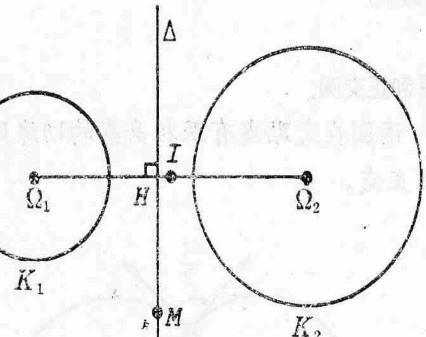



圖 五

上式說明了垂足 $H$ 與連心線中點 $I$ 的距離爲一常數值。

**性質 2.** 給予兩個圓:

$$K_1: f_1(x,y)=0 \text{ 與 } K_2: f_2(x,y)=0$$

若

$$\Gamma=\left\{M \,\middle|\, \frac{\mathscr{P}(M;K_1)}{\mathscr{P}(M;K_2)}=M,\ m\epsilon R\right\}$$

及

$$\mathscr{F}_m=\{K|K: f_1(x,y)+mf_2(x,y)=0,\ m\epsilon R\}$$

則

$$\Gamma \in \mathscr{F}_{-m}$$

**證明:** 因爲

$$\forall M(x,y)\in\Gamma,$$

$$\frac{\mathscr{P}(M;K_1)}{\mathscr{P}(M;K_2)}=m\Longleftrightarrow\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}=m$$

(其中$m\in \boldsymbol{R}$)

即

$$\frac{\mathscr{P}(M;K_1)}{\mathscr{P}(M;K_2)}=m\Longleftrightarrow f_1(x,y)+(-mf_2(x,y))=0$$

(其中$-m\in \boldsymbol{R}$)

所以

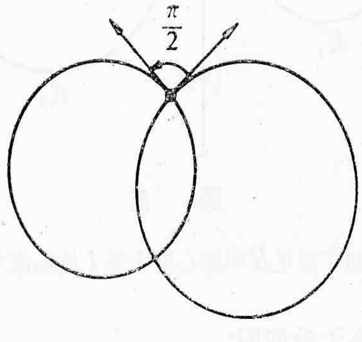
$$\Gamma\in\mathscr{F}_{-m}$$

詳細地說: 在平面直角座標中，給予兩個圓$K_1,K_2$。若平面上點$M$分別對兩圓的圓冪比値爲異於1的正實數時，則點$M$的軌跡圖形爲一個圓。同時，每當比值取定一異於1的正實數時，我們可以得到圓系中的一成員。別特地，當比值爲1的時候，點$M$爲兩圓的根軸；而且在圓系中任意二圓的根軸是原已予兩圓的根軸。

因爲兩圓決定的圓系共有一根軸故稱其爲由兩圓所產生的**共軸圓系**。

## II 圓冪和正交圓:

**定義:** 兩圓在交點處有互相垂直的切線則稱爲兩圓正交。




設兩圓 $K_1,K_2$ 的圓心分別爲 $\Omega_1,\Omega_2$ 及其半徑分別爲 $r_1,r_2$ 則有:

**性質1.**

$$K_1 \text{ 與 } K_2 \text{ 正交}\Longleftrightarrow\mathscr{P}(\Omega_1;K_2)=r_1^2$$

$$K_1 \text{ 與 } K_2 \text{ 正交}\Longleftrightarrow\mathscr{P}(\Omega_2;K_1)=r_2^2$$

**證明:**

因爲 $K_1$ 與 $K_2$ 正交

所以

$$\overline{\Omega_1\Omega_2}^2=r_1^2+r_2^2\Rightarrow\overline{\Omega_1\Omega_2}^2-r_2^2=r_1^2$$

即

$$\mathscr{P}(\Omega_1;K_2)=r_1^2$$

同理可得

$$\mathscr{P}(\Omega_1;K_2)=r_2^2$$

**性質2.** 在直角坐標系$S_o=(0;e_1,e_2)$中，給予兩圓:

$$K_1: x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0$$

$$K_2; x_2+y_2-2a_2x-2b_2y+c_2=0$$

設 $\Omega_1,\Omega_2$ 分別爲兩圓 $K_1,K_2$ 的圓心則

$$K_1 \text{ 與 } K_2 \text{ 正交}\Longleftrightarrow\overrightarrow{O\Omega_1}\cdot\overrightarrow{O\Omega_2}=(c_1+c_2)/2$$

**證明:**

因爲: 兩圓$K_1,K_2$正交$\Longleftrightarrow\overline{\Omega_1\Omega_2}^2=r_1^2+r_2^2$ (其中$r_1,r_2$爲 $K_1,K_2$ 的半徑)。所以

$$\overline{\Omega_1\Omega_2}^2=(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2$$
$$=(a_1^2+b_1^2-c_1)+(a_2^2+b_2^2-c_2)$$

$$\Rightarrow\qquad 2(a_1a_2+b_1b_2)=c_1+c_2$$

或

$$a_1a_2+b_1b_2=(c_1+c_2)/2$$

我們將上式子寫成向量 $\overrightarrow{O\Omega_1}$ 和 $\overrightarrow{O\Omega_2}$ 的內積:

$$\overrightarrow{O\Omega_1}\cdot\overrightarrow{O\Omega_2}=(c_1+c_2)/2$$

其中

$$\Omega_1=(a_1,b_1);\quad \Omega_2=(a_2,b_2)$$

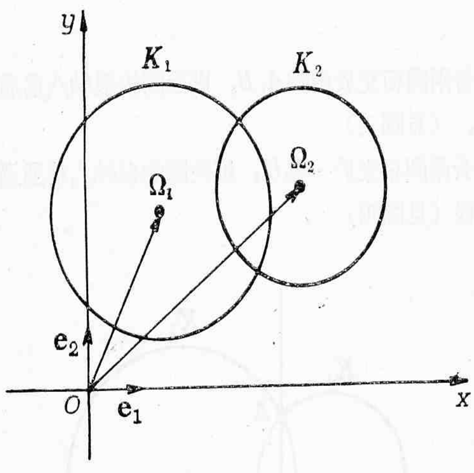



圖 六

**性質3.** 若兩圓正交則一圓之圓心必在另一圓之外。

**性質4.** 在直角座標系$S_o=(0;e_1,e_2)$中，給予一圓K

$$K: x^2+y^2=r^2$$

及一異於圓心的點$A(a,b)$。若任一圓$K^*$通過點A且與圓K正交則圓 $K^*$ 亦通過另一定點:

$B\left(r^2a/(a^2+b^2),\ r^2b/(a^2+b^2)\right)$

證明:

由於正交圓$K$的圓心 $O(0,0)$ 落在圓 $K^*$ 之外，則射線 $\overrightarrow{OA}$ 與圓 $K^*$ 相交於另一點$B$故

$$\exists\lambda\in \boldsymbol{R}\ \ni\ \overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA}=(\lambda a,\lambda b)$$

因爲

$$\mathscr{P}(O;K^*)=r^2\quad(K_1\text{ 與 }K_2\text{ 正交})$$

$$\Rightarrow\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=r^2$$

或

$$\overrightarrow{OA}\cdot(\lambda\overrightarrow{OA})=r^2$$

即

$$\lambda=\frac{r^2}{\overline{OA}^2}=\frac{r^2}{a^2+b^2}$$

所以

$$\overrightarrow{OB}=\left(\frac{r^2a}{a^2+b^2},\frac{r^2b}{a^2+b^2}\right)$$

爲一定向量。

亦即，圓 $K^*$ 通過一定點$B$

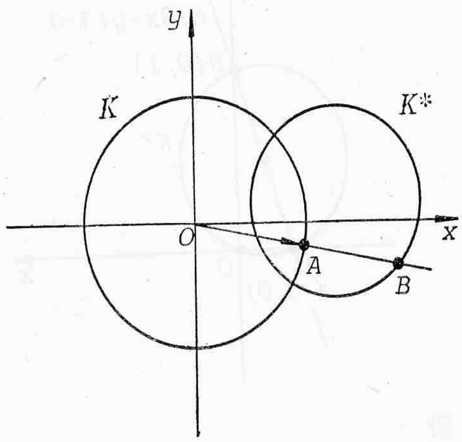



圖　七

### III 共軛的共軸圓系

給予一圓 $K^*$ (見圖八)

$$K^*: f(x,y)=0$$

及一根軸△

$$\triangle: g(x,y)=0$$

與由下面方程式所表示的圓系 $\mathscr{H}_m$，其中每一成員$K$

$$K: f(x,y)+mg(x,y)=0\ (\text{其中 } m\in\boldsymbol{R})$$

亦卽

$$\mathscr{H}_m=\{K\,|\,K: f(x,y)+mg(x,y)=0, m\in\boldsymbol{R}\}$$

設一直線 $\delta$ 通過圓 $K^*$ 的圓心 $\Omega^*$ 且與 △ 垂直於點 $H$ 則

$$K\in\mathscr{H}_m\Longleftrightarrow\mathscr{P}(H;K)=\mathscr{P}(H;K^*)$$

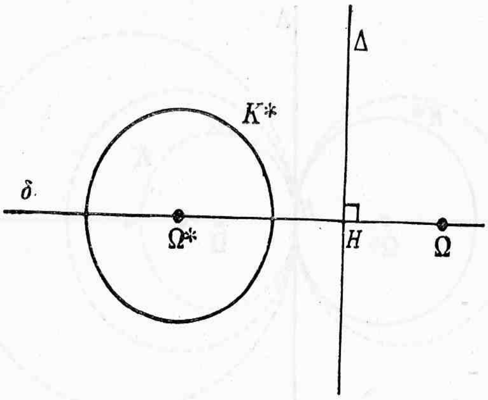



圖　八

現在我們分三種情形來討論。

(1)當 $K^*\cap\triangle=\{A,B\}$ 則

$$r=\sqrt{\overline{H\Omega}^2-\mathscr{P}(H;K^*)}$$

(其中$\Omega$爲圓$K$的圓心；$r$爲圓$K$的半徑)且

$$\mathscr{P}(H;K^*)<0$$

因爲，圓系 $\mathscr{H}_m$ 爲所有過 $A,B$，兩點的圓的集合，所以我們稱點 $A,B$ 爲圓系 $\mathscr{H}_m$ 的兩基限點。(見圖九)

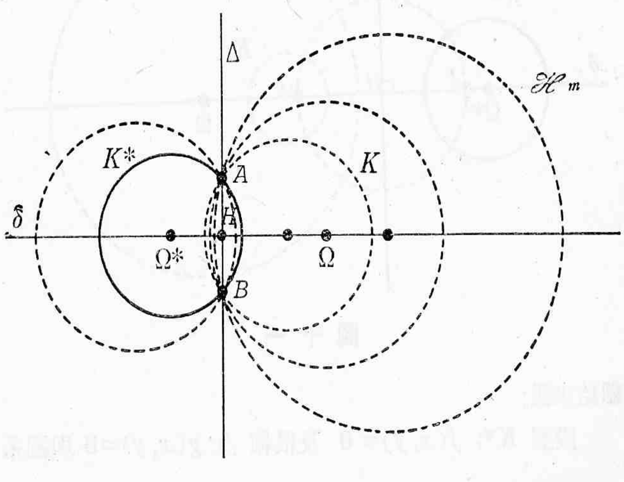



圖　九

(2)當 $K^*\cap\triangle=\{H\}$ 則

$$r=\sqrt{\overline{H\Omega}^2}=\overline{H\Omega}$$

(其中$\Omega$爲圓$K$的圓心；$r$爲圓$K$的半徑)。且

$$\mathscr{P}(H;K^*)=0$$

因此，圓系 $\mathscr{H}_m$ 爲所有與圓 $K^*$ 相切於 $H$ 的圓的集合。我們稱點$H$爲圓系 $\mathscr{H}_m$ 的一基限點。(見圖十)

(3)當 $K^*\cap\triangle=\phi$ 則

$\Omega\in\delta$ 且圓$K$與以 $\overline{IJ}$ 爲直徑之圓 $(IJ)$ 正交，其中$\Omega$爲圓$K$之圓心，又點$\Omega$在線段 $\overline{IJ}$ 之外。(由性質 3) 設圓$K$的半徑爲$r$則

$$r=\overline{\Omega T}\ (\text{其中 }\overline{\Omega T}\text{ 爲點}\Omega\text{至圓 }(IJ)\text{ 的切線})$$

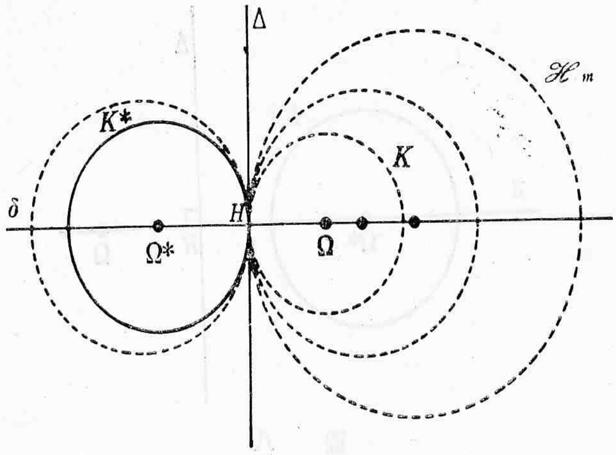



圖　十

由於點Ω落在點$I$或點$J$時，我們得$r=0$

故，兩個點圓$I$及$J$爲圓系$\mathscr{H}_m$的成員。我們稱點$I$及點$J$爲圓系$\mathscr{H}_m$的兩基限點（見圖十一）

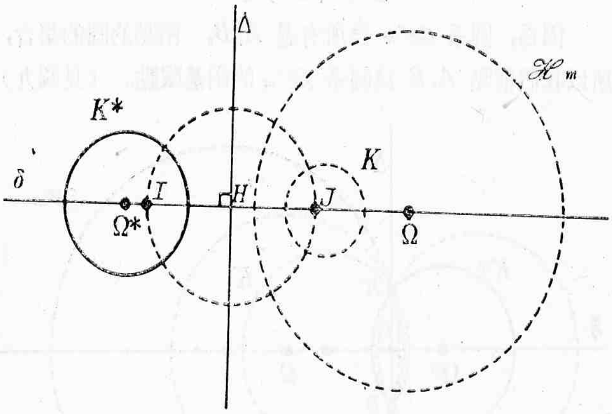



圖 十 一

總結來說:

設圓$K^*$: $f(x,y)=0$ 及根軸 $\triangle$: $g(x,y)=0$ 與圓系

$$\mathscr{H}_m=\{K|K: f(x,y)+mg(x,y)=0, m\in R\}$$

則可得下面三個重要性質:

(1)若$K^*$與△相交則由$K^*$與△所產生的共軸圓系卽爲由所有通過該交點的圓所組成之圓系。

(2)若$K^*$與△相切於$H$,則由$K^*$與△所產生的共軸圓系卽爲由以根軸△爲其一公切線的圓所組成之圓系。

(3)若$K^*$與△不相交，則由$K^*$與△所產生的共軸圓系$\mathscr{H}_m$中含有兩個點圓$I$與$J$。

詳細地說，由性質四我們得下面的事實:

(i)設直線$\delta$爲通過圓$K^*$的圓心，且和根軸△垂直的直線。若$H$爲其垂足則兩個點圓$I$與$J$的位置可由下式確定。

$I, J\in\delta$ 使 $\overline{HI}^2=\overline{HJ}^2=\mathscr{P}(H;K^*)$

(ii)所有通過點圓$I$及$J$的圓構成一個共軸圓系$\overline{\mathscr{H}_n}$，在其中每一個圓與圓系$\mathscr{H}_m$中任意一個圓均正交。

我們稱此二圓系$\mathscr{H}_m, \overline{\mathscr{H}_n}$，互爲共軛的共軸圓系

例說 1: 設

$$\mathscr{H}_m: x^2+y^2+(3m+1)x-(m+3)y+3m=0\ (m\in R)$$

試討論其特性。

解: ∵ $x^2+y^2+(3m+1)x-(m+3)y+3m=0$

卽 $x^2+y^2+x-3y+m(3x-y+3)=0$

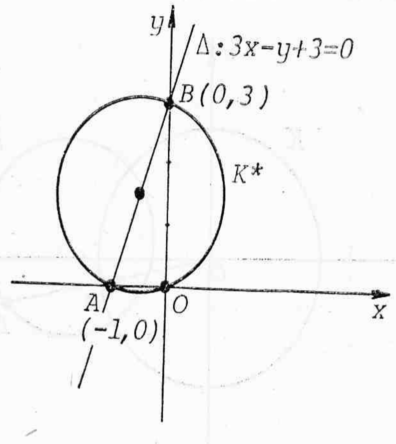
解聯立方程式

$$\begin{cases}x^2+y^2+x-3y=0\\3x-y+3=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases};\quad\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$$

故$\mathscr{H}_m$的兩基限點爲點$A(-1,0), B(0,3)$




例說 2: 設

$$\mathscr{H}_m: x^2+y^2+(m-2)x-2(m-1)y+2m-3=0\quad(m\in R)$$

試討論其特性。

解: ∵

$$\mathscr{H}_m: x^2+y^2+(m-2)x-2(m-1)y+2m-3=0$$

卽

$$x^2+y^2-2x+2y-3+m(x-2y+2)=0$$

設圓$K\in\mathscr{H}_m$，其半徑爲$r$使

$$r^2=\frac{1}{4}\Big[(m-2)^2+4(m-1)^2-4(2m-3)\Big]$$

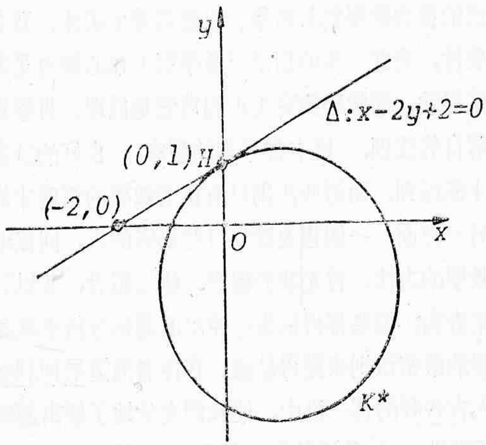
$$=\frac{5}{4}(m-2)^2$$

當$r^2=0$時$m=2$（重根）。同時，圓$K$之圓心Ω座標爲

$$((m-2)/2, m-1)=(0,1)$$

根軸$\triangle$: $x-2y+2=0$

$\therefore$ $\mathscr{H}_m$ 的一基限點為 $H(0,1)$




例說 3: 設

$$\mathscr{H}_m: x^2+y^2-(m+6)x-(m+4)y+3m+13=0 \quad (m\in \boldsymbol{R})$$

試討論其特性。

解: $\because$

$$\mathscr{H}_m: x^2+y^2-(m+6)x-(m+4)y+3m+13=0$$

即

$$x^2+y^2-6x-y+13+m(-x-y+3)=0$$

設圓$K\in\mathscr{H}_m$，其半徑為 $r$，使

$$r^2=\frac{1}{4}\Big[(m+6)^2+(m+4)^2-4(3m+13)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}m(m+4)$$

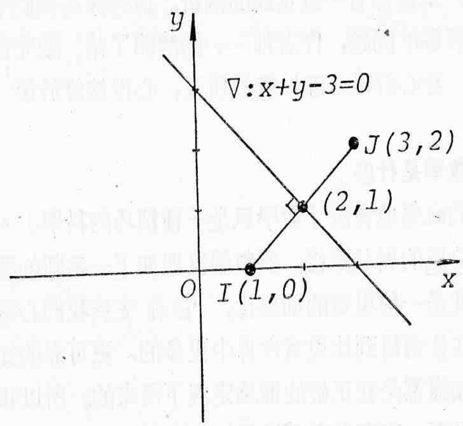
當 $r^2=0$ 時 $m=-4$ 或 $m=0$。同時，圓$K$之圓心$\Omega$座標為

$$\left(\frac{m+6}{2},\ \frac{m+4}{2}\right)$$

$\therefore$

$$m=-4\Rightarrow I=(1,0);\quad m=+0\Rightarrow I=(3,2)$$

故 $\mathscr{H}_m$ 的兩基限點為 $I(1,0)$ 及 $J(3,2)$




——本文作者現任教於臺北私立延平中學