以簡御繁

葉東進

前言

對於未曾作思考整理工夫的學習者來說，數學就像是在玩定義、法則與三段論法的邏輯遊戲。既便是學過初等數學者，仍然有甚多的人還不能瞭解那些有理數的加、乘運算所具有的交換性、結合性、分配性到底佔有怎麼樣的重要地位。在計算一長串的四則運算或開方時，他知道常有一些簡便的公式或方法可資運用，但是對那些只學不思的人來說，卻不肯想想能夠得到這些公式或方法究竟是具有何種深刻的意義。一旦跨入中等或較高等數學的學習階段，面對那更多更雜的題材，便只有茫然無措，自嘆命薄。

從「形式」來看數學，數學確像是難於捉摸的魔術遊戲；但是，深一層的來想，是什麼動力促成了數學的豐富內容？難道是一些不食人間煙火的數學家自閉在象牙塔內的傑作？不錯，我們也許看到數學家僅用紙和筆在創造一個宇宙，但是在創造的過程中，他腦海中所貯存的是些什麼？是一些困擾他的問題！這些問題看來也許呈現著個別性，也或許是表面的複雜性；而這位苦心焦思的數學家正是要設法從諸多的個別性中抽離出一個共通性；他是在做抽象的工作！也或許他正是要設法揭開問題表面的複雜性而看穿其實質層面下的簡易性。他在尋求法則！他甚至在建立「方法」！

另外，一個煩瑣的計算可以簡化，一道複雜的問題可以化約成一個更簡的問題，這是數學處理的展示中，最最令人震撼者。幾乎數學問題的處理都在朝著簡化的目標進行。這正是數學的基本精神——以簡御繁。

就整個高中數學教材的橫面 —— 各種方法所能處理的領域，或是縱面 —— 各種題材間的來龍去脈來看，小至一個題目的解決，大至整個題材的處理，「以簡御繁」都在其中扮演了指向的角色。它貫穿於數學的各個層面。

本文便是想藉「以簡御繁」這個角度來回顧整個高中數學教材的主要部分與重要方法。藉著這樣的回顧，不僅教者易於掌握整個數學教材而不致凌亂無緒，學者也將有了正確的學習指標而不致迷失方向。

1. 近　似　值

經由整數的四則運算，我們將數系從自然數起發展到有理數。但是從有理數推進到實數，卻是跨了相當大的一步，能夠跨此大步，乃是利用「逼近」這樣的以簡御繁的觀念所致。我們以有理數作為無理數的近似——以有限作為無限的近似，這是人類在觀念上的一大突破，也正是數學精神所在。

方程式最主要的事就是求根，因式分解便是在做求根的準備工作，但既便是能夠因式分解，也不見得能夠找出方程式的所有有理根。假定我們預先知道方程式有一個無理根，而這個無理根又無法從任何公式中求出，怎麼辦？用逼近法！就是利用有理數來作為該無理根的近似（以簡御繁?!）以高中所學的多項方程式求近似根來說便介紹有二等分（或十等分）逼近法，這個逼近法之所以可行的理論基礎乃是：**連續函數的中間值定理：**

設 $f(x)$ 為一連續函數，若有理數 a，b 滿足 $a<b$ 及 $f(a)\cdot f(b)<0$，則在區間 (a,b) 中存有一數 c 使 $f(c)=0$。

現在的一個問題是：我們如何預先知道一個方程式有無有理根？底下的判根定理給了我們答覆：

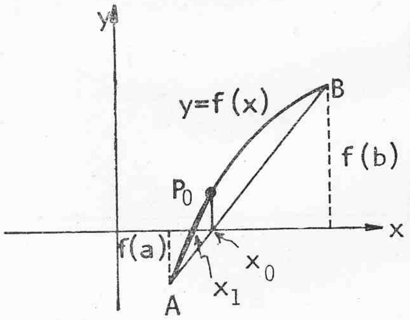
有理根檢定法：

如果有理數 q/p (p,q 互質) 是整係數多項方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$ 的一根，則有 $|\not{q}a_n$ 及 $q|a_0$（即 p,q 分別是 a_n 與 a_0 的因數）

當我們利用觀察法作分解因式時，實際上便是在利用上面的檢定法。

除了二等分（或十等分）逼近法求近似根以外，下列的方法，在精神上與前述者相同，乃是經由中間值定理的理論基礎作保證，而施予以簡御繁的運作：

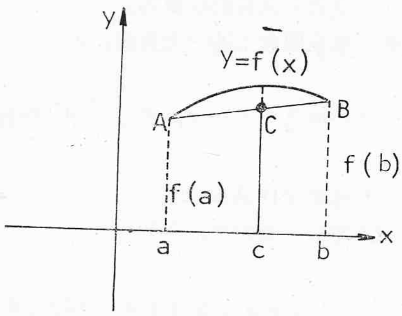
由 $f(a)\cdot f(b)<0$，連結 A, B 得一割線 AB。AB 交 x 軸於座標為 x_0 的點；當 x_0 滿足 $f(x_0)=0$ 時，x_0 即為所求之根，否則，如果 $f(a)\cdot f(x_0)<0$（或是 $f(b)\cdot f(x_0)<0$），再連結 A,P_0（或 P_0, B）得割線 AP_0。AP_0 交 x 軸於座標為 x_1 的點；當 x_1 滿足 $f(x_1)=0$ 時，x_1 即為所求之根，否則，即可仿上述方法求得 $x_2,x_3,\cdots\cdots x_n\cdots\cdots$，這些 $x_0,x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 均可視為所欲求之根的近似值。



2. 內 插 法

欲求某一數的對數值或三角函數值，若遇及無法從對數表或三角函數表中查得所需數值，我們常設法先找到接近該某數的左右兩個數，並且這兩個數的對數值（或三角函數值）均可由表中查知，這樣我們便可利用內插法求得所需的數值。內插法的理論根據是:

在很小很小的區間 (a, b) 內，連續函數曲線上兩點 $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ 間的直線段近似於該兩點間的曲線段（見圖）。即是以直代曲，以簡御繁！用線段 AB 作為A, B間曲線的近似。因此要求 $f(c)$ 的值，便以點C的y座標值來代替。

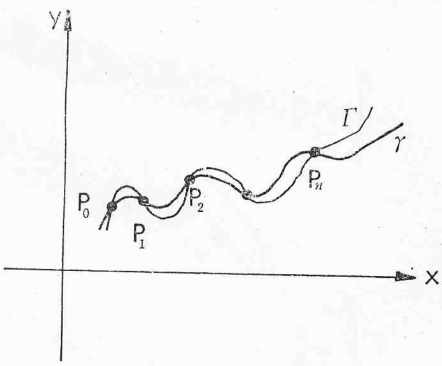


一般說來，a，b，c 都是很小很小的有限小數，因而存在兩個正整數m，n 使 $c=(ma+nb)/(m+n)$，本來該求的是 $f(c)=f((ma+nb)/(m+n))$的值，但我們卻以近似值 $(mf(a)+nf(b))/(m+n)$ 來取代 $f(c)$，由於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 均可由表查知，因此 $(mf(a)+nf(b))/(m+n)$ 的計算是簡易可行的。這種想法並不限於求對數或三角函數值，任何連續函數均可適用。

3. 插 值 法

通過實驗觀察或調查搜集，對所欲研討的對象，我們掌握了部分資料；利用這些資料，而要完全描述對象，常是不可及的。我們所能描述的常是對象的近似。資料愈多，近似程度愈高。化成數學的語言是：有一條通過 $p_0, p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ 點的曲線 Γ，這條曲線事先我們並不知道，現在想找一條我們能力可以找到的曲線γ，γ 通過 $p_0, p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ 諸點，我們就以γ作為Γ的近似。

所找的γ最易於得到的乃是通過 $p_0(x_0, y_0), p_1(x_1, y_1), \cdots\cdots, p_n(x_n, y_n)$ 的一條n次多項函數的曲線。



所以想到用多項函數作為近似，緣於下列這件事實:

多項式函數是一個基本的函數，它是由單項函數 x，經由加、乘運算的有限次操作而成，並且由後來發展出的 **Maclaurin** 展開式知道：一般的函數均可用多項函數來逼近。

Lagrange 插值法卽是求得這條 n 次多項函數曲線 γ 的方法之一，底下略作分析介紹：

假定我們要找的 γ 的多項函數是 $f(x)$，而 $f(x)$ 要滿足：$f(x_i)=y_i$，$i=0,1,2,\cdots\cdots,n$，我們作如下的分析：如果能找到 $n+1$ 個 n 次多項函數 $f_0,f_1,f_2,\cdots\cdots,f_n$，其中

f_0 通過 $p_0(x_0,y_0),(x_1,0),(x_2,0),\cdots\cdots,(x_n,0)$

f_1 通過 $(x_0,0),p_1(x_1,y_1),(x_2,0),\cdots\cdots,(x_n,0)$

f_2 通過 $(x_0,0),(x_1,0),p_2(x_2,y_2),(x_3,0),\cdots\cdots,(x_n,0)$

$\vdots$

f_i 通過 $(x_0,0),(x_1,0),\cdots\cdots,(x_{i-1},0),p_i(x_i,y_i),(x_{i+1},0),\cdots\cdots,(x_n,0)$

$\vdots$

f_n 通過 $(x_0,0),(x_1,0),\cdots\cdots,(x_{n-1},0),p_n(x_n,y_n)$

將 $f_0(x),f_1(x),f_2(x),\cdots\cdots\cdots,f_n(x)$ 疊合成 $f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\cdots\cdots\cdots+f_n(x)=f(x)$，那麼 $f(x)$ 便是所求的函數了。

顯然，這樣的 $f_0(x),f_1(x),\cdots\cdots,f_n(x)$ 是極易找到的：

令 $f_0(x)=\lambda_1(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)$〔因式定理〕，又

$$f_0(x_0)=\lambda_1(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots\cdots(x_0-x_n)=y_0\Rightarrow f_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots\cdots(x_0-x_n)}y_0$$

同理，$f_i(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots\cdots(x_i-x_n)}y_i$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$

4. 特　殊　化

數學中的一般性結論並非來自偶然的發現，而是經由一些簡易特殊的情況的觀察，逐步歸納出某種可能的規則，所謂積少成多，積沙成塔。這個經由觀察得到的一般規則要是能通過嚴謹的考驗（數學歸納法的證明）才算確定。這種發展的歷程，提供了我們處理複雜問題時先尋求簡易特殊化的心理基礎。底下用幾個例子來說明特殊化的運用。

什麼是多邊形的重心？給予一個多邊形，怎樣找到它的重心？

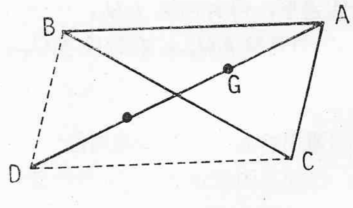
把這個問題特殊化：什麼是三邊形的重心？給予一個三邊形，怎樣找到它的重心？學過簡單向量幾何的都知道，G是$\triangle ABC$ 的重心的條件是：

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$$

另外，

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{O}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$



最後一式，提供了我們找到G的方法：以AB,AC爲邊作平行四邊形 $ABDC$，則有 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，接著在 AD 上取一點 G 使 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，這樣的點$G$便是三邊形 ABC 的重心。

解決了經過特殊化的三邊形問題，這樣的解決的經驗是否足可作爲我們處理一般的 n 邊形問題的基礎？

什麼是 n 邊形 $p_1p_2p_3\cdots\cdots p_n$ 的重心？如何找到它的重心？

定義：n 邊形 $p_1p_2\cdots\cdots p_n$ 的重心是滿足下列條件的點 G：

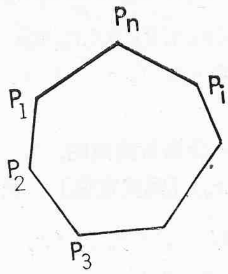
$$\overrightarrow{Gp_1}+\overrightarrow{Gp_2}+\overrightarrow{Gp_3}+\cdots\cdots+\overrightarrow{Gp_n}=\overrightarrow{O}$$

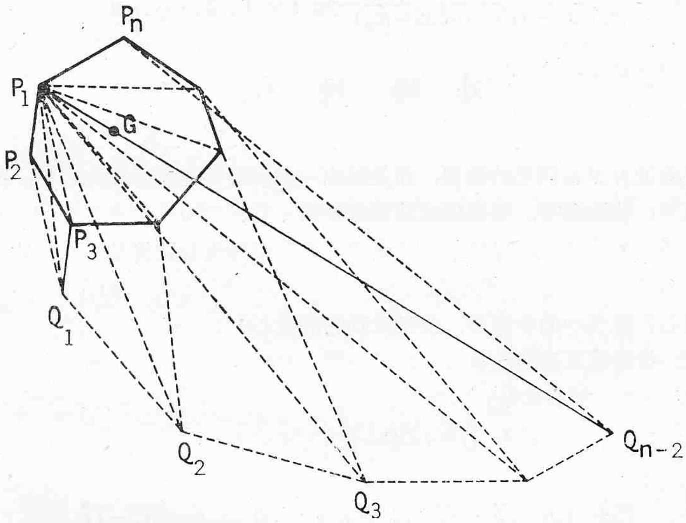
（嚴格說來，我們應該要證明這樣的點 G 是唯一存在）

由
$$\overrightarrow{Gp_1}+\overrightarrow{Gp_2}+\overrightarrow{Gp_3}+\cdots\cdots+\overrightarrow{Gp_n}=\overrightarrow{O}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{Gp_1}+(\overrightarrow{Gp_1}+\overrightarrow{p_1p_2})+(\overrightarrow{Gp_1}+\overrightarrow{p_1p_3})+\cdots+(\overrightarrow{Gp_1}+\overrightarrow{p_1p_n})=\overrightarrow{O}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{p_1G}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{p_1p_2}+\overrightarrow{p_1p_3}+\cdots\cdots+\overrightarrow{p_1p_n})$$





最後一式提供了我們找到 G 的一個方法：

以 p_1p_2, p_1p_3 爲鄰邊作平行四邊形，得對角線 p_1Q_1，以 p_1Q_1, p_1p_4 爲鄰邊作平行四邊形，得對角線 p_1Q_2，以 p_1Q_2, p_1p_5 爲鄰邊作平行四邊形，得對角線 p_1Q_3，……

以 p_1Q_{n-3}, p_1p_n 爲鄰邊作平行四邊形得對角線 p_1Q_{n-2}，在線段 p_1Q_{n-2} 上取一點 G，使 $\overline{p_1G}=\frac{1}{n}\overline{p_1Q_{n-2}}$，則 G 爲所找之重心。

在思考排列組合的問題時，特殊化的運用扮演了很有用的角色：

一個箱中置有式樣相同的衣服 n 件，已知其中破損者 k 件，今作逐一檢查，問在檢查到第 m 件 $(m\geq k)$ 時，恰將 k 件破損衣服查出的機率是多少？

答案是
$$C^{m-1}_{k-1}\cdot\frac{k!P^{n-k}_{m-k}}{P^n_m}$$

如果把這個問題特殊化，這個答案便容易看出。

假定上述問題中，取$n=5$，$k=3$，$m=4$（特殊化！）

以○表沒有破損的衣服，以×表有破損的衣服，取4件的可能情形如下：

○×××，×○××，××○×，

顯然，所取的第4件一定是破損的，因此前3件恰有2件破損，

第一種情形的機率是

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3!P^2_1}{P^5_4}$$

三種情形的機率都一樣，因此答案便是

$$C^3_2\cdot\frac{3!P^2_1}{P^5_4}$$

由這答案推進到原問題的答案，路是相當通順的。

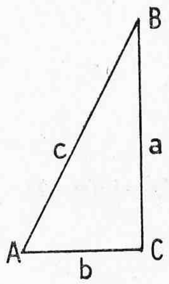
現在把特殊化的方法用來處理「解三角形」的問題上。

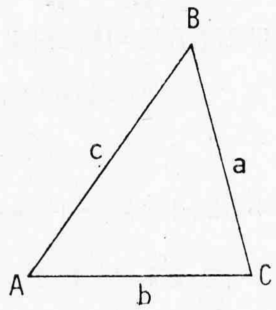
所謂解三角形，即是由三角形的已知三元素（邊、角）求出其他三元素。

解三角形問題的特殊化便是解直角三角形。由解直角三角形的經驗得知只用及了下列兩個工具：

①商高定理：斜邊的平方等於兩股的平方和（$c^2=a^2+b^2$）

②正弦的定義：$\begin{cases}\sin A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}\\[2ex]\sin B=\dfrac{b}{c}\end{cases}$





將這兩個工具一般化的結果即是一般三角形的：

餘弦定律：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

正弦定律：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

上面二式便是解一般三角形的工具也是三角測量的基礎。

5. 類推、遞迴、歸納

認爲「演繹」是數學的主要內容，乃是對數學的嚴重誤解。其實，類推、歸納才是數學的眞正主流。缺乏直覺、缺乏類推與歸納作基礎演繹便不可能。

由自然數加、乘的基本性質：交換性、結合性、分配性，容易導得

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$$

我們問：找出 $1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k$（其中 $k\in N$）的一般計算公式可能嗎？

利用組合的符號，

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$$

可以改寫爲：

$$C_1^1+C_1^2+C_1^3+\cdots\cdots+C_1^n=C_2^{n+1}$$

這個式子可否加以推廣？即是：

$$C_2^2+C_2^3+C_2^4+\cdots\cdots+C_2^n=C_3^{n+1} \quad \text{成立嗎？}$$

$$C_3^3+C_3^4+C_3^5+\cdots\cdots+C_3^n=C_4^{n+1} \quad \text{成立嗎？}$$

一般，$C_r^r+C_r^{r+1}+C_r^{r+2}+\cdots\cdots+C_r^n=C_{r+1}^{n+1}$ 成立嗎？

這個一般性的結論，利用數學歸納法的證明可予以肯定。

問題是，這個一般性的結論，到底跟 $1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k$ 有何關聯？

當 $r=2$ 時，有

$$\frac{2\cdot 1}{2}+\frac{3\cdot 2}{2}+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

或是 $$2\cdot 1+3\cdot 2+\cdots\cdots+n(n-1)=\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} k(k-1)=\frac{1}{3}(n+1)\,n(n-1)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{k=1}^{n} k+\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)$$

爲了敍述方便，採用符號 $f(k)=1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k,\ k=1,2,\cdots\cdots$

而有 $$f(2)=\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)+f(1)$$

當 $r=3$ 時，有

$$3\cdot 2\cdot 1+4\cdot 3\cdot 2+5\cdot 4\cdot 3+\cdots+n(n-1)(n-2)=\frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)=\frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}(n+1)\,n(n-1)(n-2)+3\sum_{k=1}^{n} k^2-2\sum_{k=1}^{n} k$$

$$\Rightarrow \quad f(3)=\frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)+3f(2)-2f(1)$$

仿上述方法：

當 $r=k$ 時，得到

$$f(k)=\frac{1}{k+1}(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)+\triangle f(k-1)+\triangle f(k-2)+\cdots\cdots+\triangle f(1)$$

這是一個 $f(k), f(k-1), f(k-2), \cdots\cdots, f(1)$ 的一個遞廻關係式，這個式子正是求得 $1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k$ 的一個規則。

再看一例：

有名的楊輝定理（一般稱爲巴斯卡定理）：

$$C_{r-1}^n+C_r^n=C_r^{n+1}$$

由這個定理導出的楊輝三角形：

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&&&\vee&&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &&&\vee&&\vee&&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ &&\vee&&\vee&&\vee&& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

………………………………

其實就是二項展開式 $(x+y)^n$ 在 $n=0,1,2,3,\cdots\cdots$ 的各項係數

把楊輝定理作一推廣而得:

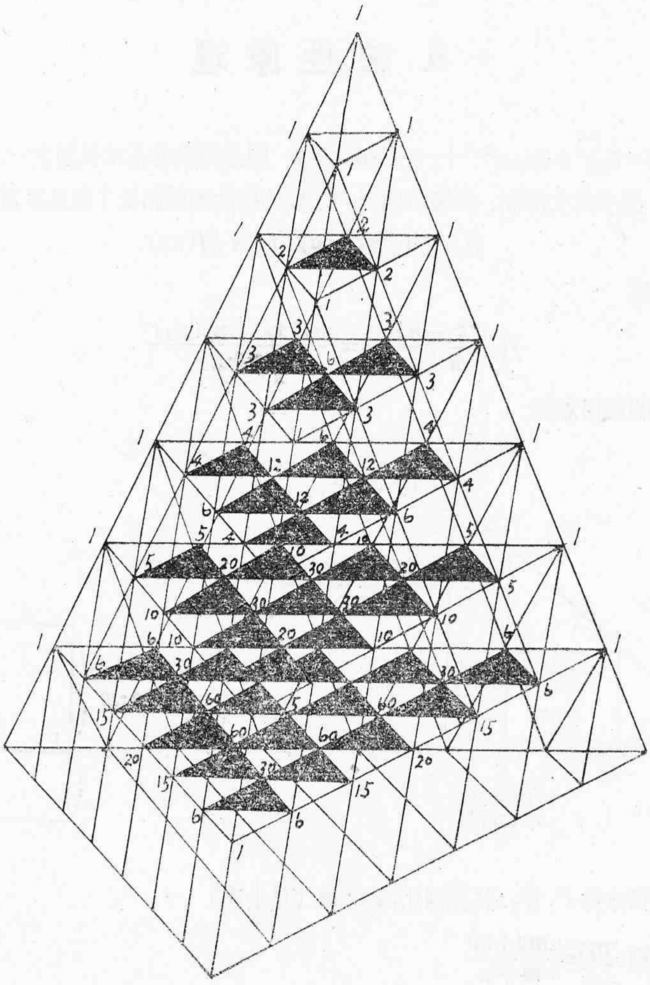
$$\binom{n}{r_1-1, r_2, r_3}+\binom{n}{r_1, r_2-1, r_3}+\binom{n}{r_1, r_2, r_3-1}=\binom{n+1}{r_1, r_2, r_3},$$

其中 $r_1+r_2+r_3=n+1$

推廣後的這個等式有一個較為通俗的解釋是:

假定有 $n+1$ 位學生要分配到甲，乙，丙三班，其中甲班分配 r_1 人，乙班 r_2 人，丙班 r_3 人，那

\# 因有楊輝定理而有楊輝三角形；現在有了楊輝定理的推廣，是否也可將楊輝三角形作一推廣呢？底下便是經推廣而得的一個三角梁，姑且稱之為楊輝三角梁吧。



麽分配的方法數是

$$\binom{n+1}{r_1,\ r_2,\ r_3}=\frac{(n+1)!}{r_1!r_2!r_3!}$$

但是假如我們考慮 $n+1$ 人中的某人，則該某人不是分配到甲班，便是到乙班或到丙班，而其分配法數分別是

$$\binom{n}{r_1-1, r_2, r_3},\ \binom{n}{r_1, r_2-1, r_3},\ \binom{n}{r_1, r_2, r_3-1}$$

因此而有

$$\binom{n+1}{r_1,\ r_2,\ r_3}=\binom{n}{r_1-1, r_2, r_3}+\binom{n}{r_1, r_2-1, r_3}+\binom{n}{r_1, r_2, r_3-1}$$

如果作更一般的推廣則有:

$$\binom{n}{r_1-1, r_2, r_3, \cdots\cdots, r_m}+\binom{n}{r_1, r_2-1, r_3, \cdots\cdots, r_m}+\cdots\cdots+\binom{n}{r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots, r_m-1}$$

$$=\binom{n+1}{r_1, r_2, r_3, \cdots, r_m}，\text{其中} \sum_{i=1}^{m} r_i=n+1$$

上式的證明非常簡單:

證明: 左邊 $=n!\left[\frac{r_1}{r_1!r_2!\cdots\cdots r_m!}+\frac{r_2}{r_1!r_2!\cdots\cdots r_m!}+\cdots\cdots+\frac{r_m}{r_1!r_2!\cdots\cdots r_m!}\right]$

$$=n!\frac{r_1+r_2+\cdots\cdots r_m}{r_1!r_2!\cdots\cdots r_m!}=\frac{n!(n+1)}{r_1!r_2!\cdots\cdots r_m!}=\binom{n+1}{r_1, r_2, \cdots\cdots, r_m}=\text{右邊}$$

6. 線 性 原 理

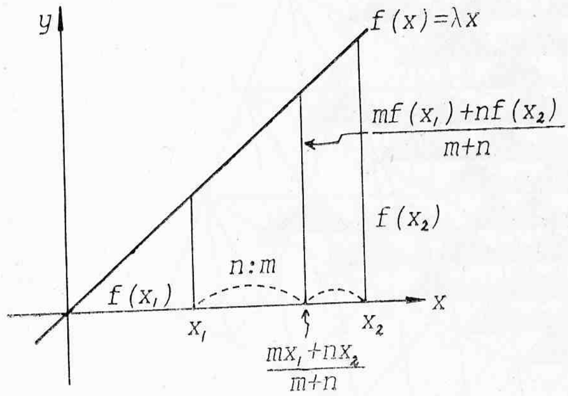
多項函數 $F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ 固是函數的基本模型之一，然而追根究底，仍由線性函數 $f(x)=\lambda x$ 經有限次的加、乘運算而得。這樣的線性函數滿足了線性原理:

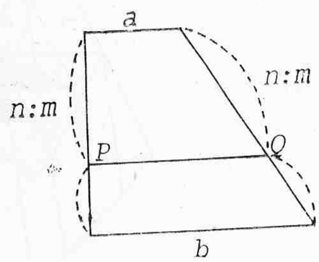
$$f(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$$

上式稍經改裝可以寫成

$$f\left(\frac{mx_1+nx_2}{m+n}\right)=\frac{mf(x_1)+nf(x_2)}{m+n}$$

這個式子有一個明顯的幾何意義:





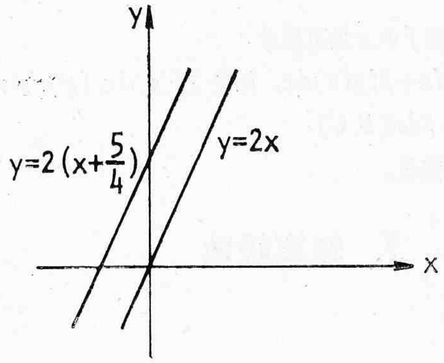
梯形兩腰上分別有兩個分點 P, Q，其分割比為 $n:m$（見上圖）

則 $\overline{PQ}=\dfrac{ma+nb}{m+n}$

因此線性原理可以說是一種相似比例的保持。

一般的直線: $ax+by+c=0$，$b\neq 0$乃由線性函數 $y=-\dfrac{a}{b}x$經平移向量$\left(-\dfrac{c}{a},\ 0\right)$而得，

例: $4x-2y+5=0$是由線性函數 $y=2x$ 經平移向量$\left(-\dfrac{5}{4},\ 0\right)$而得（見下圖）



平移$\left(-\dfrac{5}{4},\ 0\right)$

←

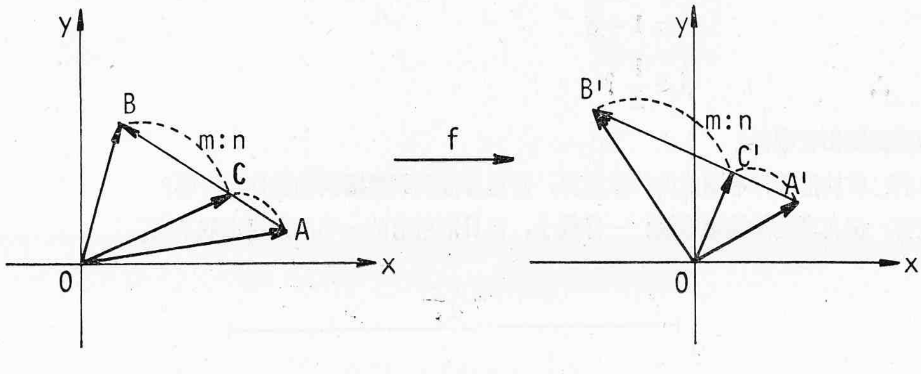
有了線性函數，配以平移的方法，我們便可研究所有的直線，這也是以簡御繁!

現在來考慮雙變數的函數 $f: R^2\to R^2$

如同上述的線性函數，形如 $f(x,y)=(a_{11}x+a_{21}y, a_{12}x+a_{22}y)$ 是所有雙變數函數中最簡者，它也滿足了線性原理: $f(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})=\alpha f(\vec{a})+\beta f(\vec{b})$，其中 $\vec{a}=(x_1,y_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2)$ 爲兩任意向量。這樣的函數我們通稱爲平面上的線性映射，將 $f(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})=\alpha f(\vec{a})+\beta f(\vec{b})$ 稍經改裝可寫成:

$$f\left(\frac{m\vec{a}+n\vec{b}}{m+n}\right)=\frac{mf(\vec{a})+nf(\vec{b})}{m+n}$$

而這個線性原理的幾何意義則是: 共線的點，經映射後仍爲共線，而且點與點間的相對位置比保持不變。



$$A'=f(A)$$
$$B'=f(B)$$
$$\overrightarrow{OC}=\frac{m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}}{m+n}$$
$$C'=f(C)$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{OC'}=\frac{m\overrightarrow{OA'}+n\overrightarrow{OB'}}{m+n}$$

平面 R^2 上的線性映射可推廣至 R^n（n維空間）的線性映射:

即對任意R^n中的向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots\cdots,b_n)$滿足 $f(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})=\alpha f(\vec{a})+\beta f(\vec{b})$，這樣的$f$稱爲 R^n 中的線性映射，它是討論行列式，線性代數的基本工具。

另外，滿足線性原理的運算還有下列諸例:

①$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\beta\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，如果$\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle$均收斂

②$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收斂

③$(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$，如果函數$f$與$g$均可微分

④$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$，如果 $\int f(x)dx,\int g(x)dx$ 均存在

⑤$det[\alpha A+\beta B,C]=\alpha det[A,C]+\beta det[B,C]$

線性原理乃是運算可以簡化的基本道理。

7. 無窮級數

看看下面的計算:

$$
\begin{aligned}
&1-1+1-1+\cdots\cdots+1-1+\cdots\cdots \text{（無窮多項）}\\
&=(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots+(1-1)+\cdots\cdots\\
&=0+0+\cdots\cdots+0+\cdots\cdots\\
&=0\ ?
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&1-1+1-1+\cdots\cdots+1-1+\cdots\cdots\\
&=1-(1-1)-(1-1)-\cdots\cdots-(1-1)-\cdots\cdots\\
&=1-0-0-\cdots\cdots-0-\cdots\cdots\\
&=1\ ?
\end{aligned}
$$

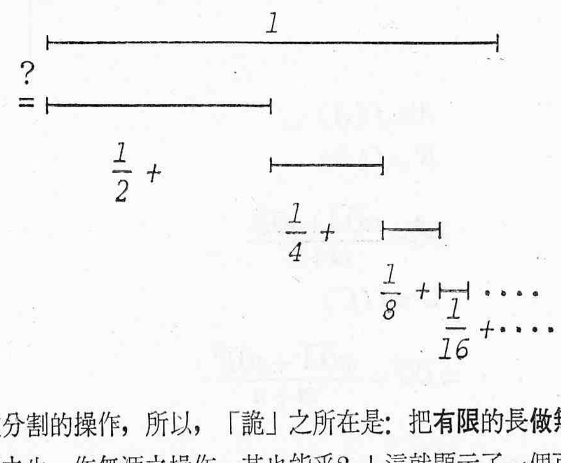
令
$$
\begin{aligned}
S&=1-1+1-1+\cdots\cdots+1-1+\cdots\cdots\\
&=1-(1-1+1-1+\cdots\cdots+1-1+\cdots\cdots)\\
&=1-S
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad S=\frac{1}{2}\ ?$

錯誤倒底出在哪裡?

我們已慣於把數作**有限次**的代數運算，將運算推廣到**無限次**的操作可行嗎?

記得一個古老的詭論這樣說: 一條繩子，每日取所有的一半，永遠也取不完。



「取一半」實際上是一種分割的操作，所以，「詭」之所在是: 把**有限**的長**做無限**的分割，套句比較有哲學味道的話是: 「以有涯之生，作無涯之操作，其也能乎?」這就顯示了一個可能的陷阱: 把無窮多項的求和當成跟有限多項的求和一樣去處理。

譬如，從上圖中，**直覺**得:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots（無窮多項）=1$$

問題是：式中左端的數字 1/2, 1/4, 1/8, ……其和爲 1，果眞是經由 1/2+1/4=3/4, 3/4+1/8=7/8, 7/8+1/16=15/16, ……這樣子兩兩相加的無限次操作而得嗎？當然不是！如同開始的那個例子：

$$1-1+1-1+\cdots\cdots+(1-1)+\cdots\cdots$$

當它被改寫成

$$(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots+(1-1)+\cdots\cdots$$

或是

$$1-(1-1)-(1-1)\cdots\cdots(1-1)\cdots\cdots$$

時，實際上是已施予了**無限次**的結合運算，旣然如此，其結果是値得懷疑的。想起了一位學生曾經提過的疑惑：

$$\text{求}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$$

它的解法是大家都已熟悉的：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

引起疑惑的是：就 $1/(1\cdot 2)+1/(2\cdot 3)+\cdots\cdots+1/[n(n+1)]$ 來說，當 $n\to\infty$ 時，$1/(1\cdot 2), 1/(2\cdot 3), \cdots\cdots$ 均是常數，但是

$$\frac{1}{(n-2)(n-1)}\longrightarrow 0,\ \frac{1}{(n-1)n}\longrightarrow 0,\ \frac{1}{n(n+1)}\longrightarrow 0$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+0+\cdots\cdots+0+\cdots\cdots$$

顯然，最後那個式子，不知道要如何處理才好，問題在哪兒？

$1/(1\cdot 2)+1/(2\cdot 3)+\cdots\cdots+1/[n(n+1)]$ 是由 $1/(1\cdot 2)$, $1/(2\cdot 3)$, ……, $1/[n(n+1)]$ 共 n 個項經相加的有限次運算的和，但當 n 趨向很大時，$1/(1\cdot 2)+1/(2\cdot 3)+\cdots\cdots+1/[n(n+1)]$ 的項數也隨着 n 的增大而相對地增加；當 $n\to\infty$ 時，它就成爲一個無窮級數的求和問題了。

可以看出這個疑惑的根源是：期望

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$

這樣的結果也能推廣到

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+\cdots\cdots（無窮多項）)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n+\cdots\cdots（無窮多項）$$

不幸的是這樣的推廣是行不通的，它陷入了前述的陷阱中。

無窮級數：

$$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$$

形式上它好像是由 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 經相加的無限次操作而得，實際上並非如此。數學在處理這個問題上，又發揮了它「以簡御繁」的精神與方法。在此，「簡」指的是有限，「繁」指的是無窮，「御」指的則是逼近或近似。就是說:

以 a_1，或是 a_1+a_2，或是 $a_1+a_2+a_3$，或是 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ 作爲 $a_1+a_2+\cdots\cdots$（無窮多項）的近似。可注意的是，不論是 a_1 也好，或是 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ 也好，它們都是有限次運算的可求和者。另外，看得出所取項數愈多，則近似程度愈高；也就是說 n 愈大，則 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ 愈接近 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$，用符號來表示便是:

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$$

8. 剛性運動（全等變換）

探討曲線的性質是「幾何」的主要工作。普天之下，曲線何止萬千，要一一研究，那有可能？數學的方法，乃是掌握一些較基本簡易者，再經逼近的方法去描述其他較複雜者。代數如此，幾何亦復如此。在高中階段，我們已跳開了用純粹幾何的方法研究幾何，而是採用轉化的方法來處理——即是將研究的幾何對象尋求其代數表示，透過代數的易於運算，將代數表示化約至一個簡易階段，最後再將此化約後的代數式予以還原成幾何意義。操縱「轉化」的主要關鍵是座標系的建立與向量觀念的引入。

點是構成任何幾何形象的終極元素，因此幾何之代數化的首要工作便是予點以代數化，這便是座標系建立的開端。

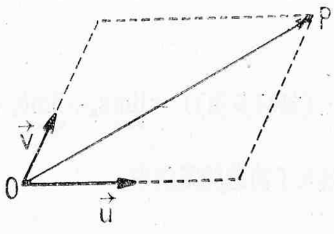
如果面對的幾何形象都是在一直線上，諸如線段、射線或某些個點集，那麼引入直線座標系便足可運用

如果面對的幾何形象是平面上的曲線、曲域、甚或是一個立體的曲面、曲體，那麼必須引入平面座標系，甚或空間座標系。

座標系是如何建立的？或者說點是如何代數化的？換個說法便是怎樣用數來描述點的位置？如何以客體來描述主體？

假定 P 是個平面上的已知點，我們可隨處找個觀測點，以兩個不同方向的單位向量 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 來測度向量 $\overrightarrow{OP}$，這樣的 $\overrightarrow{OP}$ 必可用 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 的線性組合表示出來:

存在唯一數對 (x, y) 使得 $\overrightarrow{OP}=x\vec{u}+y\vec{v}$，用這樣子得到的數對 (x, y) 來表示 P 點，這便是 P 點的代數化!



由於所取觀測點及單位向量的不同，同一 p 點便有不同的代數表示。這就是座標變換的產生背景。

而曲線又是如何代數化的？

一條曲線乃是由諸多具有某一幾何共通性的點所構成。

我們也說一條曲線乃是一個動點遵循某一規則運動而成的軌跡。

將幾何共通性、運動的規則用代數表示，便是曲線的代數化，而這個代數表示便是通稱的曲線方程式。曲線方程式乃是點座標觀念的延伸，這意思是說：座標用以描寫點的位置，而方程式則用以描寫曲線的位置。由於座標系選取的不同，同一條曲線自有方程式的不同。站在精簡的立場，我們希望能夠找到一個適當的座標系，使曲線在這個座標系的觀測下有最簡易的代數表示，除了一些簡易的曲線我們容易選取適當座標系之外，一般說來，座標系的選取事先我們無法預知是否適當，可以說我們是站在被動的立場來選取座標系。一個主動的立場乃是我們固定一個座標系，然後讓曲線作一剛性運動，使曲線能移到一個較佳的位置（也就是曲線的方程式儘可能最簡易）以便於我們的代數處理。

曲線在剛性運動下，並未失其幾何性，因此它是一種全等變換。

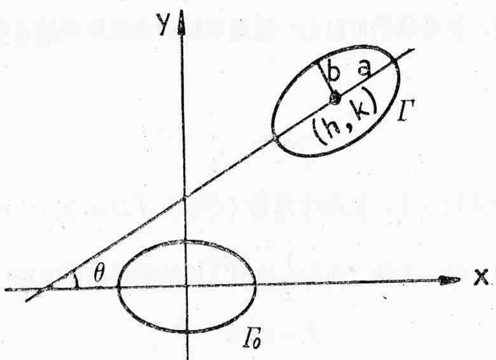
這樣的全等變換是：平移、旋轉、鏡射及其合成。

例：Γ是一個以 (h,k)爲中心，軸長分別爲 $2a,2b$，長軸的斜角爲θ的橢圓。經由下列的剛性運動：

$$f:(x,y)\to((x-h)\cos\theta+(y-k)\sin\theta,-(x-h)\sin\theta+(y-k)\cos\theta))$$

可將Γ移到 Γ_0 的位置，這樣的 Γ_0 有一個最簡易的代數方程式；

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



由於 Γ_0 的代數表示極爲簡易，便於代數處理，把處理的結果化成幾何性質，這樣的幾何性質仍然是Γ的原本幾何性質，這就是以簡御繁的工作！而像 Γ_0 的代數方程式乃是一個基本的模型，通稱爲標準式。

現在有個問題是：我們如何找到作爲化繁爲簡的工具的那個剛性運動？

以前述那個例子來看，剛性運動f是旋轉

$$\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & \sin(-\theta)\\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}$$

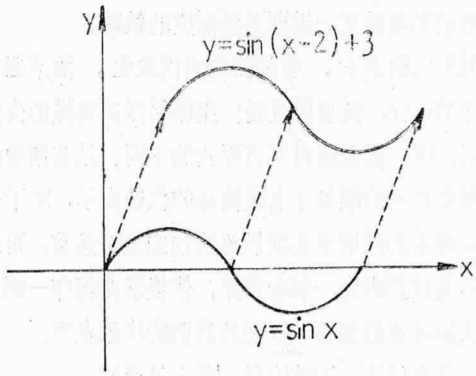
與平移 $(-h,-k)$ 的合成。因此，要是能預先得知Γ的中心 (h,k) 及長軸的斜角θ，問題便可解決。找 (h,k) 並不困難，困難在找θ。爲了這個問題的解決，高中教材中引入了固有向量，固有值等觀念。可以說題材的發展是因緣於問題的處理。有問題才有歷史，歷史不是偶然的。

因此，爲要達到以簡御繁，一些標準式的建立是非常必要的。

在直角座標系中，橢圓、雙曲線、拋物線固然有標準式，就是在極座標系中，圓錐曲線也要建立標準式：

$$r=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

又如曲線$y=\sin(x-2)+3$乃是由 $y=\sin x$ 經向量平移$(2,3)$而得，因此 $y=\sin x$ 可以說是正弦函數的標準式。



9. 張縮運動（相似變換）

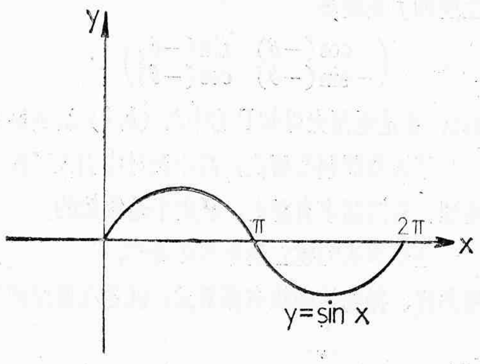
有些複雜的曲線，經剛性運動後，移至較簡的位置（方程式較爲簡易），而這個較簡的方程式仍可再經某種運動而化至最爲簡約的地步，這樣的運動有別於前述的剛性運動，稱之爲漲縮運動（或相似變換）。從以簡御繁的觀點來說，便是我們可以由一條最單純的曲線經漲縮運動、剛性運動及其合成而達到複雜的對象。

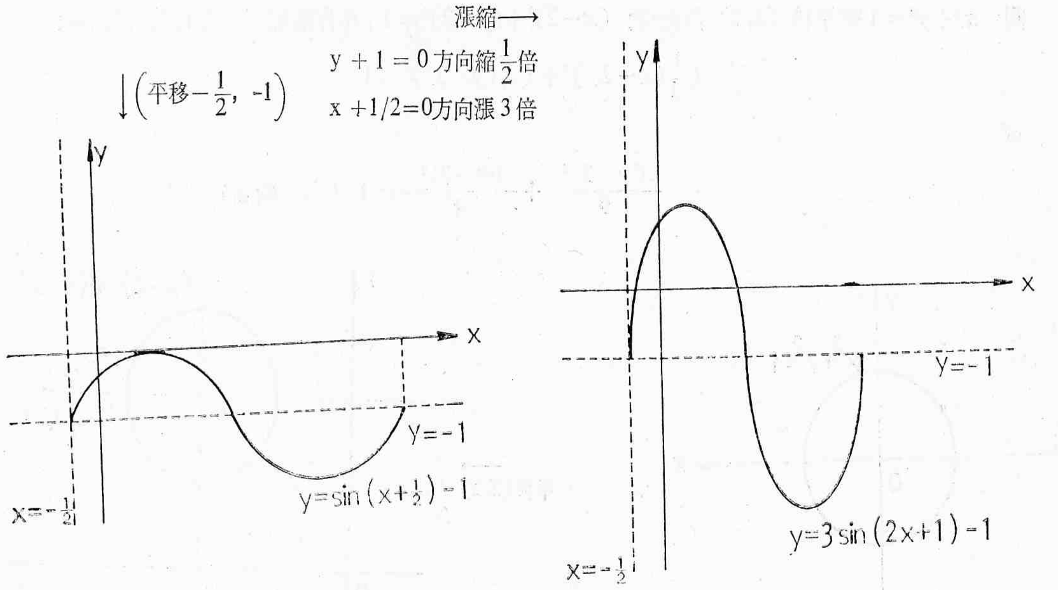
例如曲線：$y=3\sin(2x+1)-1$，經剛性運動（平移）$f:(x,y)\to(x-\frac{1}{2},\ y-1)$ 後移至曲線 $y=3\sin 2x$，再將此曲線分別向 x 軸，y 軸方向作 $\frac{1}{2}$ 倍與 3 倍的縮漲而得曲線：

$$y=\sin x$$

從分析的觀點看來便是從最簡的曲線：$y=\sin x$ 經縮漲 $(\frac{1}{2},3)$，再經平移 $(-\frac{1}{2},-1)$ 便能得到複雜的曲線：$y=3\sin(2x+1)-1$。

其過程圖解如下：

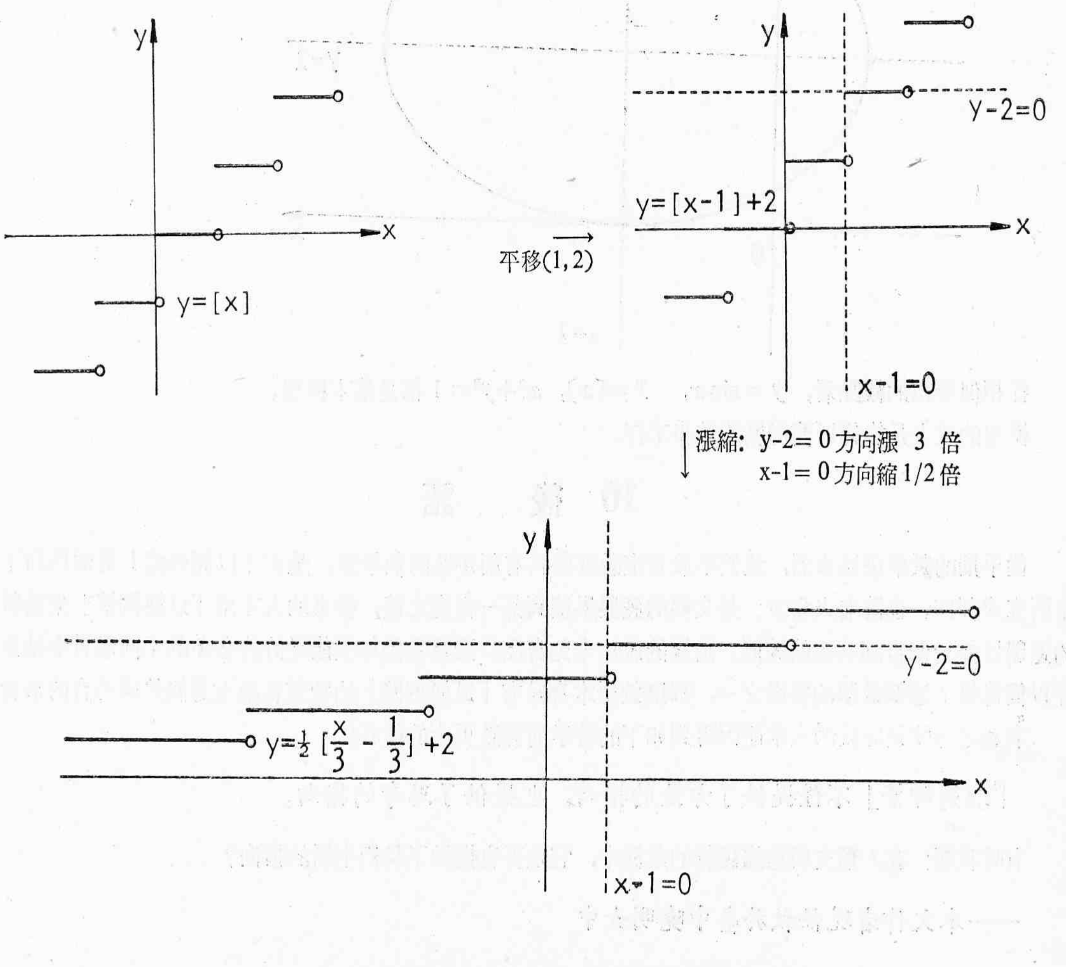




高斯函數: $y=[x]$，經平移 (1, 2) 得曲線: $y-2=[x-1]$，再作漲縮 $(\frac{1}{3},2)$ 得曲線:

$$2(y-2)=[\frac{1}{3}(x-1)] \text{ 或是 } y=\frac{1}{2}[\frac{x}{3}-\frac{1}{3}]+2$$

因此 $y=\frac{1}{2}[\frac{x}{3}-\frac{1}{3}]+2$ 的圖形可經由下列步驟逐一達成:

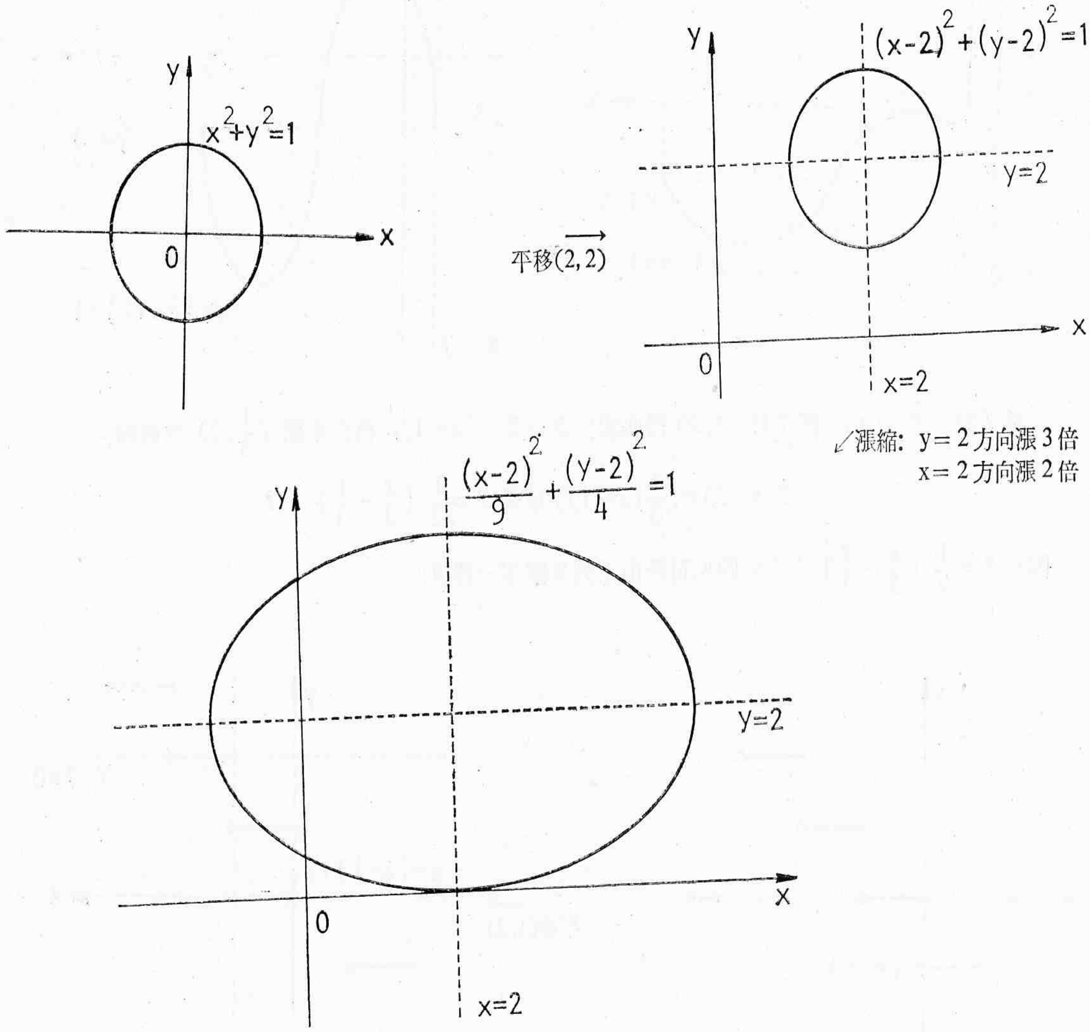


圓：$x^2+y^2=1$ 經平移 $(2,2)$ 得曲線：$(x-2)^2+(y-2)^2=1$，再作漲縮 $(1/3,1/2)$ 得曲線：

$$\left(\frac{1}{3}(x-2)\right)^2+\left(\frac{1}{2}(y-2)\right)^2=1$$

或

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1 \text{（表一橢圓）}$$



從相似變換的觀點看，$y=\sin x$，$y=[x]$，$x^2+y^2=1$ 都是基本模型。

模型的建立是能夠以簡御繁的首步工作。

10 後　語

從早期的數學發展來看，我們不敢肯定說那些具有創建性的數學家，是在「以簡御繁」這個指向下從事研究或創作。也許有人會說：是文明的發展累積到某一程度之後，後來的人才用「以簡御繁」來給數學的連繫性作一個自圓其說的裝飾。這樣的說法未免膚淺，因爲我們如果能從許許多多的不同題材中抽象出「以簡御繁」這個數學的特徵之一，那麼數學本身具有「以簡御繁」的特質就絕不是偶然或巧合的事情。

有過處理問題經驗的人常能因得到如下的啓示而獲致更大的信心：

「以簡御繁」不僅提供了方法的指向，也提供了思考的指向。

有時我想：在人類文明愈趨複雜的危機中，它是否也提供了我們生活的指向？

——本文作者現任教於臺中曉明女中