

## 天才數學家—伽羅華

戴久永

十九世紀的數學家對於數學本質的看法在態度上與前人有了根本的改變。新的重點在於強調數學體系的一般性抽象性質。這種「純」數學所關切的是數學體系的結構而不是它們具體的內涵。十九世紀的數學家變得對數學的結果之有效性比其真確或實用性更為關切。換句話說，就是把理論興趣置於實用興趣之上。羣論概念就是這種抽象數學結構中最重要的概念。雖然有好些數學家從事這方面的研究和發展，但是法國天才數學家伽羅華 (Evariste Galois, 1811-1832) 卻是衆所公認的羣論概念的主要開拓者。

羣論的起源可追溯到中世紀歐洲致力於解次數大於二的代數方程式的數學家們<sup>(1)</sup>。據數學史的記載，巴比倫人已經知道如何解二次方程式，文藝復興時期的數學家卡達諾 (Cardano) 和塔塔格里亞 (Tartaglia) 首次成功地解決了三次和四次方程式。因此人們自然期望能發現五次、六次和更高次代數方程式的解法，但卻遭受重大的困擾。自十九世紀初葉許多數學家，包括伽羅華，都致力於這問題的研究。當其他的人還在苦心嚐試尋求適當的解法的時候，伽羅華持著新看法，懷疑這種解法是否確實存在。他別開蹊徑，轉向把問題抽象化，研究方程式及其解的一般性質。這種探究導致「羣」的結構，包括元素 (如數字或點)，一個運算 (如加號)，和四種必須滿足的特殊性質。羣的概念證實了伽羅華的懷疑，即五次及更高次的代數方程式的一般代數解法並不存在。<sup>(2)</sup>

伽羅華於 1811 年誕生於巴黎近郊一個名為波格拉萊 (Bourg-la-Reine) 的小城鎮。他的雙親和其他親人並沒有顯示不尋常數學能力的跡象。他的父親曾為波鎮的鎮長，是個熱愛自由痛恨暴政的人。母親是個獨立思考者，也非常痛恨專制。伽羅華在十一歲以前的生活非常平淡，他的母親是唯一的老師。他的不快樂經驗起始於十二歲時進入巴黎正式的學校。在路易斯拉格蘭 (Louis-la-Grand) 的學校中充滿監獄般的氣氛，由於學監的專橫，學生們的情緒更形抑壓。學生以拒絕在校內小教堂唱歌表示抗議。學監爲了這件事，採取強硬手段，斷然開除了數名學生。伽羅華深感震驚和憤怒，在心中留下一個無法抹滅的印象。

第二年，他由於對拉丁文和希臘文不感興趣，成績很糟糕而被留級。雖然他對拉丁文和希臘文感到乏味，伽羅華卻對數學有深厚的興趣。他在十五歲時，就曾很認真仔細地研究過拉格蘭吉 (Lagrange)，高斯 (Gauss)，阿貝爾 (Abel) 和柯西 (Cauchy) 等大數學家的論述，變得很熟練那些通常只有數學專家才懂的題材。但是很諷刺地，他的學校功課並沒有顯現他的真才和成就。雖然伽羅華能心中默想就解決困難的數學問題，但是他的老師卻仍要求他把那些對他而言是簡單得很的題目詳細地寫下來。由於他的恃才傲物，對於能力不如他的同學感到無法忍受而顯得不耐煩，處處給他人的感覺是不凡和古怪，因此他和他的老師以及同學間似乎很疏遠。

十六歲時，伽羅華想要進入工藝學校 (Ecole Polytechnique) 深造，這是一間幫助很多數學家成名的著名學府。由於伽羅華的入學考試成績並不好，學術界失去一個識真才的機會。他雖感到非常失望，卻並沒有因此而失去信心。伽羅華十七歲時發表第一篇論文。他把自己關於解方程式的好些創見寫下來送到名重士林的科學院。院士柯西答應伽羅華一定會發表他的論文。但是柯西不但忘了發表該篇論文，甚至不知把它弄到那裏去了。十八歲的時候，伽羅華再次投考工藝學校，但是不幸又遭敗績。他超人一等的數學能力，再次使他蒙受不利。在這第二次考試，有一位口試官一味固執地持著錯誤的觀念，伽羅華據理力

爭，忍無可忍，拿起黑板擦擲出，板擦命中目標：口試官的臉，從此他與工藝學校絕緣。

十九歲那年，伽羅華遭受另一次無情的打擊。他的父親，當時仍為波鎮鎮長，由於支持鎮民反對地方教士，遭受教會的迫害，因為不堪虐待，憤而自殺。在葬禮進行中發生了暴動，有一個教士被石頭砸得皮破血流。這一幕情景加深了年輕的伽羅華對教會缺乏正義的怨懟。雖然心中非常沮喪和苦悶，日子卻還是要過下去。終於他取得了師範學校（Ecole Normale）的入學資格，準備教書生涯。伽羅華繼續獨立研究，又有個重大的發現，他把成果呈遞給科學院的秘書長傅立業（Fourier）。傅氏把他的論文拿回家研究，但是不久卻去世了，那篇論文也跟著失去蹤影。伽羅華評論說：「天才常遭受社會不公平的排擠，平庸的人卻反而處處得利。」他變得開始耽溺於政治活動，與一個激進組織交往密切。在1830年的「七月節」，巴黎爆發了革命。伽羅華在那兩次革命行動中成爲一個熱烈的擁護者和首要份子。他由於在校刊中發表激烈言論，抨擊校長是革命的迫害者，因而受到開除處分。由於對國事是非的不滿和覺醒，伽羅華參加了國民兵。此後他做了最後一次敲開學術界大門的嘗試，寫了一篇題目是「論方程式可用根式解的條件」的文章送交波瓦松（Poisson），卻遭波氏以「無法理解」爲由退還給他。

1831年，在一次聚會中，伽羅華提議爲國王路易士非力普（Louis Philippe）乾杯，被解釋成威脅國王的生命而被捕下獄，後獲無罪釋放。在法庭上，他曾大聲指責政治不公平，但爲通人情世故的法官勸止。在同一個月內，他因故第二次被捕。這次他被判有罪，處六個月有期徒刑，後來被假釋出獄。接著，伽羅華首次戀愛，愛上一個愛賣弄風騷的女子。他又是像以往一樣的倒楣，這件事並沒維持多久。過了不久，他和他的兩個政敵爲了這位前任女友的「榮譽」而被迫接受決鬥。這位天才橫溢的青年深知自己會在次日的決鬥中喪生，因此當晚持筆疾書，把他在數學上的發現記載下來，這份遺書是留給他的朋友齊瓦利爾（Chevalier），在遺書的最後一段，伽羅華表示希望把他的論文在 *Revue Encyclopedique* 上發表。

1832年5月30日伽羅華在手鎗決鬥中被射穿肚皮。他被留在那裏等死，後來有個農夫路經該地，把他送到醫院。二十一歲的他於入院第二天去世。

遺書在伽羅華死的那年刊於九月份的 *Revue Encyclopedique*，不過當時並沒有引起人們的注意。雖然遺稿中另二篇也曾預告要在該雜誌發表，可是後來也無下文。一直到十四年後，這些遺稿流到大數學家路易唯爾（Joseph Liouville）的手裏，才將之刊行。

其後大約過了四十年，焦丹（Camille Jordan）研讀了伽氏的方程式論文，焦丹因而寫出了「交換論」（Traite des substitution, 1870）。

逐漸地，人們發現伽羅華在決鬥前夕所寫的三十二頁紙實在意味深長，頗具價值。它確實讓數學家們忙了一陣子，事至今日，還有人集中心智更進一步地研究探討伽羅華首創的羣論。除了這些專門的發現，伽羅華還帶頭把數學導向抽象觀念的研究。他的理論即抽象化的羣概念被應用於有形的實體，例如物理學和化學在分析分子形狀中即採用羣論的概念<sup>(3)</sup>。

伽羅華的那些卓越超羣的意念大大地領先與他同時代人們的思考，以致未能爲當代數學家所賞識，實爲天才數學家的悲哀<sup>(4)</sup>。

註釋：

(1)科學圖書社出版的數學選粹第一集中，莫宗堅所寫「中國數學簡史」一文曾提到「中國人在漢代就已解決了任意多元一次聯立方程組。歐洲到了十六世紀才解決了三元一次聯立方程組。其餘例如開平方根，開立方根，開任意高次根，二項式係數定理，還有所謂魯斐尼——霍納法求一元高次方程式的數值解（十九世紀），以及三次方程式的解等等，都是中國人在十一世紀以前次第創立。

(2)對這段數學史感興趣的讀者可參閱臺大數學系李自飛教授在第十卷第四期科學月刊上所發表的「代數學的故事」一文。

(3)天才數學家的思考超越同時代的人，不爲當代人所賞識，古今中外皆然。這使筆者聯想到我國古代

## 82 數學傳播〔資料類〕

的數學家祖冲之。祖冲之字文遠，生於西元 429 年，卒於 500 年。他是南北朝時代南朝宋、齊之間的一位傑出數學家。祖氏世代都對天文曆法有研究，他從小就「專攻數術，搜煉古今」。祖氏最出名的成就是對圓周率的推算，得出  $3.1415926 < \pi < 3.1415927$  的重大結果。祖冲之的數學專著綴術現已失傳。隋書中寫道：「……祖冲之……所著書，名爲綴術，學官莫能究其深奧，是故廢而不理。」祖氏的遭遇實比伽羅華更不幸，也是我國數學史上的一個莫大損失。

(4)對於「羣」的應用感興趣的讀者請參閱人間文化事業公司所出版的「對稱」一書。( 人間通俗數學講話第十冊)。

### 參考資料：

1. Mario F Triola *Mathematics and the modern world*, Cumming Publishings Co. 1973.
2. Edna E. Kramer *The nature and growth of modern mathematics*, Vol.2 Fawcett Publications Inc 1970.
3. 戴久永：數的運用 衆文圖書公司出版。
4. 高木貞治：近世數學史談 臺灣商務印書館發行。

——本文作者現任教於交大運輸管理系