數 學 科 模 擬 試 題 題 解

朱建正 提供

（題目內容請參閱本刊第12期第37頁）

有人要求我提供12期模擬試題的解答。我這兒採用比較不正式的答法。儘量把問題的來龍去脈呈獻給大家。此試題去年曾爲某省中採用，因採電腦閱卷，故有統計數字，目的是對問題的難易提供一個客觀的參考。因爲我不小心，加上過分匆忙，以致未能在考前做過澈底檢查，故第 1,2,28 三題無法計分，因此欠統計數字。甲組到考人數 436 人，丙組 82 人。以下每題列四個數字，第一個數字表示甲組答題人數，第二個數字表示答對人數，第三、四個數對應丙組考生。

【甲】 關於這題的來路，我已在12期感想中說過，不再贅述。

解：因$\sqrt{5}\doteqdot 2.24$，故$(1+\sqrt{5})/4\doteqdot 0.81$，故 $\cos\theta\doteqdot 0.81$，故 $30°<\theta<45°$。故可立刻猜知 $\theta=36°$。總之，在有限的時間內，此題非猜不可。但是，有一點背景知識有助於猜此題。即當角度是 3 的倍數時，其正弦、餘弦函數值可用不太複雜的根數表示。故 k 不可能是 7, 9, 11, 13。這個解法其實是楊維哲教我的，比較客觀合理。

其次要算 $2^{18}+3^{7}+5^{8}+7^{11}+9^{13}$ 除以 10 的餘數，先計算各項的個位數。因此個位數是指數的週期函數，故首先算出週期，其次算除週期的餘數。

因　2, 4, 8, 6　而 18÷4 餘 2　故 2^{18} 的個位數 4

　　3, 9, 7, 1　　　7÷4 餘 3　　3^{7} 的個位數 7

同理得其他三項的個位數分別爲 5, 3, 9。

4＋7＋5＋3＋9 的個位數爲 8。

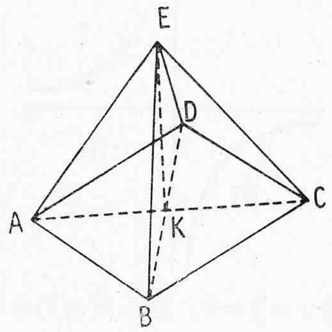
$\cos 8\theta=-\cos 3\theta=\sin 18°$ 爲第四象限角，故選唯一的第四象限角E。

檢討： 這一題弄給學生選的東西太複雜，⑴宜改爲單選，並以 $k=8,9,10,11,12$ 爲之即可。⑵的問題太繁，宜改爲例如 $2^{11}+5^{9}$ 即可。答案也可改用一個象限出一個選擇，加上含正確答案的象限出兩個，這樣就難些。若後者只出一個則易些。此題忌用以上皆非。

【乙】 189/33, 47/15

此題完全在計算正八面體的體積。正八、十二、二十面體的體積都不好算，但是正八面體還可以考。本題大概採自數播外國競試資料。

下圖示正八面體的上半部，令 $AE=1$。因自中心K至各頂點的距離應相等，故$KE=KB=1/\sqrt{2}$。



故正方形$ABCD$的面積爲 1。正八面體體積爲$\sqrt{2}/3$。自正四面體的頂點向底作垂線，垂足應在底的正三角形的中心，此中心距頂點 $2/3\times\sqrt{3}/2=1/\sqrt{3}$，由畢氏定理得高爲$\sqrt{1-1/3}=\sqrt{2/3}$。故正四面體體積爲$\sqrt{2/3}\times(\sqrt{3}/4)/3=\sqrt{2}/12$，故得體積比爲 1/4。此題的關鍵在於注意到$ABCD$是正方形。

【丙】 414/323, 79/58

此題爲模仿題，但是兼有相依方程式和不定方程式，答案爲E。解法用分離係數的加減消去法，即矩陣的基本列運算。(elementary row operation)

$$\begin{pmatrix}2&1&-2&1\\4&-2&3&2\\6&3&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}14&7&0&7\\-14&-7&0&-7\\6&3&1&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&1&0&1\\6&3&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

故得 $z=0$，$2x+y=1$，有無窮多組整數解。我認爲這個問題不錯，並且有很多變化。

【丁】 220/74, 48/17

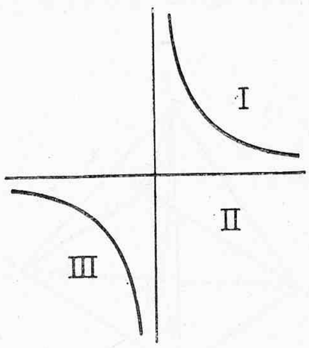
我覺得在公式

$$\arctan x+\arctan y=\operatorname{arc}\ \tan\frac{x+y}{1-xy}+\mu(x,y)\pi$$

定 $\mu(x,z)$ 最合理的辦法，是採用較高級的連續概念。

考慮曲線 $1-xy=0$ 它將平面分成互相連通的三個部分。在同一部分裏，$\arctan x$, $\arctan y$, $\arctan((x+y)/(1-xy))$ 都是連續的。換句話說，當 x，y 變化一點點時，上述三個函數也只能變化一點點。而 $\mu(x,y)$ 的值爲 ± 1 或 0，所以在同一部分中，$\mu(x,y)$ 一定要保持不變。

在I中，可令 x，y 爲很大正數，則左邊超過 $\pi/2$，右邊的 $\arctan((x+y)/(1-xy))$ 爲負，但絕對值小於 $\pi/4$ 故 $\mu(x,y)=1$。



在II中，令 $x=y=0$，故得 $\mu(x,y)=0$。

在III中，令 x，y 爲很大負數，類似I的討論得 $\mu(x,y)=-1$。易知 $(5,6)\in I$，$(-1/4,5)$，$(1/3,-1/3)$，$(1/2,1/3)$ 皆屬於II，$(-2,-1)\in$ III

【戊】 第 10 題 398/372, 79/78；第 11 題 280/49, 50/7

我聽說有學生會背內心、外心的公式，實在駭人聽聞，因此出了本題。解法以在坐標平面上作圖最適當。作圖後，立可看出等腰直角三角形。

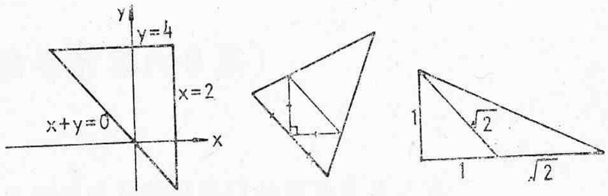
次一部分以平面幾何爲之。將等腰直角三角形縮小，使其一股定爲 1。其三傍心所成三角形亦爲等腰，底角爲 $\pi/2-\pi/8$。且底邊長爲 2。故

$$\tilde{\Sigma}=\frac{1}{2}\times 2\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\cot\frac{\pi}{8}=1+\sqrt{2}\doteqdot 2.414$$

故

$$\Sigma/A=\tilde{\Sigma}/\tfrac{1}{2}\doteqdot 4.828$$

這題將原三角形按比例縮小，節省了計算，在考場上不一定想得到。



【己】 268/183, 51/37

這題是抄別人的，因爲我覺得蠻有意思。五個選擇中，(D)嫌麻煩一點，浪費考生時間，並有誤導作用。

【庚】 378/20, 80/8

前年系裏來了一位客座日籍教授。他喜歡趣味數學問題。他說他有時參加開會覺得無聊時，便從黑板上的兩個數字，普通議案通過最低票數（例如25），重要議案通過最低票數（例如33）來算出席人數，因此引起我出此題。令人驚訝的是答對的比例很小。他們都選50去了。

【辛】 345/257, 65/44

有一個智力測驗說：細菌每分鐘增殖一倍。什麼時候細菌的數量是一小時的時候的一半？這是我出本題的根據。因爲每年都有對數指數關係，所以出此題，圖個新鮮。

因爲 1 億每除以一個 2，商的非零部分便多出一個 5 的因子。檢查 $15625=125^2$，可知爲 5^6，故得 $20-6=14$。

「以指數函數的模型增加」是許多實際事物的變化形式，如化學反應速度，放射元素衰變，人口問題等，這種考法是最簡單的。答案也可以由計算

$$(\log_{10}10^8-\log_{10}1,562,500)\div 0.301$$
$$\doteqdot(8-6.15)\div 0.301\doteqdot 6$$

而得。因 $\log_{10}2=0.301$，而 $\log_{10}1=0$，所以我估 $\log_{10}1.5$ 爲 0.15。（正確值爲 0.17）這樣算比較直截。

【壬】 第 19 題 309/210, 65/54；第 20 題 228/22, 51/3

許多人覺得不易考作圖題，因此我借用圖形分割的概念來考作圖。此題考生需能立刻概略畫出不甚離譜的圖形，而且也考了極坐標。圓錐曲線用極坐標表示是很有用的，如行星軌道的討論要用這種。

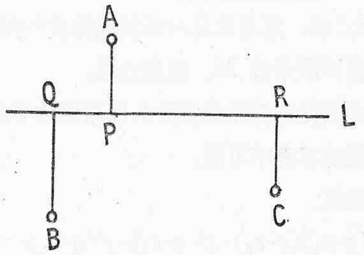
【癸】 第 22 題 177/7,41/1; 第 23 題 82/13,18/3

這一題源自數學分析 4500 題之第 1460 及 3710 題。從分析的觀點看，這題有一個重要的意義。即若考慮所有在〔1,3〕上定義的連續函數爲一個距離空間。並以

$$\max_{1\le x\le 3}|f(x)-g(x)|$$

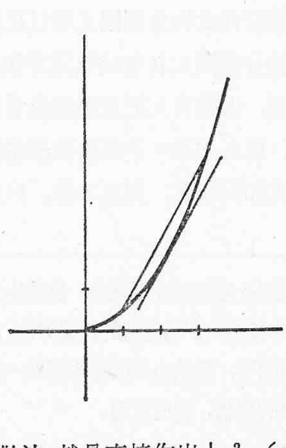
來定義 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的距離。則在所有線性函數 $ax+b$ 中，以 $4x-7/2$ 最接近 x^2。因恐學生無法作答，故先以三角形的問題做介紹。

作一組平行線分別過 A,B,C 三點。與直線 L 相交於

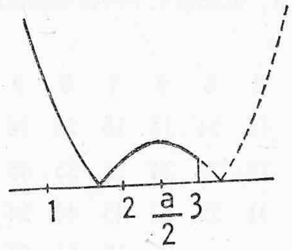


A',B',C'。則 AA',BB'，與 CC' 之比等於 A,B,C 至 L 的距離之比。現在自 A 至 L 作垂線交於 P。固定 P 而使 L 轉動。顯然當 B,C 至 L 的距離相等時 $max(BQ,CR)$ 爲最小，而且當 L 轉動時，A 至 L 的距離也只會減少，不會增加。此時 L 平行 BC。欲再使 $max(AP,BQ,CR)$ 爲最小，則令 $AP=BQ=CR$ 卽可。理論上需要令 L 平行 AC,BC,CA 各做一次，再取極小。實際上可證答案的 L 必平行最大邊。

$|x^2-(ax+b)|$ 是二次函數合成絕對值函數，所以它的極大、極小一定是發生在端點，或導函數爲 0 的點。導函數爲 0 的點隨着斜率 a 的變化會移動。但沒有關係，實際的情形和上面類似。可將這三點當做上題的 A,B,C。A 最後定在 $(2,4)$ 之處。



另外有一個做法，就是直接作出 $|x^2-(ax+b)|$ 的圖形。圖形爲將 x^2 平移至頂點爲 $(a/2,a^2/4+b)$ 再將小於零之部



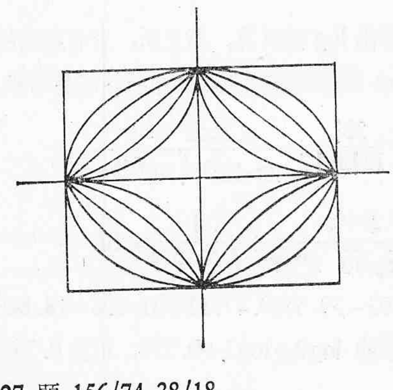
分上翻卽得。觀察可知當 $a/2$ 在 1，3 中點時最適合，a 定了以後，b 就容易決定了。

【子】

我對 $|x/a|^n+|y/b|^n=1$ 這個方程式特別感到興趣的原因是丹麥詩人兼發明家 Piet Hein 曾經利用這個方程式替斯德哥爾摩的 Sergel 方形廣場設計一個不圓不方的圖形作爲主題。他考慮 $|x|^n+|y|^n=1$，知道 $n=2$ 時爲圓，$n\to\infty$ 時爲正方形，所以定 $n=2$ 又 1/2 爲一個眞方圓，因爲它是方與圓的藝術上的調和。此事後來被 *Scientific American* 的 Martin Gardner 拿來大做文章，最後他的讀者們定 $n=e=2.71828\cdots\cdots$, $a/b=$黃金分割時，爲最美麗的方圓。

極限很少考到，卽使考了，也不是用很明顯的方式。我這題學生只要了解若 $x>1$，則 $x^n\to\infty$, $x<1$，則 $x^n\to 0$，$x=1$ 則 $x^n\to 1$，以及 $x^{1/n}\to 1$ 對所有 $x>0$ 均成立，就會做了。圖形的極限也是用直觀的說法。

當 n 趨近無窮大時，所有 $(\pm a,y),|y|<b$，以及 $(x,\pm b),|x|<a$，都是極限圖形上的點，而且這是所有的點。當 n 趨近於 0 時，若 $xy\neq 0$，則 $|x/a|^n+|y/b|^n\to 2$，因此必有 $x=0$，或 $y=0$ 不可。故 $(0,y),(x,0)$ 都是圖形上的點。但因 n 不趨於 0 時，圖形都是在 $|x|\le a,|y|\le b$ 的範圍內，故其極限應限於這範圍內的十字。



【丑】 第 27 題 156/74,38/18

或然率不是我的專長，所以這題也是模仿。這題很繁，我自己也不太喜歡。解法硬算而已。不過如果算時排列齊

整，就能迅速確實。此點學生平時需要練習，否則還是不容好。

n值	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	11	12	13	14	15	16	26	36	46	56	66
		21	22	23	24	25	35	45	55	65	
			31	32	42	43	44	54	64		
					51	52	53	63			
						61	62				
S_n 概率×1/54	1	3	④	6	7	9	8	6	5	3	2
$P(S_n\cap E)$	0	1	2	2	4	3	6	2	4	1	2

$$\frac{1}{54}(2+9+16+30+42+63+64+54+50+33+24)$$

$$=\frac{1}{54}\times 387\div 7.13$$

故選D

其次觀察上表可知，除了$n=4$以外，E與 S_n 均相關。

討論：列出上表時，機警的考生可以只列第一次出現之點，以節省時間，完全不列，更佳，不過易出錯，不過從這題可知，所謂獨立事件只是數學定義而已。

二骰子點數和之機率可使用生成多項式函數 $1/6\,(x^1+x^2+\cdots\cdots+x^6)\cdot 1/9(x^1+2x^2+x^3+2x^4+x^5+2x^6)=1/54\,(x^2+\cdots\cdots+2x^{12})$ 較易

第30題　350/235, 67/43　第31題　357/213, 72/41

第32題　370/356, 70/69　第33題　366/356, 72/71

【寅】我讀高小時，曾考過智力測驗，其中的一大題，分10小題都是這類的問題，當時算得頭昏腦漲。這題在加拿大初中競試中也有，是老少咸宜的題目。第 33 題開個玩笑

第34題　146/45, 29/7,　第35題　114/10, 26/1

【卯】每年都出 log 的計算，爲求新，求有意義起見，出了此題。Stirling 公式雖然陌生，套用應該沒有困難。

$$C^{52}_{13}=\frac{52!}{13!\,39!}\div\frac{\sqrt{2\pi}\,52^{52+\frac{1}{2}}e^{-52}}{2\pi\cdot 13^{13+\frac{1}{2}}39^{39+\frac{1}{2}}e^{-52}}$$

$$=\frac{4^{52+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{13}\;\;3^{39+\frac{1}{2}}}\div\frac{1}{2.5\times 3.6}\times 10^{2\times 52.5\times log2-39.5\times log3}$$

$105\times 0.30103-39.5\times 0.47712\div 31.608-18.846=12.762$

查參考數據 $\log 2+\log 3\div 0.778$，可知 0.762 的眞值很接近 6，

$$6\div(2.5\times 3.6)=6\div 9，可知\beta=11$$

我發覺這一題不用 log，硬乘開來也勉強可行。

$$C^{52}_{13}\cdot C^{39}_{13}\cdot C^{26}_{13}=\frac{52!}{(13!)^4}\div\frac{\sqrt{2\pi}\,52^{52.5}}{(2\pi)^2(13^{13.5})^4}=\frac{4^{52.5}}{2\pi\sqrt{2\pi}/3\sqrt{13}}$$

$$=\frac{4^{52}}{3.14\times 2.51\times 13\times 3.6}\div\frac{10^{31.3}}{36.7}\div\frac{2\times 10^{31}}{36.7}$$

故得 $\delta=29$

【辰】第36題　92/1, 23/1　第37題　199/44, 39/9

$$\frac{x^2}{q-e_1}+\frac{y^2}{q-e_2}=1$$

的焦點不因 q 而變。此所謂共焦點橢圓(或錐線)坐標系。我把它拿來倒過來出。傳統的解析幾何教科書都有此題。我手頭的參考資料是數學分析導引（下，49頁）（凡異出版社)。36, 37有重覆之處，這是故意冲淡問題難度的做法。了解 37 的意義後，再回頭來做 36，應無困難。

這一題必須從錐線系的圖形的連續變化看出，純粹用代數方法去驗證差不多不可能。

將原式變成:

$$(q-e_1)(q-e_2)-x^2(q-e_2)-y^2(q-e_1)=0$$

由函數的符號變化，立知一根在 e_1，e_2 之間，另一根大於 e_1 及 e_2。

【己】354/262, 65/46

三個線性無關的向量展出的平行六面體的體積爲$\overrightarrow{U}\times\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{W}$。這是本題的根據。同理，也可以出四面體的體積的問題。

【午】152/2, 27/0

原題有誤。這是「數播」校對水準不夠所致，但不妨。因無 x^6y^2z 項，故$\alpha=0$。又因 x^5y^3z 項的係數爲1，故$\beta=1$，所以僅剩 γ 必須計算。可令$x=0$，$y=1$，$z=-1$，$u=2$，得左邊$=0$，計算右邊得 $r=2$。

說明：因前年出過交代式的分解因式所以出此題。交代式、對稱式、輪換式的分解因式各有其固定方法，到底高中該不該教，是一個問題，因爲有人把這種問題看成舊數學復活的象徵。因此歎說，現在的學生是新舊數學都要學了。如果將問題限制於交代式和對稱式，則並不難，只是要計算罷了。

註: 本試題的理想是使繁複計算減少，但學生必須具有計算的意願和能力，才能做出。循正確的計算方法，則答案甚易求得。省嘉中的陳獻平，王秋夫兩位老師寄來一份解答，使我得以據以改正我的原稿，特此致謝。

——本文作者現任教於臺大數學系