上期演練試題解答

模 擬 試 題 解 答

羅添壽 提供

1. B, D

說明: 依題意知全體考生的平均分數爲 $(k+2)$ 分，
及格考生的平均分數爲 $(k+11)$ 分，
不及格考生的平均分數爲 $k/2$ 分。
設全體人數爲 x 人，則

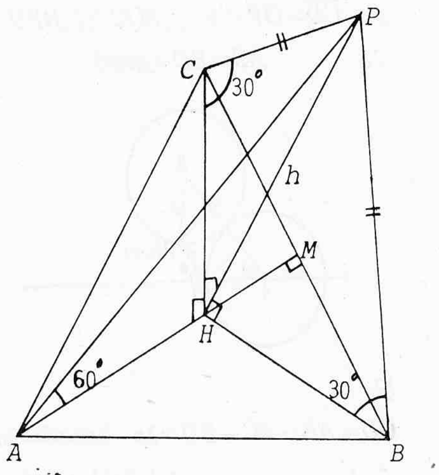
$$(k+2)\cdot x=\frac{1}{4}x\cdot\frac{k}{2}+\frac{3}{4}x\cdot(k+11)$$

$$\Longrightarrow \quad 7k+66=8k+16$$

$$\Longrightarrow \quad k=50 \text{ 分}$$

2. C, D

說明 $\triangle AHP$ 中，$\because \angle PAH=60^\circ$，
$\therefore$ 由 30−60−90 定理知 $AH=k/\sqrt{3}$。令
$PH=h$



又 $\triangle BPH \cong \triangle CPH$ (A. A. S 全等)

$\therefore PH=BH$

$\therefore \overrightarrow{AH}$ 交 $\overline{BC}$ 於其中點 M.

又 $\tan 30^\circ=PH/BH$

$$\Longrightarrow BH=PH\cdot\cot 30^\circ=\sqrt{3}h$$

同理 $CH=\sqrt{3}h$

$\therefore \quad HM=\sqrt{3}/2-h/\sqrt{3}$

($\because$ 正 $\triangle ABC$ 之邊長爲 1)

$\triangle HMB$ 中由畢氏定理知

$$BH^2=BM^2+MH^2$$

$$\Longrightarrow(\sqrt{3}h)^2=(1/2)^2+(\sqrt{3}/2-h/\sqrt{3})^2$$

$$\Longrightarrow h=\frac{-3+\sqrt{105}}{16}=\frac{-3+10.24}{16}\doteqdot 0.45$$

$\therefore \quad m=4,\ n=5$

$\therefore \quad \log_m n>\log_n m$, 且 $mn=20$

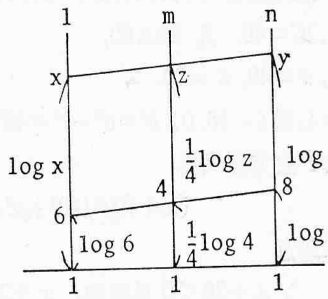
3. A, B, C, E

說明:

由梯形性質知

$$\frac{1}{2}\{(\log x-\log 6)+(\log y-\log 8)\}$$

$$=\frac{1}{4}(\log z-\log 4)$$



$$\Longrightarrow(xy/48)^2=z/4$$

$$\Longrightarrow z=x^2y^2/576$$

依題意知 $a=16^2\cdot 18^2/576=144$

且 $324=30^2\cdot b^2/576 \Longrightarrow b=14.4$

4. B, C, D

說明: $\overleftrightarrow{AB}$: $(y+60)/(x-60)=-100/50$, 令 $y=0$,

$\Longrightarrow x=30 \quad \therefore C(30,0) \quad \therefore m=30,\ n=0$

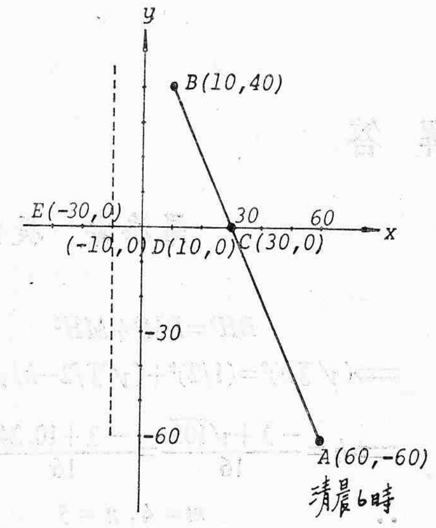
又

$$AC=\sqrt{(60-30)^2+(-60-0)^2}=\sqrt{4500}=10\sqrt{45}$$

$\therefore$ 到達 P 之時間爲

$$t=6+\sqrt{4500}/\sqrt{1000}=6+\sqrt{4.5}\doteqdot 8.\cdots\cdots$$

$\therefore m=30,\ n=0,\ t<9$ 且 $t>8$



5. E

說明：令 $P(x,y)$，由 $CD+CE=PD+PE$ 知 $D(10,0), E(-30,0)$

$\therefore 20+60=\sqrt{(x-10)^2+y^2}+\sqrt{(x+30)^2+y^2}$

卽動點 $P(x,y)$ 至二定點 $D(10,0), E(-30,0)$ 之距離爲定數 80。

$\therefore P$ 之軌跡爲橢圓。

$\because$ 二焦點爲 $D(10,0), E(-30,0)$

$\therefore 2C=40$，且 $2a=80$，

$\therefore a=40,\ c=20$，

中心爲 $(-10,0)$，$b^2=a^2-c^2=40^2-20^2=1200$

$\therefore P$ 之方程式爲

$$(x+10)^2/40^2+y^2/1200=1$$

依題意

$\because x+20\leq 0$ 爲陸地，$x+20>0$ 爲海洋。

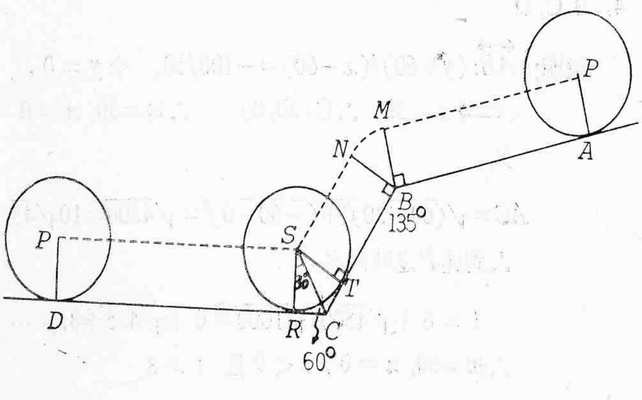
$\therefore$ 令 $x=-20 \Longrightarrow y=33.5$

卽 $r=-20,\ s=33.5$

$\therefore |r|+|s|=53.5 \doteqdot 54$

6, C.

說明：如圖 P 之軌跡爲虛線，$\angle MBN=\pi/4$



$\therefore \widehat{MN}$ 之長爲 $1\cdot(\pi/4)=\pi/4$

又 $\angle SCT=\angle SCR=\pi/3$

$\therefore CT=RC=\tan(\pi/6)=1/\sqrt{3}$

P 軌跡長爲

$$PM+\widehat{MN}+NS+SQ$$
$$=AB+\widehat{MN}+(BC-CT)+(CD-CR)$$
$$=AB+BC+CD+\widehat{MN}-2CT$$
$$=AB+BC+CD+\pi/4-2/\sqrt{3}$$

7. B.

說明：依題意

$$3\pi+BT+\widehat{TR}+RD=2k\pi,\ (k\in N)$$

$\therefore\ 2k\pi=3\pi+(BC-CT)+\pi/3+(CD-CR)$

$=10\pi/3+BC+(4\pi+\sqrt{3}/3)-2/\sqrt{3}$

$=22\pi/3-\sqrt{3}/3+BC$

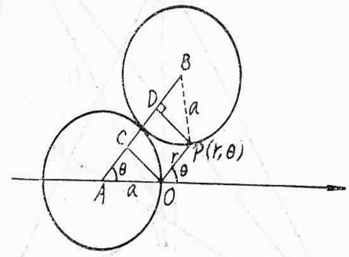
k 最小值取 12，則 $BC=2\pi/3+\sqrt{3}/3$

8. D

說明：如圖，令點 P 之極坐標爲 (r,θ)，自 O, P 各作線段 $\overline{AB}$ 之垂線段 $\overline{OC}, \overline{PD}$，且 $\overline{OP}//\overline{AB}$，則 $OPDC$ 爲一矩形。

$\therefore\ \overline{CD}=OP=r$，$\triangle AOC\cong\triangle BPD$ (A.A.S)

$\therefore\ AC=BD=a\cos\theta$



又

$CD=AB-AC-BD=2a-2a\cos\theta=2a(1-\cos\theta)$

$\therefore\ r=2a(1-\cos\theta)$

9. B, C, E

說明：$\because a, b$ 爲五位數，

$\therefore 10^4\leq a<10^5, 10^4\leq b<10^5$ 相加得

$$2\cdot 10^4\leq a+b<2\cdot 10^5$$

取對數（2 爲底）

$$1+4\log_2 10\leq\log_2(a+b)<1+5\log_2 10$$

$\Longrightarrow\ 1+4\times 3.3223\leq\log_2(a+b)<1+5\times 3.3223$

$\Longrightarrow\ 14.2892\leq\log_2(a+b)<17\cdot 76115$

$\therefore$ 由對數之首數與位數問題知

$$M=17+1=18, m=14+1=15$$

$\therefore \quad M+m=33$

10. C, E

說明: 設 A, B, C 三廠, 前月份之收入分別爲 x 元, y 元, z 元。依題意得

$$\begin{cases} 0.2x=0.15y=0.12z \cdots\cdots ① \\ 1.2x+1.15y+1.12z=13800 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

由①, ②得 $x=3000$

$\Longrightarrow 1.2x=3600$ 元, $1.15y=4600$ 元, $1.12z=5600$ 元

11. D

說明: 令 $AB=2x$ 公尺, $AD=y$ 公尺, 則

$2\times 22/7\times x+2y=400 \Longrightarrow 2y$
$=(400-44x/7)$ 公尺……①

又 $22x^2/7+2xy=7000$……②

①代入②

$$22x^2/7+(400-44x/7)\cdot x=7000$$
$$\Longrightarrow 11x^2-2\times 700x+24500=0$$

$\therefore x=(700\pm\sqrt{700^2-11\times 24500})/11=(700\pm 210\sqrt{5})/11$

$\Longrightarrow x=106.32$ 或 20.94

代入①, 但

$y>0 \Longrightarrow x=106.32$ (不合)

$\therefore \quad x=20.94$

$\therefore \quad AB=2x\doteqdot 41.9$

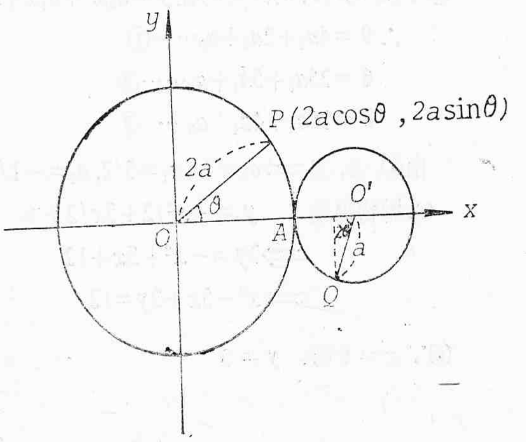
12. B

說明: 設原點爲 O, x 軸爲 OO', 則

$P(2a\cos\theta, 2a\sin\theta)$, $Q(3a-a\cos2\theta; -a\sin2\theta)$

$\therefore PQ^2=(2a\cos\theta-3a+a\cos2\theta)^2+(2a\sin\theta+a\sin2\theta)^2$
$=a^2[4\cos^2\theta+9+\cos^2 2\theta-12\cos\theta-6\cos2\theta$
$+4\cos\theta\cos2\theta+4\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+4\sin\theta\sin2\theta]$
$=a^2[4+1+9+4\cos(2\theta-\theta)-12\cos\theta-6\cos2\theta]$
$=2a^2[7-4\cos\theta-3\cos2\theta]$
$=2a^2[7-4\cos\theta-3(2\cos^2\theta-1)]$
$=2a^2[10-4\cos\theta-6\cos^2\theta]$
$=4a^2[5-2\cos\theta-3\cos^2\theta]$

$\therefore PQ=2a\sqrt{5-2\cos\theta-3\cos^2\theta}$



13. A, B, C, D, E

說明: $\because \quad PQ=2a\sqrt{16/3-3(\cos\theta+1/3)^2}$

$\Longrightarrow$ 當 $\cos\theta=-1/3$ 有最大値

$\therefore PQ$ 之最大値當 $8\sqrt{3}a/3=4.62a$

14. B, E

說明: $\because N=5x+y+(z/5+z/5^2+z/5^3+\cdots\cdots)$
$=5x+y+z/(5-1)=5x+y+z/4$

又 $N-1=7z+y+x/(7-1)=7z+y+x/6$

$\therefore 5x+y+z/4=7z+y+x/6+1$……①

但, x, y, z 爲滿足

由 $1\leq x\leq 4$, $0\leq y\leq 4$, $1\leq z\leq 4$ 之整數…②

由①式得 $58x=81z+12$…………………③

$\Longrightarrow 81z=58x-12$ 爲偶數

$\Longrightarrow z$ 爲偶數 $\Longrightarrow z=2$ 或 4

討論: 當 $z=2$ 時 $\Longrightarrow x=3$, $0\leq y\leq 4$

當 $z=4$ 時 $\Longrightarrow x=5+23/29$ (不合)

$\therefore x=3$, $y=0, 1, 2, 3, 4$, $z=2$

15. A, D

說明: $OP=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$ 又 $OQ=5$,

$\therefore \quad PQ=4$

今利用向量之性質解題較快

$\because \quad \overrightarrow{OP}=[2\sqrt{2}, 1]$,

$\therefore$ 與 $\overrightarrow{OP}$ 垂直之任一向量爲

$[1, -2\sqrt{2}]$ 或 $[-1, 2\sqrt{2}]$

此時之方向之單位向量爲

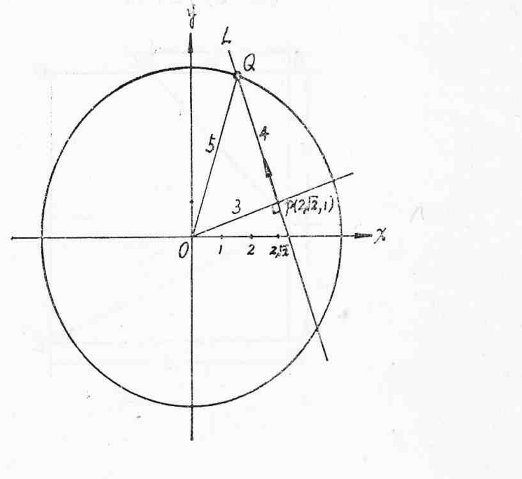
$[1/3, -2\sqrt{2}/3]$ 或 $[-1/3, 2\sqrt{2}/3]$

$\therefore Q$ 之坐標爲

$$\begin{cases} x=(2\sqrt{2}+(1/3\times 4)=2\sqrt{2}+4/3 \\ y=1-(2\sqrt{2}/3\times 4)=1-8\sqrt{2}/3 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x=2\sqrt{2}-(1/3\times 4)=2\sqrt{2}-4/3 \\ y=1+(2\sqrt{2}/3\times 4)=1+8\sqrt{2}/3 \end{cases}$$



16. A

說明: $a\triangle OPQ=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$

17. B, D

說明: 設A組的人數是x人，則B組的人數是$(100-x)$人，∵全體的平均成積是 73.2，故總分是$100\times 73.2=7320$ 分，A 組的平均成績是 70.5 分，故A組的總分是 $70.5x$ 分，又B組的平均成績是 75.6分，故B組的總分是 $(100-x)\cdot 75.6$ 分

∴ $70.5x+(100-x)75.6=7320$

$\Longrightarrow 705x+(100-x)756=73200$

$\Longrightarrow 51x=2400\Longrightarrow x=47$

∴A組人數為 47 人，B組人數為 53 人

18. C

說明: 令

$a=7,\ b=5,\ c=3\Longrightarrow S=(3+5+7)/2=15/2$

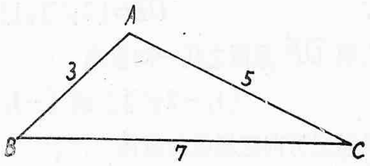
由 $\triangle=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ 知

$\triangle=\sqrt{15/2(15/2-7)(15/2-5)(15/2-3)}$

$=15\sqrt{13}/4$

$R=abc/4\triangle=7\cdot 5\cdot 3/15\sqrt{3}=7\sqrt{3}/3$

(R表外接圓之半徑)



19. A, C, D

說明: 令 $AP=x$，設面積為K，則

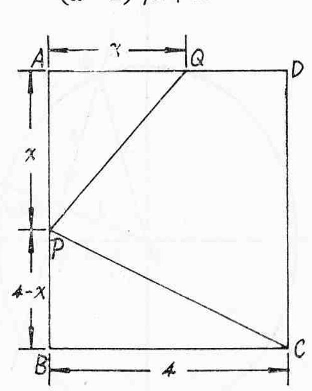
$K(x)=a\square ABCD-a\triangle APQ-a\triangle ABC$

$=4^2-x^2/2-4\cdot(4-x)/2$

$=-x^2/2+2x+8$

$=-(x^2-4x+4)/2+10$

$=-(x-2)^2/2+10$



∴當 $x=2$ 時，最大面積為10,

∴ $a=2,\ b=10$

20. ①E ②B, D ③B, D ④C, E

說明:

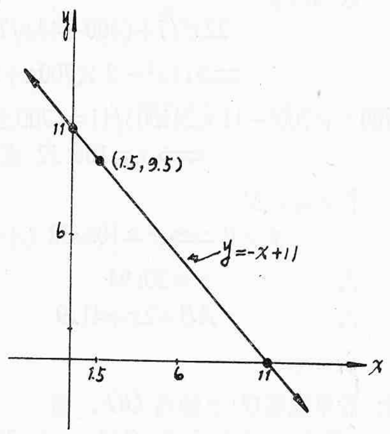
① $y=a_1x+a_0$,

∵ $x=2$ 時，$y=9$，$x=5$ 時，$y=6$

$$\Longrightarrow\begin{cases}9=2a_1+a_0\\6=5a_1+a_0\end{cases}\Longrightarrow a_1=-1,\ a_0=11$$

∴ $y=-x+11$

②



∵$9.5=-x+11\Longrightarrow x=11-9.5=1.5$

即 $x\leq 1.5$ 則 $y\geq 9.5$

即 價格低於 1.5 皆可

若 $x=0.5\Longrightarrow y=-0.5+11$

$\Longrightarrow y=10.5>9.5$ (不合)

③∵(2, 9), (5, 6), (4, 8)在 $y=a_2x^2+a_1x+a_0$ 上

∴ $9=4a_2+2a_1+a_0$……①

$6=25a_2+5a_1+a_0$……②

$8=16a_2+4a_1+a_0$……③

由①, ②, ③$\Longrightarrow a_0=6,\ a_1=5/2,\ a_2=-1/2$

∴拋物線為 $y=-x^2/2+5x/2+6$

$\Longrightarrow 2y=-x^2+5x+12$

$\Longrightarrow x^2-5x+2y=12$

④∵ $x=6$ 時，$y=3$