談向量的外積

王九逵　胡門昌

在教育部頒佈的現行課程標準中，在高中數學及大學的向量分析課程中講向量，在大學的線性代數課程中也講向量，而且二者都討論向量的代數運算，但二者之間有很大的不同: 在線性代數中，向量空間的維數可以是任意正整數，而討論的運算不外是向量的加法、用實數乘向量的乘法、以及向量的內積。在高中數學和向量分析中，向量空間只限於三維，而運算除了上述的三種外，還有外積。我們的問題是:

爲什麼只在三維空間中講向量的外積呢？ 這是應用的觀點使然呢？ 還是有更深奧的理由呢？

爲了詳論這問題，我們需要把外積的觀念作有系統的陳述。假定V是實數體$\boldsymbol{R}$上的向量空間。對V中的任意兩個向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$，我們要求有它們的外積 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\in V$定義着，使下列條件得以滿足:

1. 對 $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R},\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$，我們有
$$(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\alpha\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\beta\mathbf{v}\times\mathbf{w},$$
$$\mathbf{w}\times(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})=\alpha\mathbf{w}\times\mathbf{u}+\beta\mathbf{w}\times\mathbf{v}.$$
2. 若 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$， $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 線性相關，則 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=0$。
3. 若 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$， $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 線性無關，則 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 仍然線性無關。
4. 若 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$，則 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ 是 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的線性組合。
5. V中至少有兩個線性無關的向量。

這些條件的選擇，是由尋常三維空間中的外積提示的。條件 1 便是通常的分配律。在三維空間中取兩個向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$，用它們當邊的平行四邊形面積爲0的充要條件，顯然是 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 線性相關。因爲 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 的長度便等於這面積，而其方向和上述的平行四邊形垂直，所以條件 2 和條件 3 都成立。向量三重積的公式是
$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u},$$
這提示了條件 4。我們要求條件 5 的目標是避免簡單的情況，以求言之有物。

從條件 2，對於任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$，都有
$$\begin{aligned}0&=(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{u}\times\mathbf{u}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\mathbf{u}+\mathbf{v}\times\mathbf{v}\\&=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\mathbf{u}\end{aligned}$$
因此
$$\mathbf{v}\times\mathbf{u}=-\mathbf{u}\times\mathbf{v}$$
這公式在下文的討論中將有用處。

我們剛纔說過，尋常三維空間的外積滿足上述的五個條件。事實上，如果在向量空間V中有外積定義着，使上述的五個條件都成立，則V的維數一定是3，我們證明這事實如下:

從條件5，選擇V中線性無關的兩個向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$。令$\mathbf{p}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$，從條件3知 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 和$\mathbf{p}$產生V的一個三維子空間 V_1。倘若 $V_1\neq V$，在 V_1 外取一向量 $\mathbf{w}$。則 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{w}$ 線性無關，從條件3知$\mathbf{w},\mathbf{p}$和 $\mathbf{w}\times\mathbf{p}$ 線性無關；再從條件3知 $\mathbf{p},\mathbf{w}\times\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{p})$ 線性無關。因此

$$\mathbf{p}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{p})\neq 0$$

但因

$$\mathbf{p}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{p})=(\mathbf{w}\times\mathbf{p})\times(-\mathbf{p})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times(\mathbf{w}\times\mathbf{p}),$$

所以它是 $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{p}$ 的線性組合，也是 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的線性組合（條件4）。即有實數 a,b,c,d 使

$$\mathbf{p}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{p})=a\mathbf{u}+b\mathbf{v}=c\mathbf{p}+d\mathbf{w}\neq 0$$

但如此a，b必不同時爲0，可是 $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}-c\mathbf{p}-d\mathbf{w}=0$。
這和 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{p},\mathbf{w}$ 線性無關的結果矛盾。從而得到$V_1=V$，也就是說V是三維的向量空間。

以上的討論說明了在三維空間中講外積，有其理論上的必然性。但卽使同在三維空間講外積，所講的代數體系是否同構，還是一個問題呢。以下我們想證明這問題的答案是肯定的。這就是說如果V中的外積滿足上文中的五個條件，那麼我們一定可以在V中找到一組基底 $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$，使得

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

現在證明此事。在 V 中先選兩個線性無關的向量 $\mathbf{j}_1$ 和 $\mathbf{k}_1$。令 $\mathbf{i}_1=\mathbf{j}_1\times\mathbf{k}_1$。則 $\mathbf{i}_1$ 和 $\mathbf{j}_1$ 線性無關。再令 $\mathbf{k}_2=\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1$，從條件3知 $\mathbf{i}_1,\mathbf{j}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ 形成V的一組基底。因

$$\mathbf{k}_2=(\mathbf{j}_1\times\mathbf{k}_1)\times\mathbf{j}_1,$$

所以有實數a，b存在，使 $\mathbf{k}_2=a\mathbf{j}_1+b\mathbf{k}_1$，於是

$$\mathbf{j}_1\times\mathbf{k}_2=\mathbf{j}_1\times(a\mathbf{j}_1+b\mathbf{k}_1)=b\mathbf{j}_1\times\mathbf{k}_1=b\mathbf{i}_1$$

由於 $\mathbf{j}_1,\mathbf{k}_2$ 和 $\mathbf{j}_1\times\mathbf{k}_2$ 線性無關，所以$b\neq 0$，再者，

$$\mathbf{k}_2\times\mathbf{i}_1=(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1)\times\mathbf{i}_1=(\mathbf{j}_1\times\mathbf{k}_2)\times(-\frac{1}{b}\mathbf{k}_2)$$

旣可寫成 $\mathbf{i}_1$ 和 $\mathbf{j}_1$ 的線性組合，又可寫成 $\mathbf{j}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ 線性線合。
因爲 $\mathbf{i}_1,\mathbf{j}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ 形成V的基底，所以 $\mathbf{k}_2\times\mathbf{i}_1$ 是 $\mathbf{j}_1$ 的倍數，卽有實數$c\neq 0$，使

$$\mathbf{k}_2\times\mathbf{i}_1=c\mathbf{j}_1.$$

令

$$\mathbf{i}=\frac{1}{\sqrt{|c|}}\mathbf{i}_1,\ \mathbf{j}=\frac{1}{\sqrt{|b|}}\mathbf{j}_1,\ \mathbf{k}=\frac{1}{\sqrt{|bc|}}\mathbf{k}_2.$$

則 $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ 爲V的基底，並且

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\frac{1}{\sqrt{|c|}}\mathbf{i}_1\times\frac{1}{\sqrt{|b|}}\mathbf{j}_1=\frac{1}{\sqrt{|bc|}}\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1=\frac{1}{\sqrt{|bc|}}\mathbf{k}_2=\mathbf{k},$$

$$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\frac{1}{\sqrt{|b|}}\mathbf{j}_1\times\frac{1}{\sqrt{|bc|}}\mathbf{k}_2=\frac{1}{|b|}\frac{1}{\sqrt{|c|}}\mathbf{j}_1\times\mathbf{k}_2=\frac{b}{|b|}\frac{1}{\sqrt{|c|}}\mathbf{i}_1=\pm\mathbf{i},$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\frac{1}{\sqrt{|bc|}}\mathbf{k}_2\times\frac{1}{\sqrt{|c|}}\mathbf{i}_1=\frac{1}{|c|}\frac{1}{\sqrt{|b|}}\mathbf{k}_2\times\mathbf{i}_1=\frac{c}{|c|}\frac{1}{\sqrt{|b|}}\mathbf{j}_1=\pm\mathbf{j}.$$

從而下列四情形之一一定成立：

甲、$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \ \ \ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}.$

乙、$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{i},\ \ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}.$

丙、$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \ \ \ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=-\mathbf{j}.$

丁、$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{i},\ \ \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{j}.$

先考慮乙款。因 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ 線性無關，而且

$$\mathbf{k}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j})=\mathbf{k}\times\mathbf{i}-\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{j}+\mathbf{i}$$

依條件 3，$\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k}+\mathbf{i}$ 三個向量應該線性無關，但事實不然。所以乙款不會發生。

再考慮丙款及丁款。因 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 線性無關，而且

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}+\mathbf{k})=\mathbf{i}\times\mathbf{j}-\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{k}+\mathbf{j},$$

所以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{j}$ 應該線性無關。這也不是事實。所以丙款和丁款也都不會發生。

剩下唯一可能的情形便是甲款了。於是我們可以把以上的討論歸納成下述的總結:

定理 V 設爲實數體上的向量空間。如果對應於任二向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}\epsilon V$，都有向量 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\epsilon V$ 定義着，使條件 1—5 都成立，那麼 V 一定是三維空間，並且 V 中有一組基底 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$，使

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}.$$

換言之，V 的外積和尋常三維空間的外積所形成的代數體系，互相同構。

讀者也許會奇怪，在以上的討論中，爲什麼不見內積的蹤跡呢？事實上內積的觀念已經隱藏在外積裏面了。設

$$\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k},\quad \mathbf{w}=w_1\mathbf{i}+w_2\mathbf{j}+w_3\mathbf{k}$$

爲 V 中的兩個向量。我們選擇

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k},$$

使 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 線性無關。則

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v}&=(u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k})\times(v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k})\\&=(u_2v_3-u_3v_2)\mathbf{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\mathbf{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}\\&=[(u_3v_1-u_1v_3)w_3-(u_1v_2-u_2v_1)w_2]\mathbf{i}\\&\quad+[(u_1v_2-u_2v_1)w_1-(u_2v_3-u_3v_2)w_3]\mathbf{j}\\&\quad+[(u_2v_3-u_3v_2)w_2-(u_3v_1-u_1v_3)]\mathbf{k}\\&=(u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3)v\mathbf{v}-(v_1w_1+v_2w_2+{}_3w_3)\mathbf{u}\end{aligned}$$

條件 4 是說 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ 可以寫成 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的線性組合。上式告訴我們: 只要 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 線性無關，這個線性組合中 $\mathbf{v}$ 的係數由 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{w}$ 所完全決定。我們可以把 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{w}$ 的內積定義爲這個係數，並用 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ 表示它，那麼內積的理論便可依附於外積的理論上面了。

討論至此，說不定讀者已經發現，整套三維空間的向量代數，都可以建立在前文所列的五個條件上面。但這並不是本文的用意所在，因爲這樣講法並不適當。在三維空間中講向量代數，還是用通常課本上的方法纔自然呢。

——本文作者現均任職於本所