魔 方 陣

林 克 瀛

魔方陣是中國人最先發明的數學遊戲，我國古代稱之爲縱橫圖，傳到西方後稱爲魔方陣。一個 n 階魔方陣是把 $1, 2, \cdots\cdots, n^2$ 等連續正整數排列爲一個方陣，使它每一直行每一橫列及每一對角線上 n 個數字之和都相同。把一個魔方陣旋轉及翻轉（或取鏡中映像）可得八個不同的方陣，但一般都只算成是一種排法。三階魔方陣只有一種排法，古代稱爲洛書（見圖一）。宋人楊輝在公元一二七五年所著續古摘奇算法上卷載有十三個魔方陣，階數由三到十，但百子圖中對角線上數字之和不符合魔方陣的定義。明人程大位在一五九三年所著算法統宗中除轉載楊輝的結果外又加上五五圖及六六圖各一。淸人張潮在心齋雜俎下卷中有一個「更定百子圖」，把楊輝的百子圖修改成十階魔方陣。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖一：洛書

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

圖二：世界上最早記錄下的鬼方陣

古代的印度人很崇拜魔方陣，許多人把石頭或金屬上刻了魔方陣當做護身符。歐洲最早提到魔方陣的著作是一位希臘人 Moschopoulus 大約在一三〇〇年左右在康士坦丁堡（今屬土耳其並改名爲伊士坦堡）發表。

Frenicle 首先在他死後出版（1693）的著作中指出四階魔方陣共有 880 種。加德納（Gardner，替科學美國人雜誌寫數學遊戲專欄，是公認的趣味數學權威）在一本書（Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions）中提到世界上最早紀錄下的四階魔方陣出現在十一或十二世紀印度 Khajuraho 的石刻上（見圖二）。這一類的方陣比一般魔方陣更加有趣，又稱爲鬼方陣（diabolic 或 pandiagonal square）。鬼方陣除了滿足魔方陣的定義外還具有下列性質：把兩個完全一樣的方陣左右並列或上下並排，每一排和對角線平行的 n 個數字之和都和方陣內每行數字之和相同。換句話說，把一個鬼方陣最上（或下）一列搬到最下（或上）面，或者把最左（或右）邊一行移到最右（或左）邊，又得一個新的鬼方陣。筆者曾經查過李儼的中國算學史，吳啓宏的古代數學史趣談及李約瑟的中國之科學與文明，都查不到我國古代有人排出鬼方陣的證據，所以看來印度人最先發現鬼方陣。四階方陣有四十八個。

一九七三年一月份的科學美國人中的數學遊戲專欄首先宣布美國人 Schroeppel 已經用電子計算機花了大約一百小時把五階魔方陣的總數找出來，這個數目是 275, 305, 224. 換句話說，五階魔方陣有兩億七千多萬個之多。不過早於一九三九康乃爾大學的 Rosser 和 Walker 就已利用羣論來研究鬼方陣並證明五階鬼方陣只有三千六百個。

像圖三所示的魔方陣又稱對稱（symmetrical 或 associated）魔方陣。把它轉一百八十度後和原方陣重疊，則任何兩個相疊的數字之和都是 $1+n^2$。這樣的兩個數稱爲互補。對稱魔方陣的階數必定是奇數或四的倍數，證明如下：n 爲偶數時可把方陣分爲大小相等的四個小方陣，每個小方陣內數字之和必須相同（由對稱魔方陣的定義可推出），所以 $n^2(1+n^2)/2$（也就是 $1, 2, \cdots\cdots, n^2$ 各數之和）必須被四除盡，因此 n 爲四除盡。

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

圖三：一個四階對稱魔方陣

·	○	·	○	·	○
×		×		×	
·	○	·	○	·	○
×		×		×	
·	○	·	○	·	○
×		×		×	

圖四：把一個偶數階鬼方陣分爲四個小方陣

鬼方陣的階數也是必須是奇數或四的倍數，證明如下：設 n 爲偶數，我們可把方陣如圖四所示分爲四個方陣，每一方陣的元素分別以叉號，圓圈，點，及空白來區分。假定四個小方陣內數字之和分別以 A, B, C, D 表示，則由鬼方陣的定義立得 $A+B=C+D=A+D=B+C=A+C=B+D$ 所以 A, B, C, D 四數相同，所以 $[n^2(1+n^2)]/2$ 必須被四除盡，因爲 n 必爲四之倍數。

De la Loubere 首創一種簡單的奇數階對稱魔方陣排法（請參考圖五）：把 1 放在方陣第一橫列正中央，把 2 放在 1 的右邊一格的正上方一格（請讀者在想像中把方陣上下及左右黏起來），依此類推到 n 爲止，再把 $n+1$ 放在 n 的正下面一格，再重覆到 $2n$ 爲止，這樣一直到塡滿。De la Hire 發現了一種利用兩個輔助方陣重疊來得到魔方陣的方法。現在以 $n=5$ 爲例加以說明（參閱圖六）。在 A 方陣中先把 3 放在由左上角到右下角的對角線上的每一個格子，再把 1，2，4，5（次序不拘）沿和這條對角線平行的副對角線（brocken diagonal）排列。在 B 方陣中把 10 放在由右上角到左下角的對角線上，再把 0，5，15, 20（次序不拘）沿副對角線排列，最後把二方陣重疊相加卽得一對稱魔方陣。當階數爲偶數時，輔助方陣比較複雜。

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

圖五：一個五階對稱魔方陣

Hire 的方法和希臘拉丁方陣有密切關係。一個 n 階拉丁方陣的定義是把 n 個不同的符號（拉丁字母）塡入方陣使每個符號剛好在每一行及每一列中出現一次（但不計對角線）。若把二拉丁方陣（用兩組不同的符號，例如拉丁字母和希臘字母）重疊後沒有兩個格子具有相同的兩個符號則此二方陣稱爲正交，合成方陣則稱爲希臘拉丁方陣。若二正交拉丁方陣之符號分別爲 $1, 2, \cdots, n$, 及 $0, n, 2n, \cdots(n-1)n$,

3	4	1	5	2
2	3	4	1	5
5	2	3	4	1
1	5	2	3	4
4	1	5	2	3

A

15	0	20	5	10
0	20	5	10	15
20	5	10	15	0
5	10	15	0	20
10	15	0	20	5

B

18	4	21	10	12
2	23	9	11	20
25	7	13	19	1
6	15	17	3	24
14	16	5	22	8

圖六：利用輔助方陣A，及 B重疊而得一個五階對稱魔方陣

合成方陣中每一格子中把兩數相加，則希臘拉丁方陣中由 1 到 n^2 的每一數字正好只出現各一次而且每行每列各數之和相同。但這種方法所得的方陣一般不是魔方陣，因爲對角線上數字之和不一定符合。不過有一種對角拉丁方陣，對角線上符號相異，如能找出一對正交的對角拉丁方陣，則合成方陣必爲魔方陣。例如圖七中兩個拉丁方陣的符號分別是A, B, C, D及a，b，c，d，合成方陣（希臘拉丁方陣又稱尤拉方陣以紀念尤拉）中每行每列及對角線上符號之和都是$A+B+C+D+a+b+c+d$。所以只要把a，b，c，d 代以 1，2，3，4（次序不拘），把A, B, C, D 代以 0，4，8，12（次序不拘），就得一魔方陣。當然若a，b，c，d代入0，4，8，12 而將 A, B, C, D 代以 1，2，3，4 亦可。因此由圖七可排上$2(4!)^2$個不同的方陣，若不計旋轉和映像，除以八可得 144 個四階魔方陣。

A+a	B+b	C+c	D+d
D+c	C+d	B+a	A+b
B+d	A+c	D+b	C+a
C+b	D+a	A+d	B+c

圖七：一個四階對角希臘拉丁方陣

拉丁方陣中最有趣的是泛對角線拉丁方陣（pandiagonal Latin Square）又稱爲 Knut Vik 方陣。以下簡稱爲泛拉丁方陣。將兩個正交的泛拉丁方陣重疊就成了泛對角線尤拉方陣（以下簡稱泛尤拉方陣）。把泛尤拉方陣中的符號代以數字可得許多鬼方陣。例如圖八是一個五階泛尤拉方陣，如把A, B, C, D, E任意代入 1，2，3，4，5（或 0，5，10，15，20）又把a，b，c，d，e 任意代以 0，5，10，15，20（或 1，2，3，

A+a	B+b	C+c	D+d	E+e
D+c	E+d	A+e	B+a	C+b
B+e	C+a	D+b	E+c	A+d
E+b	A+c	B+d	C+e	D+a
C+d	D+e	E+a	A+b	B+c

圖八：五階泛對角線尤拉方陣

4，5），就得到許多不同的方陣。由排列組合律可知個數爲 $2(5!)^2=28800$。但旋轉和映像所得之八個方陣視爲一種排列，實際上是三千六百個鬼方陣。換言之，所有的五階鬼方陣都可以用重疊拉丁方陣法一口氣排出。

數學家對階數爲奇質數的鬼方陣研究得最透澈，Rosser 和 Walker 在 1939 年發表的論文中證明爲 n 爲質數時，所有完全魔方陣的個數是 $[(n!)^2(n-3)(n-4)]/8$. 當 $n=5$ 時就是 3600. 原文稱爲「正則」(reguar) 方陣。這一類方陣比鬼方陣還要有趣，當 $n=5$ 時與鬼方陣相同，但 $n\geq 7$ 時則比一般鬼方陣還要規則一些。下面舉例說明完全魔方陣和鬼方陣的區分。圖九是 Rosser 和 Walker 所設計的七階鬼方陣，這個方陣不是完全魔方陣。當 n 爲奇質數時，完全魔方陣的定義可以定爲可以利用泛拉丁方陣排成的鬼方陣（但這個定義在其他情形不能用，限於篇幅不在這兒說明）。爲了證明圖九的方陣不是完全魔方陣，最簡單的方法是用 $A=a+7b$（a 由 1 到 7, b 由 0 到 6）把它拆開成爲二個方陣，如圖十所示。圖十中一個方陣是泛拉丁方陣，但另一個則不是拉丁方陣。Rosser 和 Walker 證明了當 $n=5$ 時所有的鬼方陣都是完全魔方陣，但當 n 爲大於五的奇數或四的倍數時，則有些鬼方陣不是完全魔方陣。

2	47	38	35	24	20	9
26	16	8	6	46	42	31
49	39	33	23	15	12	4
19	11	7	45	41	30	22
37	29	27	17	14	3	48
10	5	44	36	34	25	21
32	28	18	13	1	43	40

圖九：一個七階鬼方陣

2	5	3	7	3	6	2
5	2	1	6	4	7	3
7	4	5	2	1	5	4
5	4	7	3	6	2	1
2	1	6	3	7	3	6
3	5	2	1	6	4	7
4	7	4	6	1	1	5

甲

0	6	5	4	3	2	1
3	2	1	0	6	5	4
6	5	4	3	2	1	0
2	1	0	6	5	4	3
5	4	3	2	1	0	6
1	0	6	5	4	3	2
4	3	2	1	0	6	5

乙

圖十：將乙圖乘七和甲圖相疊可得圖九

利用泛尤拉方陣可以立刻把所有 n 爲質數的完全魔方陣寫下來。以 $n=7$ 爲例，爲簡便起見，各符號以數字 0，1，……，6 表示，n 階拉丁方陣最多可有 $n-1$ 個互相正交，當 n 爲質數則必有 $n-1$ 個互相正交，可以下式表示:

$$A_m(x,y)\equiv 1+x+my(mod\ n)$$
$$x,y=0,1,\cdots\cdots,n-1$$

A代表方陣的元素，其位置用x及y爲坐標，上式爲同餘式，取由0到$n-1$（被除盡後的剩餘）。m取由1到$n-1$所得$n-1$個互相正交的拉丁方陣，其中有$n-3$個（m由2到$n-2$）爲泛拉丁方陣。所以n爲七時有四個互相正交的泛拉丁方陣，任選兩個的選法是$(7-3)(7-4)/2=6$。這六個泛尤拉方陣以符號換爲數字各可得 $2(7!)^2$ 個完全魔方陣，再除以八（旋轉及映像）卽得答案。推廣到大於七的質數就是 $(n!)^2(n-3)(n-4)/8$。

魔方陣可以推廣到魔術立方體或更高的維數，由於篇幅以後再討論。加德納在一九七六年五月份科學美國人數學遊戲一欄中宣布杜佛(Dover) 書局出版一本專門討論魔方陣的新書: *New Recreations with Magic Squares*, 作者是 Benson 和 Jacoby。這本書有許多從來沒有發表過的結果，並且在附錄中列出全部 880 個四階魔方陣。最有趣的是書中有一個 Benson 在一九四九發現的三十二階魔方陣，每行每列及對角線上數字平方（或立方）之和均相同，是三重魔方陣，以往最佳結果是六十四階。筆者已經託人在美國購買，書到後再介紹給讀者，其他的參考資料如下:

林克瀛 「拉丁方陣和尤拉的預言」，科學月刊三卷九期（民國六十一年九月份三十三頁）。

林克瀛 「漫談魔方陣」，科學月刊三卷十期(四十八頁)。

林克瀛 「魔方陣的性質」，科學月刊（卽將發表）。

林克瀛 「漫談魔術立方體」，科學月刊（卽將發表）。

許文燦 林金玲 從拉丁方陣到魔方陣，省立鹿港高級中學（六十二年）。

Andrews: *Magic Squares and Cubes*, 1917 (Dover 在 1960 重印)

Kraitchic: *Mathematical Recreations*, Dover 重印（原作大約在一九四〇左右出版）。

Gardner; 科學美國人，一九七六年一月及二月號。

Leeflang: *Magic Cubes of Prime Order*, Journal *Recreational Mathematics* (趣味數學) 十一卷四期 241 頁（一九七九）。

Hendricks, 「趣味數學」五卷一期及六卷四期（一九七二及七三）

Wynne, 「趣味數學」八期四期（一九七六）。

Howard, 「趣味數學」九卷四期（一九七七）。

Rosser, Walker; *Algebraic Theory of Diabolic Magic Squares* (這是一篇經典式的名作), Duke Mathe. Jour. 卷五第七〇五頁（一九三九），此文可在清華大學總圖書館複印，研究鬼方陣不可不讀。不過這篇論文讀起來很費力，要有耐心。

Hedayat: *A Complete Solution to the Existence and Nonexistence of Knut Vik Designs and Orthogonal Knut Vik Designs*, Jour. Combinatorial Theory A, 22卷 331 頁 (1977)。此文亦可在清華大學總圖書館複印。研究泛拉丁方陣不可不讀，內容並不難懂。

Hudson: *On Pandiagonal Magic Squares of Order* $6t\pm1$, Mathematical Magaziue 45 卷 94 頁 (1972)。可在淸大查到，此文可視爲 Hedayat 結果之特例，可以不讀。

Denes, Keedwell; 拉丁方陣及其應用， Academic Press, 1974 版，全書 547 頁。

方濟 「縱橫圖之造法」，數學傳播四卷一期 (68年)。

——林克瀛現任教於清大物理系