埃 及 分 數

韓 良 信

看到「數學傳播」第四卷、第二期（第 123 頁）喬德福同學的問題，使筆者想起古代埃及人將正有理數以有限個不同的單位分數（即分子為 1 、分母為正整數的分數）的和來表示的方法。以喬同學舉的例子 2/29 和 2/97 來講

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{15}+\frac{1}{435}=\frac{1}{16}+\frac{1}{240}+\frac{1}{435}=\frac{1}{15}+\frac{1}{436}+\frac{1}{189660},$$

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{49}+\frac{1}{4753}=\frac{1}{50}+\frac{1}{2450}+\frac{1}{4753}=\frac{1}{49}+\frac{1}{4754}+\frac{1}{22595762}$$

等等，表現法還有很多。假如不限制項數，則對每一個正有理數，有無窮多個表現法。這一點從底下定理可以看出。

定理 每一正有理數可以用有限個不同的單位分數的和來表示。而且任意給一個正數 l（不管多大），我們可以祇採用大於 l 的整數為分母。〔因而表現法有無窮多。〕

C. Trigg 著 *Mathematical Quickies* 上的前半部的證明如下：先將所給的正有理數 p/q 寫成 p 個 $1/q$ 的和：

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots\cdots+\frac{1}{q}.$$

然後用公式，

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)}$$

將分母逐次化為不同的整數。如

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{29}+\frac{1}{29}=\frac{1}{29}+\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{29\times30}\right)=\frac{1}{29}+\frac{1}{30}+\frac{1}{870}.$$

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{97}+\frac{1}{97}=\frac{1}{97}+\left(\frac{1}{98}+\frac{1}{97\times98}\right)=\frac{1}{97}+\frac{1}{98}+\frac{1}{9506}.$$

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{42}\right)+\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{930}\right)=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{30}+\frac{1}{31}+\frac{1}{42}+\frac{1}{930}.$$

不過這個證明有一個漏洞，即若分子 p 大時，無法排除相同的分母的個數愈來愈多的可能性。換句話說，由上法不能證得：經有限步驟後，能以相異單位分數收場。正確的證明如下 (Fibonacci)；

因為對任何正整數 l，$\sum_{k=l}^{\infty} 1/k=\infty$，所以對所給的正有理數 p/q，一定有一個整數 m，使得下列不等式成立：

$$\sum_{k=l}^{m}\frac{1}{k}\leq\frac{p}{q}<\sum_{k=l}^{m+1}\frac{1}{k}.$$

假如左邊的等號成立，則我們已達到目的。假如等號不成立，則令 $p/q-\sum_{k=l}^{m}1/k=p_1/q_1$。假如 $p_1=1$

我們也完成了任務。（此時 $q_1>m$）. 假如 $p_1>1$，那麼一定有一個大於 $m+1$ 的整數 n，使得不等式 $1/n<p_1/q_1<1/(n-1)$ 成立：那麼

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{n}=\frac{np_1-q_1}{nq_1}$$

但從上面的不等式（右方），我們得到 $p_2=np_1-q_1<p_1$. 也就是說，祇要每次取可以採用的最大單位分數，則分子會絕對遞減 (strictly decreasing)。但正整數的絕對遞減數列不可能有無窮多項，所以我們在有限個步驟內可以大功告成。

其他 Erdös, Golomb 等人也提供了將所給正有理數表示爲有限個相異單位分數的和的算法 (algorithm)。也有使用 Farey series，連分數 (continued fraction) 的算法。

證完了定理，我們「打破沙鍋問到底」：一定要用（大於 l 的）所有的整數嗎？假如把分母限制爲正偶數又將如何？這個問題可以很簡單的解決：先把所給的正有理數 p/q 用上法以兩種不同的方法表示：

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{m_i}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n_j}.$$

而且我們可以要求 $m_1<m_2<\cdots\cdots<m_i<n_1<n_2<\cdots\cdots<n_j$. 那麼

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2m_i}+\frac{1}{2n_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n_j}.$$

這裏所有的分母都是相異的偶數。這個辦法當然可以推廣。我們要求分母都是 3 的倍數，4 的倍數，…，等等都可以照樣辦到。

那麼我們可以要求分母都是奇數嗎？這個問題可就不那麼簡單了。以 1 來做例子，要將 1 用分母爲奇數的有限個不同的單位分數的和來表示，則最少需要 9 項：

$$\begin{aligned}1&=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{135}+\frac{1}{10395}\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{165}+\frac{1}{693}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{231}+\frac{1}{315}\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{33}+\frac{1}{45}+\frac{1}{385}.\end{aligned}$$

若願意多加兩項，那麼我們可以使最大分母減到 105:

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{55}+\frac{1}{77}+\frac{1}{105}.$$

另外也有

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{105}+\frac{1}{135}\quad\text{等等。}$$

假如我們用文末習題 2 的結果，我們知道這種表現法仍然有無窮多。（但他們的項數都是奇數。請想想爲什麼？）

假如要求分母必須是正奇數，則有兩個困難會發生。首先，所給的正有理數 p/q 的分母 q（經過約分後）必須是奇數。（請想想爲什麼？）其次，假如模仿定理的證明，每次取最大可採用的，以奇數爲分母的單位分數，則分子不見得會單調減少。以 2/7 爲例：

$$\frac{1}{5}<\frac{2}{7}<\frac{1}{3},\qquad \frac{2}{7}-\frac{1}{5}=\frac{3}{35},$$

$$\frac{1}{13}<\frac{3}{35}<\frac{1}{11},\qquad \frac{3}{35}-\frac{1}{13}=\frac{4}{455},$$

$$\frac{1}{115}<\frac{4}{455}<\frac{1}{113},\qquad \frac{4}{455}-\frac{1}{115}=\frac{1}{10465}.$$

因此我們得到 $2/7=1/5+1/13+1/115+1/10465$，但演算中分子的數列 $\{2,3,4,1\}$ 並非單調減少。

事實上，下面的問題尚待解決:

問題 1 (Stein, Selfridge, Graham) 以定理的證明的方法，每次取最大可採用的，以奇數爲分母的單位分數，是否對任意所給的以奇數爲分母的正有理數都可以用有限個步驟得到所要的表現法嗎?

雖然這個問題還沒有解決，但 Breush 和 Stewart 分別證明了，任何以奇數爲分母的正有理數，都可用有限個分母爲奇數的，相異單位分數的和來表示。

我們不難證明調和級數 $1/2+1/3+\cdots\cdots+1/n+\cdots\cdots$ 的部分和 (partial sums) 絕不等於整數（參照習題 5）。這個結果我們可以推廣: 正整數等差數列的倒數的和 $\sum_{k=1}^{n} 1/(a+kd)$ $(a\geq 2,\ d\geq 1)$ 也決不等於整數。

埃及分數，自古引起不少數學家的興趣，光是在將於明年初出版的 H. Croft 和 R. Guy 合著: *Research Problems in Intuitive Mathematics* 一書中所引用的論文就有 70 多篇。而從論文數來看，數學家們對埃及分數的興趣，似乎愈來愈濃厚。我們舉幾個比較容易敍述的習題（已知結果）及問題（未解決）以供同好觀摩:

習題 2: 試證對任意奇數 $n\geq 3$，可以找到 3 個相異的正奇數 p, q, r，使得 $1/n=1/p+1/q+1/r$ 成立。

問題3 (Paul Erdös, E. G. Straus) 對所有的整數 $n>1$，$\frac{4}{n}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ 是否一定有正整數解 p, q, r?

經過很多人，包括 Bernstein, Oblath, Rosati, Shapiro, Straus 等人的努力，我們已經知道除了 n 是素數（質數），或 n 除以 840 時的餘數是 $1^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2$ 或 23^2 的情形以外，這個憶測恒成立。山本幸一 (Koichi Yamamoto) 證實了這個憶測對 $n<10^7$ 都成立。但一般的情形尚未解決。

問題 4 (W. Sierpiński) 對所有的整數 $n>1$，$\frac{5}{n}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ 是否一定有正整數解 p, q, r?（請注意，在問題 3 和 4 中我們不要求 p, q, r 相異）

Palamà 證實此題對 $n\leq 922321$ 成立. Stewart 把它推廣到 $n\leq 1057438801$，並證明對所有不是 $278460k+1$ 形狀的 n 也成立。更一般地，對 $\frac{m}{n}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ 也有些結果，但我們不再贅述。

習題 5: 試證對任何兩個正整數 m 和 n，$\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n}$ 不可能是整數。

習題 6: 有沒有滿足下面兩個條件的正整數的（非空）有限集合 S?

(a) 若 n 屬於 S，則 $n-1$ 或 $n+1$ 中至少有一個屬於 S。

(b) $\sum_{n\in S}\frac{1}{n}$ 是整數。

習題 7: 假如正整數的集合 S 滿足下面條件時我們說 S 有性質 (E)。

(E) 對任何正有理數 r，可以從 S 裏面找出有限個相異的正整數 $n_1, \cdots\cdots, n_k$，使得 $r=1/n_1+1/n_2+\cdots\cdots+1/n_k$ 成立。

譬如, 所有正奇數的集合就沒有性質 (E)。但 1964 年 R. Graham 證明: 對任意兩個正數 m 和 n, 假如 S 包括所有比 m 大的素數, 同時也包含所有比 n 大的平方數, 則 S 有性質 (E)。我們問: 試將所有正整數的集合 N 分爲兩個互斥 (disjoint) 集合 S 和 T，使得 S 和 T 都有性質 (E)。能將 N 分成三個互斥集合而仍然保持性質 (E) 嗎? 四個? 五個?

〔答: 可將 N 分成可數多個 (countably many) 互斥集合，卽 $N=\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$，而當 $j \neq k$ 時，$S_j \cap S_k=\phi$，使得每一個 S_j 都有性質 (E)。〕

問題 8 (續習題 7): 將所有正整數的集合 N 任意分割爲兩個互斥集合 S 和 T 時，是否 S 和 T 中至少有一個集合具有性質 (E)? 假如答案是肯定的，那麼任意分成 n 個時，這個集合中是否至少有一個集合具有性質 (E)?

問題 9 (續問題 8): 假如問題 8 的答案是否定的，那麼我們考慮比性質 (E) 稍爲弱些的性質: 假如正整數的集合 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 滿足下列條件時，我們說這些集合 $S_1, \cdots, S_n$ 集體有性質 (F)。

(F) 對任何正有理數 r，可以從 $S_1, \cdots S_n$ 中找出一個集合，管它叫做 S_j，而從 S_j 中可以抽出有限個相異正整數 $n_1, \cdots, n_k$ 使得 $r=\frac{1}{n_1}+\cdots+\frac{1}{n_k}$ 成立。〔請注意，在此 S_j 可因所給的有理數 r 而不同。〕

假如所有正整數的集合 N 的任意分割 $\{S, T\}$，不能滿足性質(E)，那麼退一步問 S 和 T 集體有性質 (F) 嗎? 分成 n 個時又如何?

參考文獻

1. H. Croft and R. Guy, *Research Problems in Intuitive Mathematics* (卽將出版)
2. P. Erdös and E.G. Straus, *On the irrationality of certain series*, Pacific J. Math. **55** (1974), 85-92; MR. 51#3069.
3. M. Gardner, *Mathematical Games*, Scientific American, Oct. 1978, 28.
4. S. W. Golomb, *An algebraic algorithm for the representation problems of the Ahmes papyrus*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), 785-786。
5. R.L. Graham, *On finite sums of unit fractions*, Proc. London Math. Soc. (3), **14** (1964), 193-207; M.R. 28#3968.
6. R.L. Graham, *On finite sums of reciprocals of distinct n^{th} powers*, Pacific J. Math. **14** (1964), 85-92; M.R. 28#3004.
7. L.-S. Hahn, Amer. Math. Monthly **85** (1978), 47.
8. L.-S. Hahn, "數學" 日本數學會編集, 第 31 卷, 第 4 號 (1979 年 10 月), 376.
9. W. Sierpiński; *Sur les décompositions de nombres rationnels en fractions primarires*, Mathesis, **65** (1956), 16-32; M.R. 17#1185.

10 B. M. Stewart, *Theory of Numbers*, Macmillan, N. Y. 1964, 198-207.

11. C. Trigg, *Mathematical Quickies*, McGraw-Hill 1967 (Q. 154, p. 43; Solution p. 148).

12. K. Yamamoto, *On the diophantine equation* $4/n=1/x+1/y+1/z$. Mem. Fac. Sci, Kyushiu Univ Ser. A **19**(1965), 37-47.

——本文作者現任教於台大數學系