數學傳播 42卷4期, pp. 91-96

從「將軍飲馬」問題到「施瓦爾茲三角形」

陳海烽 · 趙國瑞

一個經典的幾何問題

相傳, 古希臘亞歷山大裏亞城有一位久負盛名的學者, 名叫海倫。有一天, 一位將軍專程拜訪海倫, 求教一個百思不得其解的問題: 從圖 1 中的 A 地出發, 到筆直的河岸 l 去飲馬, 然後再去 B 地, 走什麼樣的路線最短呢? 精通數學、物理的海倫稍加思索, 便回答了這個問題。這個問題後來被稱爲「將軍飲馬」問題。

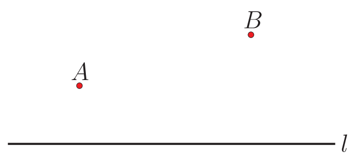

圖 1

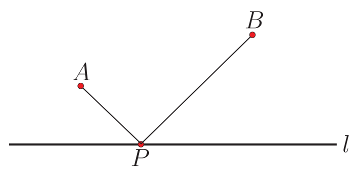

圖 2

這實際是一道平面幾何作圖問題。假設飲馬的地點爲點 P, 問題轉化爲在直線 l 上找一點 P, 使線段 AP 與 BP 之和最短, 如圖 2 所示。由於是求兩條線段之和最短, 這使我們自然想到了線段公理「兩點之間, 線段最短」。現在的問題是兩條線段 AP 與 BP 都在直線 l 同側, 無法直接利用線段公理, 怎麼辦呢? 如果將兩條線段轉化爲在直線 l 異側的情形, 就可利用線段公理了。如何轉化呢? 這使我們又自然想到了對稱。我們可以作點 A 關於直線 l 的對稱點 A', 如圖 3 所示, 那麼必有 $AP+BP=A'P+BP$; 也可以作點 B 關於直線 l 的對稱點 B', 如圖 4 所示, 那麼必有 $AP+BP=AP+B'P$。這樣問題就轉化爲點 A'、點 B (或點 A、點 B') 在直線 l 的兩側, 在直線 l 上找一點 P, 使線段 $A'P$ 與 BP (或 AP 與 $B'P$) 之和最短。這只需連結 $A'B$ (或 AB'), $A'B$ (或 AB') 與直線 l 的交點即爲點 P 的位置。

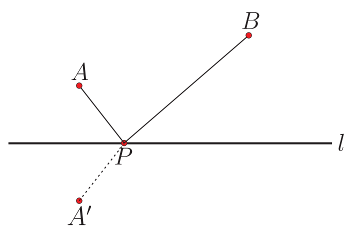

圖 3

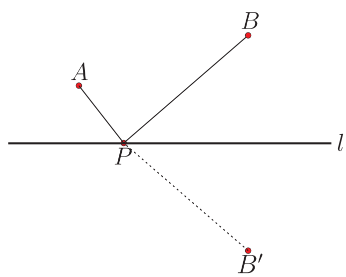

圖 4

「將軍飲馬」問題的拓展

「將軍飲馬」問題的本質是一道比較簡單的利用平面幾何作圖求作最短路線問題。我們也可以通過改變題目的條件, 對「將軍飲馬」問題進行深化。如圖 5, 草地邊緣 OM 與小河河岸 ON 在點 O 處形成 30° 的夾角, 牧馬人從 A 地出發, 先讓馬到草地吃草, 然後再去河邊飲水, 最後回到 A 地。已知 $OA=2$Km, 請在圖中設計一條路線, 使所走的路徑最短, 並求出整個過程所行的路程。

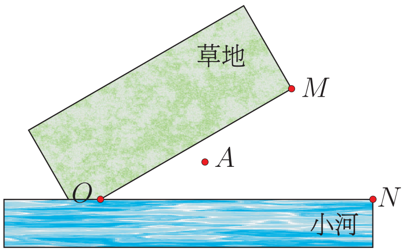

圖 5

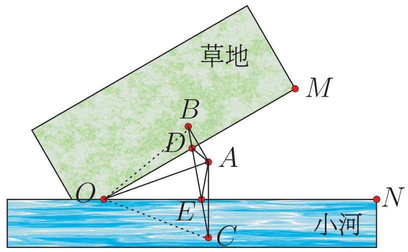

圖 6

有了解決「將軍飲馬」問題的經驗, 我們可以分別作點 A 關於草地邊緣 OM、小河河岸 ON 的對稱點 B、C, 連結 BC, 分別交 OM、ON 於點 D、E, 連接 AD、AE, 如圖 6 所示, 則路線 $A\to D\to E\to A$ 即爲最短路徑, 同時不難求出這個最短路徑爲 2Km。

利用「將軍飲馬」問題的拓展問題解決歷史名題

施瓦爾茲 (1843~1921) 是柏林大學的著名數學家, 他給後人留下了一道極著名而又有意義的問題: 在銳角三角形中, 求作周長最短的內接三角形。這個問題被人們稱爲施瓦爾茲三角形問題。

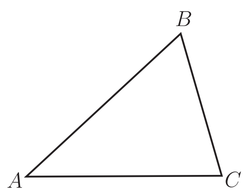

圖 7

如圖 7, $\triangle ABC$ 爲銳角三角形。試在 $\triangle ABC$ 的所有內接三角形 (頂點分別在三角形的三條邊上) 中, 求作周長最短的三角形。

解答施瓦爾茲三角形問題有些困難。著名數學家華羅庚曾經告誡我們: 遇到一個較難的問題, 怎麼辦? 一個好主意是「退」, 即從一般退到特殊, 從複雜退到簡單, 從抽象退到具體, 從整體退到部分, 退到最原始而不失去重要性的地方, 退到你會做、能下手的問題上。利用解決「將軍飲馬」問題的拓展問題的思路容易解決如下問題:

如圖 8, 設點 P 是銳角 $\angle AOB$ 內一定點, 分別在 OA、OB 上求一點 M、N, 使 $\triangle PMN$ 的周長最短。作法如下:

(1) 分別作點 P 關於 OA、OB 的對稱點 P_1、P_2;

(2) 連結 P_1P_2, 分別交 OA、OB 於點 M、N;

(3) 連結 PM、PN。

$\triangle PMN$ 即爲所求。

有了解答「將軍飲馬」問題的拓展問題作基礎, 再解答施瓦爾茲三角形問題就變得簡單了。在圖 8 的基礎上, 不妨假設過點 P 有一條直線分別交 OA、OB 於點 D、E, 如圖 9 所示, 則 $\triangle PMN$ 即爲 $\triangle DOE$ 內過點 P 的周長最短的三角形。接下來我們只需再看這個最短周長與哪些因素有關。那麼影響這個最短周長的因素到底有哪些呢? 對於給定的三角形來說, 它的三個內角大小不變。因此我們可以認爲 $\angle AOB$ 的大小不變, 根據點 P 的位置, 可以猜想影響最短周長的因素有兩個 : 點 P 到角頂點 O 的距離; 點 P 到 $\angle AOB$ 一邊 OA (或 OB) 的距離, 由 OP 和 $\angle POA$ (或 $\angle POB$) 決定。接下來我們利用幾何畫板軟體, 採用「變數控制法」 測量相關數據並填入設計好的表格。

設 $OP = r$, $\angle POA = \alpha$, 以 O 爲圓心, OP 爲半徑畫弧, 分別交 OA、OB 於點 F、H, 如圖 10 所示。

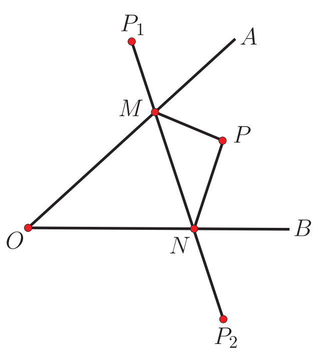

圖 8

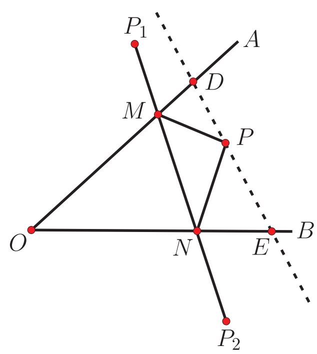

圖 9

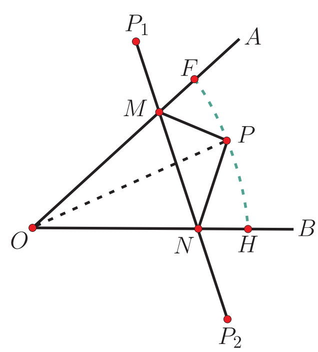

圖 10

表1 : r 不變, 點 P 在 $\overset{\frown}{FPH}$ 上運動 (α 改變)

α	$\triangle PMN$ 的周長
α_1	
α_2	
α_3	
$\vdots$	$\vdots$

表2 : r 改變, $\angle POA$ 不變

r	$\triangle PMN$ 的周長
r_1	
r_2	
r_3	
$\vdots$	$\vdots$

通過實驗, 我們可以得到如下結論: 對於給定的銳角 $\angle AOB$, $\triangle PMN$ 的周長僅與 r 有關, 而與點 P 到 $\angle AOB$ 兩邊的距離無關。r 越小, $\triangle PMN$ 的周長越小, 反之亦然。下面對這個結論進行證明:

在圖 8 的基礎上, 連結 OP、OP_1、OP_2。

由對稱性易知 $OP_1 = OP = OP_2 = r$, $PM = P_1M$,

$PN = P_2N$, $\angle P_1OM = \angle POM$, $\angle P_2ON = \angle PON$,

所以 $PM + PN + MN = P_1P_2$, $\angle P_1OP_2 = 2\angle AOB$。

設 $\angle AOB = \beta$, 則 $\angle P_1OP_2 = 2\beta$。

過點 O 作 $OQ \perp P_1P_2$ 於 Q,

如圖 11 所示, 則 $\angle P_1OQ = \beta$, $P_1Q = \dfrac{1}{2}P_1P_2$。

而 $P_1Q = OP_1 \sin\beta = r\sin\beta$,

所以 $P_1P_2 = 2r\sin\beta$。

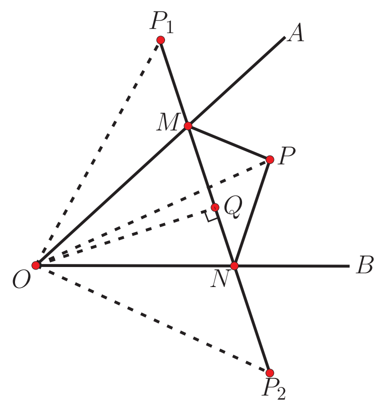

圖 11

易知點 P 到 OA、OB 的距離分別爲 $r\sin\alpha$, $r\sin(\beta-\alpha)$。

由於 $\triangle PMN$ 的周長等於 $2r\sin\beta$, 從這個式子可以看出, 對於給定的銳角 $\angle AOB$, β 爲定角, 所以 $\sin\beta$ 爲定值, 所以 $\triangle PMN$ 的周長僅與 r 有關, 而與點 P 到 $\angle AOB$ 兩邊的距離無關。r 越小, $\triangle PMN$ 的周長越小, 反之亦然。

根據這個結論和「垂線段最短」定理可知, 在銳角三角形的所有內接三角形中, 以銳角三角形的三條高線的垂足構成的三角形周長最短。這個三角形的三個頂點位置比較特殊, 是三角形的三條高線的垂足, 也叫垂足三角形。由於該三角形是根據德國數學家施瓦爾茲提出的問題得到的, 因此也叫施瓦爾茲三角形。如圖 12, 在銳角 $\triangle ABC$ 中, AD, BE, CF 分別是三條邊上的高, D, E, F 是垂足, 則 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 內周長最短的內接三角形。

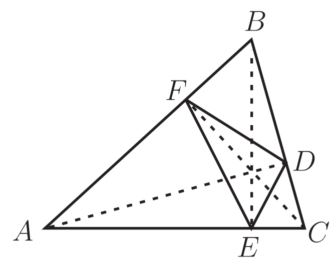

圖 12

施瓦爾茲三角形的證明

上面我們通過數學實驗的方法和猜想, 找到了三角形內周長最短的內接三角形。科學的猜想需要經過嚴格的證明。下面我們來對這個結論進行證明。

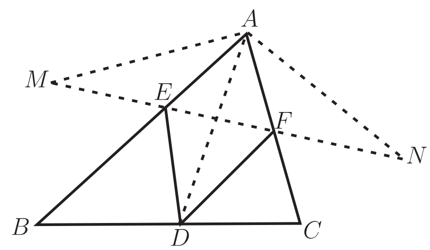

圖 13

如圖13, 設點 D 是銳角 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上的任意一點, 作點 D 分別關於 AB, AC

的對稱點 M, N, 連結 MN, 分別交 AB、AC 於點 E, F。由「將軍飲馬」問題的拓展問題知 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 內以點 D 爲定點的周長最短的三角形, 且周長等於 MN。連結 AD。由對稱性易知 $AM = AD = AN$, $\angle BAM = \angle BAD$, $\angle CAN = \angle CAD$, 所以 $\angle MAN = 2\angle BAC$。由餘弦定理, 得 $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos\angle MAN = 2AD^2(1-\cos 2\angle BAC)$。由於 $\angle BAC$ 爲定角, 所以當 AD 最小時, MN 最小, 即 $\triangle DEF$ 的周長最小, 此時必有 $AD \perp BC$。同理, $BF \perp AC$, $CE \perp AB$ 時, $\triangle DEF$ 的周長最小, 這時 $\triangle DEF$ 是銳角 $\triangle ABC$ 的三條高線的垂足構成的三角形。這是匈牙利數學家費葉爾 1900 年在中學讀書時給出的證明。

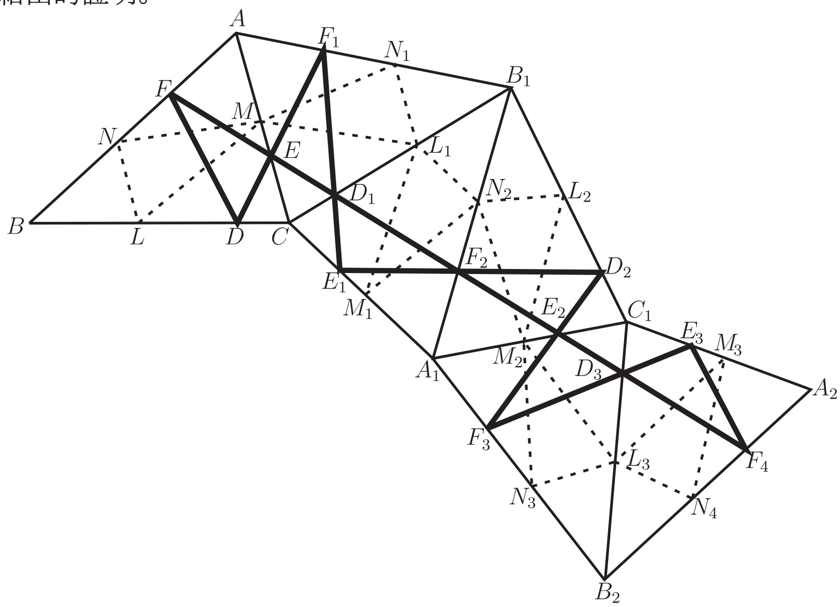

圖 14

後來施瓦爾茲給出了一種連續翻折的有趣證明。如圖 14, 將銳角 $\triangle ABC$ 依次以 AC, CB_1, B_1A_1, A_1C_1, C_1B_2 爲對稱軸連續施行五次對稱變換。此時 FF_4 是一條線段, 其長度正好等於垂足 $\triangle DEF$ 的周長的 2 倍。

設 $\triangle LMN$ 是銳角 $\triangle ABC$ 的任意一內接三角形, 將 $\triangle LMN$ 仍按上面的方式進行翻折, 則折線 NN_4 的長度正好等於 $\triangle LMN$ 的周長的 2 倍。

又 $\angle AFF_4 = \angle B_2F_4F$, $\therefore\ AB \| A_2B_2$。而 $AB = A_2B_2$, $\therefore\ AB // A_2B_2$。

而 $NF = N_4F_4$, $\therefore\ NF // N_4F_4$。$\therefore\ FF_4 = NN_4 \le$ 折線 NN_4。

即 $\triangle DEF$ 的周長 $\le \triangle LMN$ 的周長。

所以, 在銳角三角形的所有內接三角形中, 以垂足三角形的周長最短。

施瓦爾茲的證明可謂匠心獨具, 令人耳目一新, 這種證法很少見, 大大地開闊了讀者的視野。爲了強化這種連續翻折的證題意識, 下面留給讀者一道與之有關的思考題：
設 $\triangle DEF$ 是正 $\triangle ABC$ 的內接三角形, 頂點 D, E, F 分別在 BC、CA、AB 上。
求證：$\triangle DEF$ 的周長不小於 $\triangle ABC$ 的周長的一半。

從施瓦爾滋的連續翻折證明看垂足三角形的性質

施瓦爾滋的證明過程非常巧妙, 銳角三角形經過五次連續翻折之後其內部恰好出現一條直線段。爲什麼會如此, 緣於垂足三角形具有如下兩條性質：

性質1：銳角三角形的任意邊與該邊上以某一垂足爲端點的垂足三角形的兩邊的夾角相等。

如圖 12, $\triangle DEF$ 是銳角 $\triangle ABC$ 的垂足三角形, 則 $\angle AEF=\angle CED$, $\angle BDF=\angle CDE$, $\angle AFE=\angle BFD$。

證明：連結 AD, BE, CF。

由 $\angle BEC=\angle BFC=90^\circ$, 知 B, C, E, F 四點共圓。$\therefore \angle AEF=\angle ABC$。

同理 $\angle CED=\angle ABC$。$\therefore \angle AEF=\angle CED$。

同理 $\angle BDF=\angle CDE$, $\angle AFE=\angle BFD$。

性質2：以銳角三角形的一邊所在的直線爲對稱軸對其垂足三角形作翻折變換, 那麼頂點在對稱軸上的垂足三角形的一邊與另一邊經過翻折後的對應邊在一條直線上。

如圖 15, $\triangle DEF$ 是銳角 $\triangle ABC$ 的垂足三角形, 以 AC 爲對稱軸對 $\triangle DEF$ 作翻折變換得到 $\triangle D_1EF_1$, 則 DE 與 EF_1 在一條直線上 (或 EF 與 D_1E 在一條直線上)

性質 2 的證明比較簡單, 證明過程要用到性質 1, 過程留給讀者完成。

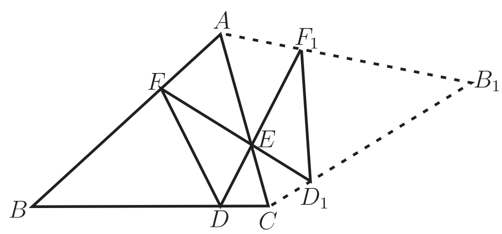

圖 15

以上我們從「將軍飲馬」問題開始, 經歷了「將軍飲馬」問題的拓展問題, 最後到施瓦爾茲三角形問題, 通過一步步強化問題的條件, 使問題變得越來越複雜, 越來越困難。但只要我們抓住「將軍飲馬」問題這個基本問題模型, 認淸問題的本質, 就一定能找到解決問題的途徑。

參考文獻

1. 陶建石。初中生世界, 從「將軍飲馬問題」到許瓦茲三角形。10, 66-67, 2015。
2. 潘慰高、魯有專、葛寶娣。教你思考。南京大學出版社, 137-138, 1995。

—本文作者陳海烽任教中國福建省廈門五緣實驗學校, 趙國瑞任教中國湖北省襄陽市襄州區黃集鎮初級中學—