數學傳播　42卷4期, pp. 86-90

微分均值定理的推廣

武國寧 · 孫　娜

一、引言

在微積分教材中, Rolle 均值定理, Lagrange 均值定理與 Cauchy 均值定理又 (統) 稱爲微分學基本定理、有限增量定理或有限改變量定理, 是微分學的基本定理之一, 內容是說一段連續光滑曲線中必然有一點, 它的斜率與整段曲線平均斜率相同 [1, 2]。均值定理用導函數的性質來研究函數的性質, 比如：單調性、極值、凹凸性與拐點等。蔡聰明推廣均值定理到高階導數的情形 [3]。

本文推廣並證明了均值定理到 n 個函數。這個結果是一個更普遍和簡潔的形式, 其特殊形式包含 Cauchy 均值定理與 Rolle 均值定理。

定理 1 (Rolle[1])**.** 假設函數$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 滿足：

(i) f 在 $[a,b]$ 上連續;

(ii) f 在 (a,b) 上可微分;

(iii) $f(a)=f(b)$。

則存在 $\xi\in(a,b)$ 滿足：$f'(\xi)=0$。

註記 1. 從物理角度而言, 一個直線運動的質點從起點開始回到起點, 必然有一個時刻, 在該時刻質點的速度爲零。

定理 2 (Lagrange[2])**.** 假設函數 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 滿足：

(i) f 在$[a,b]$上連續;

(ii) f 在(a,b)上可微分。

則存在 $\xi\in(a,b)$ 滿足：$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

---

[1] Michel Rolle (1652.4∼1719.11), 法國數學家。羅爾均值定理根據數學家羅爾命名。

[2] Joseph-Louis Lagrange (1736.1∼1813.10), 義大利天文學家, 數學家。

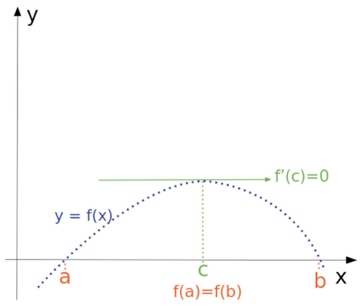

圖 1

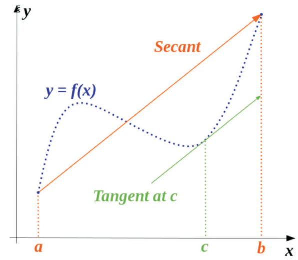

圖 2

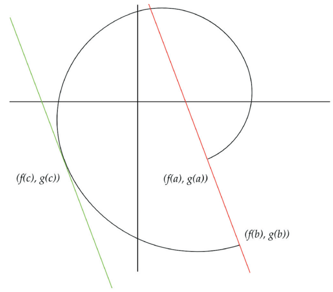

圖 3

註記 2. 所謂均值定理, 這裡主要是因爲$f'(\xi)$ 爲質點在區間$[a, b]$上的平均速度, 即所謂的均值。

定理 3 (Cauchy[3])**.** 假設 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ 滿足 :

(i) f, g 在$[a, b]$上連續;

(ii) f, g 在(a, b)上可微分。

則存在 $\xi \in (a, b)$ 滿足 : $[f(b) - f(a)]\, g'(\xi) = [g(b) - g(a)]\, f'(\xi)$。若进一步假设 $g'(t) \neq 0, \forall t \in (a, b), g(b) \neq g(a)$, 則存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

註記 3. *Cauchy* 均值定理爲參數方程下的 *Lagrange* 均值定理, 是一個一般化的結果。

二、微分均值定理的推廣

Cauchy 均值定理爲 Rolle 和 Lagrange 均值定理的一般形式, 它將一個函數的情形推廣到了兩個函數。其結果爲 :

$$\begin{aligned} &[f(b) - f(a)]\, g'(\xi) = [g(b) - g(a)]\, f'(\xi) \\ &\alpha\, [f(b) - f(a)]\, g'(\xi) + \beta\, [g(b) - g(a)]\, f'(\xi) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

這裡 $\alpha = -\beta$。進一步假設 $f(b) \neq f(a)$, $g(b) \neq g(a)$, 得到

$$\alpha \frac{f'(\xi)}{f(b) - f(a)} + \beta \frac{g'(\xi)}{g(b) - g(a)} = 0. \tag{2}$$

更一般的, 我們猜想到以下結果 :

[3]Augustin-Louis Cauchy (1789.8~1857.5), 法國數學物理學家。

命題 1. 假設 $f_i:[a,b]\to\mathbb{R}, i=1,2,\ldots,n$ 滿足 *:*

(i) $f_i, i=1,2,\ldots,n$ 在 $[a,b]$上連續;

(ii) $f_i, i=1,2,\ldots,n$ 在 (a,b) 上可微分;

(iii) $f_i(b)\neq f_i(a), i=1,2,\ldots,n,\quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0$。

則存在 $\xi\in(a,b)$, 滿足 *:*

$$\alpha_1\frac{f_1'(\xi)}{f_1(b)-f_1(a)}+\alpha_2\frac{f_2'(\xi)}{f_2(b)-f_2(a)}+\cdots+\alpha_n\frac{f_n'(\xi)}{f_n(b)-f_n(a)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{f_i'(\xi)}{f_i(b)-f_i(a)}=0$$

證明: 由結論出發, 要證明存在 $\xi\in(a,b)$ 滿足: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{f_i'(\xi)}{f_i(b)-f_i(a)}=0$, 令:

$$\Phi'(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{f_i'(x)}{f_i(b)-f_i(a)}\tag{3}$$

上式兩邊積分,

$$\begin{aligned}\int_a^x\Phi'(t)\,\mathrm{d}t&=\int_a^x\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{f_i'(t)}{f_i(b)-f_i(a)}\mathrm{d}t\\ \Phi(x)&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{f_i(x)-f_i(a)}{f_i(b)-f_i(a)}+\Phi(a)\end{aligned}\tag{4}$$

令 $\Phi(a)=0$,

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{f_i(x)-f_i(a)}{f_i(b)-f_i(a)}\tag{5}$$

下面驗證 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上滿足 Rolle 均值定理的條件。根據假設 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可微分。$\Phi(a)=0$, 又有

$$\Phi(b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{f_i(b)-f_i(a)}{f_i(b)-f_i(a)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$$

由 Rolle 定理知: 存在 $\xi\in(a,b)$, 滿足: $\Phi'(\xi)=0$, 即

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{f_i'(\xi)}{f_i(b)-f_i(a)}=0$$

註記 4. 命題 1 的另外幾個個輔助函數爲 (命題的證明轉化爲輔助函數滿足 Rolle 定理的條件):

$$\Psi_1(x)=\alpha_1\frac{(f_1(x)-f_1(a))(f_2(b)-f_2(a))\cdots(f_n(b)-f_n(a))}{(f_1(b)-f_1(a))(f_2(b)-f_2(a))\cdots(f_n(b)-f_n(a))}$$

$$
\begin{aligned}
&+\alpha_2\frac{(f_1(b)-f_1(a))(f_2(x)-f_2(a))\cdots(f_n(b)-f_n(a))}{(f_1(b)-f_1(a))(f_2(b)-f_2(a))\cdots(f_n(b)-f_n(a))}\\
&+\cdots\\
&+\alpha_n\frac{(f_1(b)-f_1(a))(f_2(b)-f_2(a))\cdots(f_n(x)-f_n(a))}{(f_1(b)-f_1(a))(f_2(b)-f_2(a))\cdots(f_n(b)-f_n(a))}
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
\Psi_2(x)=&\alpha_1(f_1(x)-f_1(a))(f_2(b)-f_2(a))\cdots(f_n(b)-f_n(a))\\
&+\alpha_2(f_1(b)-f_1(a))(f_2(x)-f_2(a))\cdots(f_n(b)-f_n(a))\\
&+\cdots\\
&+\alpha_n(f_1(b)-f_1(a))(f_2(b)-f_2(a))\cdots(f_n(x)-f_n(a))
\end{aligned}
$$

註記 5. 若$n=2,\alpha_1=-\alpha_2$, 則上述命題則退化爲 Cauchy 均值定理。即,

$$\frac{f_1'(\xi)}{f_1(b)-f_1(a)}=\frac{f_2'(\xi)}{f_2(b)-f_2(a)},\xi\in(a,b)$$

因爲 Cauchy 均值定理爲 Rolle 和 Lagrange 均值定理的一般化情形, 所以命題1 爲更一般化的微分均值定理。

註記 6. 一些例子：

(i) 若$f_k(x)=x^k,k=1,2,\ldots,n,\sum_{i=1}^n\alpha_i=0$, 則有$\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\alpha_1\frac{1}{b-a}+\alpha_2\frac{2\xi}{b^2-a^2}+\cdots+\alpha_n\frac{n\xi^{n-1}}{b^n-a^n}=0.$$

(ii) 若$f_k(x)=\sin(kx),k=1,2,\ldots,n,\sum_{i=1}^n\alpha_i=0$, 則$\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\alpha_1\frac{\cos(\xi)}{\sin(b)-\sin(a)}+\alpha_2\frac{2\cos(2\xi)}{\sin(2b)-\sin(2a)}+\cdots+\alpha_n\frac{n\cos(n\xi)}{\sin(nb)-\sin(na)}=0.$$

這裡要求：$\sin(kb)\neq\sin(ka),k=1,2,\ldots,n$。

(iii) 若$f_k(x)=e^{kx},k=1,2,\ldots,n,\sum_{i=1}^n\alpha_i=0$, 則有$\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\alpha_1\frac{e^\xi}{e^b-e^a}+\alpha_2\frac{2e^{2\xi}}{e^{2b}-e^{2a}}+\cdots+\alpha_n\frac{ne^{n\xi}}{e^{nb}-e^{na}}=0.$$

三、結論

均值定理爲微積分的重要定理之一, 通過均值定理研究函數的性質具有重要的意義。推廣後的均值定理具有更廣泛的形式和意義, 可以更好地幫助我們理解微積分的知識。

參考文獻

1. V. A. Zorich, Mathematical Analysis I, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
2. V. A. Zorich, Mathematical Analysis II, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
3. 蔡聰明。均值定理的統合與推廣。數學傳播季刊, 33(2), 52-62, 1998.

—本文作者武國寧任教中國石油大學數學系, 孫娜任教中國石油大學數學系—

勘誤表

本刊167期勘誤如下:

P.64 倒數第三行 $398 = 3^5+3^4+2^3+2^1+2$ 修改爲 $398 = 3^5+3^4+2^3+2^2+2$。

P.94 作者李學數教授爲美國聖荷西大學退休榮譽教授

本刊166期勘誤如下:

P.6 下方圖片説明「Noam Ekies」修改爲「Noam Elkies」。

P.91 第二行及第四行「兩個質數」修改爲「兩個整數」。

倒數第六行「穀山-志村」修改爲「谷山-志村」。

P.92 第四行「穀山-志村」修改爲「谷山-志村」。

倒數第三行文字「挪威自然科學與文學院的」刪除。

P.93 倒數第四行「3位元」修改爲「3位」。

本刊165期勘誤如下:

P.15 第二行「拓撲」修改爲「拓樸」。

P.20 第三行、最後一行「拓撲」修改爲「拓樸」。

P.23 簡介第五行「1965年升任中研院研究員」修改爲「1975年升任中研院研究員」。

P.64 第十一行「n_2」修改爲「n^2」。