

「霍金的合作者」——

彭羅斯的數學人生

邵紅能

物理學界的一位思想家說過，人類的大腦以及宇宙本身一定是以某種我們尚未發現的理論運作的。

羅傑·彭羅斯 (Roger Penrose, 1931 年 8 月 8 日)，英國著名數學家、理論物理學家、爵士、牛津大學教授，在物理學、數學和幾何學中，他做了許多極為重要的奉獻。他用他本人的廣義相對論言語證明了恆星能夠構成黑洞，同時，他創造了扭量 (twistor) 理論，一種全新的時空觀，使我們對引力實質有了更深層次的瞭解。他還發現了一類名為彭羅斯點陣 (Penrose tiles) 的著名的幾何方式。此外，他還是一個腦科學的研討者，提出了一個引人深思的理論：「意識產生於量子過程。」並寫了一系列的易讀的科普暢銷書，其代表作品為《皇帝新腦》(The Emperor's New Mind)。作為一個理論學家，彭羅斯的名字能夠與霍金、愛因斯坦等偉人相提並論。

1964年，在美國奧斯丁的德克薩斯大學工作時，彭羅斯開始提出一種觀點，即應用扭量理論來研究量子引力。他在牛津大學工作時，繼續發展了這一觀點，他認為四維時空可以完美應用四維複幾何理論。因此，他認為弦論引入額外維來研究物理是對這一獨特性的忽視。1965年，他發表以《引力坍塌和時空奇點》(Gravitational Collapse and Space-time Singularity, 1965) 為代表的一系列論文，和著名數學物理學家霍金一起創立了現代宇宙論的數學結構理論。

1. 出生學術世家，善於鑽研新問題

彭羅斯 (Roger Penrose) 1931 年 8 月 8 日出生於英國埃塞克斯州的一個醫生家庭，父親是著名的人類遺傳學家萊昂內爾·彭羅斯。彭羅斯先進入倫敦大學的隸屬中學，然後，進入倫敦大學學院。小時候，彭羅斯的數學不太好，他反應很慢，慢到讓人無法想像。彭羅斯小時候在加拿大呆過 6 年時間，那時正是戰爭時期。一次在課上，老師要求完成一些心算，學生們必須很快地計算，這對年僅 8 歲的彭羅斯來說那速度太快了。因此，老師不太喜歡他，並把他換到了一個稍差的班級中。那個班級的老師發現彭羅斯考試成績如此糟糕後，決定不限定考試的時間。喜歡做多久都可以，且考的考卷都是一樣的。甚至，彭羅斯被允許在考試結束後的活動時間中繼續答題。每個人都走出教室開心地玩耍著，而他仍在繼續答題。所以，他至少比其他人要慢

兩倍。最終，彭羅斯都完成得不錯。如果可以慢慢來，彭羅斯就能得高分。

1955年，當他還是學生之時，年僅 24 歲的彭羅斯重新發明了廣義逆矩陣 (generalized inverse for matrices) (又稱「摩爾-彭羅斯廣義逆」) (Moore-Penrose inverse)。1958年，彭羅斯在知名代數學家與幾何學家約翰·陶德 (John A. Todd) 指導下獲得劍橋大學博士學位，其博士論文題目為《代數幾何學中的張量方法》(Tensor methods in algebraic geometry)。特別地，1965年，彭羅斯發表了《引力坍塌和時空奇點》等論文，並和霍金一同創建了現代宇宙論的數學構造理論。彭羅斯質疑現代物理中的占中心位置 (center position) 的理論，包括弦論和量子力學。彭羅斯以為物理學家永遠不會理解宇宙的終極理論，除非他們能透過今天那些不成熟理論的表像看到我們所生活的客觀世界的最深層的真實。他對平行宇宙是這樣說的「平行宇宙是一個以人為中心的想法，就像一切東西我們都能夠用我們的五種感官所領會到的觀念去瞭解」。

據有關資料 (見《現代物理知識》2018 年第 2 期《宇宙奧秘的探索者——著名物理學家霍金》一文) 介紹，「在醫生宣判的死期臨近時，霍金的廣義相對論學習有了點眉目，而且，他遇見了彭羅斯。彭羅斯比霍金大 11 歲，他有相當好的數學功底，當其他人正在費盡心思猜測求解方程時，他引進了一種新方法，不需要具體的求解方程，就能看出解的一些性質。從 1965 直到 1970 年，霍金和彭羅斯組成一個黑洞和嬰兒宇宙 (相當於「早期宇宙」) 的研究小組，兩人一道將奇點的存在性證明推廣到更加一般的情況，包括早期宇宙。」可見，彭羅斯有極強的數學思維。

1970年代，彭羅斯與其父親一起合作，設計出非凡的幾何鋪砌。他的鋪砌設計被荷蘭藝術家埃舍爾 (M. C. Escher, 因創立光學幻影而聞名) 收入石版畫中。2003 年，彭羅斯到美國普林斯頓大學演講，題目是《宇宙的新物理學：時尚、信仰、幻想》(Faith, Fashion, Fantasy in the New Physics of the Universe)。其中時尚指弦論，信仰指宇宙由量子力學構築，幻想指共行迴圈宇宙 (conformal cyclic cosmology) 模型。在很多專家看來，彭羅斯更應該是一位數學家 and 數學物理學家。這樣說，是因為彭羅斯對物理的最大的貢獻都和數學相關。

2004年，他出版了《通向實在之路》一書。幾十年來，科學界一直公認的宇宙大爆炸學說，認為大爆炸使一切從無到有，無論是時間還是空間。彭羅斯教授等的發現具有革命性意義，我們必須記住，宇宙學中的革命是極其罕見的。

2. 黑洞的本源，乃幾何中的奇點

彭羅斯對數學物理的貢獻集中在和愛因斯坦的引力理論相關的問題上，而這些問題都和幾何有關。愛因斯坦的時空觀與萬有引力緊密相關，在愛因斯坦看來，萬有引力最恰當的解釋不是傳統的力，而是時間和空間的彎曲。當時空彎曲了，所有的物體走最短程的路徑，這些短程路徑看上去就像是引力作用在物體上所引起的。時空彎曲的最有名的例子是黑洞，在黑洞的周圍存在一個曲面，在這個曲面之內，光線的最短程線不能到達黑洞的外部，這個特點就是黑洞這個名

字的來源。

1965年，彭羅斯證明了，在巨大質量天體塌縮成黑洞的過程中，必然存在一個點，所有的塌縮物質在這個點之後不再存在路徑。用幾何的語言來說，這是幾何上的「奇點」。而在普通的人看來，這是毀滅之點，因為越是靠近這個點，引力產生的拉扯力越大，最終歸於毀滅。從物理學的角度來看，在這個點上，所有的物理學定律不再適用。1970年代，霍金與彭羅斯一道將奇點的存在性證明推廣到更加一般的情況，包括早期宇宙。奇點的存在一直是物理學中的一個難題。好在我們這些在黑洞外部的人不必擔心，因為我們看不到它們，它們總是被所謂的視界包圍起來。事件視界 (event horizon) 很像我們在大海上看到的一個圓，也就是地平線，在這個圓之外我們什麼也看不到。1969年，彭羅斯提出了著名的宇宙監督假說 (cosmic censorship conjecture)，該假說保證任何時空奇點都會被視界包圍起來。直到今天，這個猜測還是引力理論中的一個難題。

對此，彭羅斯在接受英國廣播公司的採訪中提到：「在我最新提出的宇宙學理論中，宇宙存在指數式的膨脹，但是這種膨脹並非萬古不變，隨著黑洞將宇宙內的物質全部吞噬，在遙遠的未來將以大爆炸的形式再度開啟另一個宇宙。」

1973年，霍金與彭羅斯等人發展了廣義相對論中的因果結構理論，部分結果成為霍金與喬治·埃裡斯 (G. F. R. Ellis) 合著的《時空的大尺度結構》(The Large Scale Structure of Space-time) 的基礎。《時間簡史》出版一個月後，霍金前往以色列接受獎項，和彭羅斯一起被授予沃爾夫獎。霍金總被問對於上帝的存在有何解釋，在宇宙中有無上帝的位置。或者更直接地被問，你信上帝嗎？猶太議員們聯合抵制，聲稱霍金的理論與猶太教信條對立，猶太教認為在上帝創造宇宙前既不存在時間，也不存在物體。

2010年，彭羅斯稱已經發現了宇宙大爆炸之前還存在另一個宇宙的證據。在對宇宙微波背景輻射的研究中，發現了神秘的同心圓現象，可以認為宇宙之前還有宇宙，並且提供了在一個宇宙中所發生事件的痕跡。宇宙微波背景輻射讓我們「窺視」了在大爆炸發生後三十萬年的情景，這段時期與長達 138 億年的宇宙年齡相比顯得極其短暫。

事實上，宇宙中的恆星和星系大約在三億年後開始形成，我們的太陽則誕生於大爆炸之後的五十億年，而地球上首次出現生命則在 37 億年前。彭羅斯與葉里溫州立大學 (Yerevan State University) 的科學家瓦赫·古薩德揚 (Vahe Gurzadyan) 分析了由隸屬於美國國家航空航天局的威爾金森微波背景輻射探測器觀測到的資料，發現在大爆炸之前竟然存在神秘的輻射。根據他們的研究報告稱，一共發現了 12 個同心圓輻射「印跡」，其中有五個環具有特別的意義，分別對應著宇宙演化歷史上五次大規模的事件。出現星系團附近的神秘「圓環」的變化幅度在背景輻射上看卻顯得非常低。因此，研究人員似乎開始拋棄「暴漲」宇宙模型，該理論認為宇宙誕生於一次大爆炸中，並在將來會繼續膨脹直到一個臨界點，這種宇宙模型不僅有開端，也是結束。

3. 「非週期性」貼磚，美妙的圖形

直角三角形，等邊三角形，銳角三角形，除了咱們課本中學過的這些，你還知道哪些呢？你絕對沒有聽過彭羅斯三角形。彭羅斯三角形最早是由瑞典藝術家奧斯卡·羅特斯維爾德 (Oscar Reutersvärd) 在 1934 年製作。英國數學家羅傑·彭羅斯及其父親遺傳學家列昂尼德·彭羅斯 (Lionel Penrose) 設計並推廣此圖案，並在 1958 年 2 月份的《英國心理學月刊》中發表，稱之為「最純粹形式的不可能 (impossibility in its purest form) 」。

彭羅斯在劍橋讀研究生的第二年，參加了在阿姆斯特丹召開的國際數學家大會。在那裡，見到了一個他很熟悉的演講者，手裡有本目錄冊。冊子的封面就是埃舍爾的畫《晝夜》，畫裡的鳥兒在向著相反的方向飛行。景色的一邊是黑夜，另一邊是白晝。彭羅斯被它迷住了，於是，就問演講者是從哪裡搞到的。「噢，有個叫埃舍爾的畫家在舉辦一個展覽，也許你會感興趣。」於是，彭羅斯就被這些不同於任何自己所見過事物的詭異而奇妙的畫面深深地吸引了。他決定自己嘗試著畫一些不可能有的景致，結果就想出了這個被稱作爲三杆的東西。這是一個看上去像是三維物體的三角形，但事實上它不可能是三維的。他將它拿給父親看，他也畫出了一些不可能存在的建築物和其他東西。後來，在雜誌上發表了一篇文章，彭羅斯對埃舍爾表示感謝。

另外，彭羅斯階梯是一個有名的幾何學悖論，指的是一個始終向上或向下但卻無限迴圈的階梯，可以被視爲彭羅斯三角形的一個變體。這是一個由二維圖形的形式表現出來的擁有 4 個 90° 拐角的四邊形樓梯。由於它是個從不上升或下降的連續封閉循環圖表，所以，一個人可以永遠在上面走下去而不會升高。據說，這些圖案也是受到了荷蘭畫家埃舍爾那些不可能出現於現實的詭異畫面啟發而創作的。彭羅斯階梯不可能在三維空間記憶體在，但只要放入更高維的空間，彭羅斯階梯就可以很容易的實現。如同莫比烏斯環、克萊因瓶。

彭羅斯是一位大膽而充滿豪情的學者，他對單一的圖形和重複不那麼感興趣，而對無窮的變化興味盎然。準確說來，他感興趣的是一類「非週期性」貼磚，它們由若干塊組成一套，可以嚴絲合縫地鋪滿無窮大的平面，而構成的圖案又不會重複。這可是一個難題，因爲他不能使用具有二、三、四、六條對稱軸的圖形（如矩形、正三角形、正方形和正六邊形），這些圖形在無窮大的平面上會鋪成週期性的重複圖案。這就意味著彭羅斯只能依靠那些會在平面上留下縫隙的圖形，也就是那些具有禁用對稱性的圖形。

我們知道，瓷磚都是長方形或正方形的，因爲我們可以用這些磚將整個地面鋪滿。可以用於貼磚的還有正三角和正六邊形，這些貼磚貼出的圖案有一個共同的地方，就是不但具有一定的對稱性，還有週期性。有些形狀的磚是不能用來緊密地貼滿地面的，例如正五邊形。還可以用幾種不同形狀的貼磚貼滿整個地面，我們將這樣的一組幾何形狀稱之爲貼磚。有些特別的貼磚不僅可以用來貼滿平面，貼出來的圖案有很多種，而且不可能具有週期性，這類貼磚叫做非週期貼磚。在彭羅斯之前，通常的一組非週期貼磚含有很多不同的形狀，即使在彭羅斯發現以他的名字命名的只有兩個形狀的貼磚的同一年（1974年），最好的非週期貼磚也含有六種不同的形狀。

1974年, 英國數學家彭羅斯創造了一套具有革命意義的貼磚樣式, 這套貼磚, 能夠以永不重複的方式鋪滿在無窮平面上。1982年, 以色列晶體學家丹尼爾·謝赫特曼 (Dan Schechman) 發現, 某種金屬合金的原子排列與之前測量的其它結果都不一樣。後來, 彭羅斯獲得了數學圈中少有的公衆知名度, 謝赫特曼則贏取了諾貝爾獎。這兩位學者, 都違抗人類的直覺, 改變了我們對自然結構的基本認識, 並揭示了從高度有序的環境中出現無盡變化的可能性。

—本文作者任教中國上海市城市科技學校—

2019 Taipei Conference on Geometric Invariance and Partial Differential Equations

日期：2019年1月11日(星期五) ~ 2019年1月14日(星期一)

地點：台北市大安區羅斯福路四段1號 天文數學館 6樓

詳見：

https://www.math.sinica.edu.tw/www/file_upload/conference/201901-GEO/GEO.html