數學傳播 42卷4期, pp. 71-80

四面體餘弦定理的另證

連威翔

一、前言

在數學傳播 157 期「四面體的餘弦定理」一文中 (見 [1]), 作者提出了三種不同形式的四面體餘弦定理。其中第一種形式的結果, 是一個將四面體內部任一兩面角的餘弦值以其六稜長來表示的公式, 作者在其公式推導過程中, 使用了三維的 Binet-Cauchy 恆等式。推導出該公式後, 作者隨即給出三個例子, 並透過公式計算出各例中四面體某兩面角的餘弦值。

在本文中, 筆者將重新證明 [1] 中第一種形式的結果。在 [1] 中, 作者是先推導出公式、再驗證例子, 但在本文中, 筆者將反其道而行, 將先對 [1] 中的一個例子進行計算(第二節), 隨後再進行公式的證明(第三節)。特別的是, 本文將會透過立體幾何性質來推導證明, 過程中不會用到 Binet-Cauchy 恆等式, 希望可發揮與 [1] 相互對照的作用。

除了上述的證明方法外, 我們也可透過「球面三角餘弦律」證明出同樣的結果, 這部份將在第四節中呈現。

二、一個性質與例題的計算

我們先證明底下這個立體幾何性質:

性質1: 空間中, 已知有四條相異直線 L_1, L_2, L_3, M, 其中 L_1 垂直 M 於 A 點、L_2, L_3 垂直 M 於 B 點, 且 $L_1 // L_2$。若分別於 L_1, L_2 上取 D, C 兩點使 $ABCD$ 爲一矩形, 並取 L_3 上異於 B 的一點 E, 則 $\overline{CD} \perp \overline{CE}$。

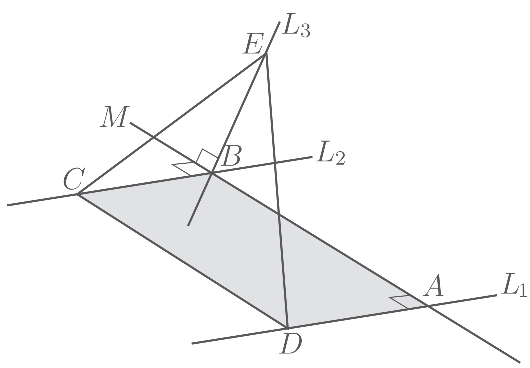

圖 1

證明: 因爲 $\overline{AB}\perp\overline{BE}$ 且 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$, 故 $\overline{AB}$ 垂直平面 BCE (即同時包含 L_2, L_3 的平面); 又 $\overline{AB}//\overline{CD}$, 可知 $\overline{CD}$ 亦垂直平面 BCE, 故 $\overline{CD}\perp\overline{CE}$, 證畢。

有了上面的性質 1, 接下來我們便可考慮底下的問題, 問題所要探討的四面體是來自於 [1] 中的一個例子:

問題1: 設四面體 O-ABC 如圖 2 所示, 試求平面 OCA 與平面 OCB 的兩面角餘弦值。

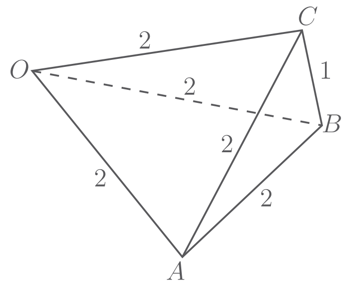

圖 2

解: 仿 [1] 所用的符號, 我們以 $\angle(OCA, OCB)$ 表示平面 OCA 與平面 OCB 在四面體 O-ABC 內部的兩面角。爲求出 $\cos\angle(OCA, OCB)$, 首先我們透過餘弦定理計算底下兩個餘弦值

$$\cos\angle AOC = \frac{2^2+2^2-2^2}{2\times 2\times 2} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

$$\cos\angle BOC = \frac{2^2+2^2-1^2}{2\times 2\times 2} = \frac{7}{8} \tag{2}$$

因此 $\angle AOC$, $\angle BOC$ 皆爲銳角, 且由上述兩式可知

$$\sin\angle AOC = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{3}$$

$$\sin\angle BOC = \frac{\sqrt{15}}{8} \tag{4}$$

此時回到圖 2, 作 $\overline{AD}\perp\overline{OC}$ 於 D、$\overline{BE}\perp\overline{OC}$ 於 E, 如下圖3:

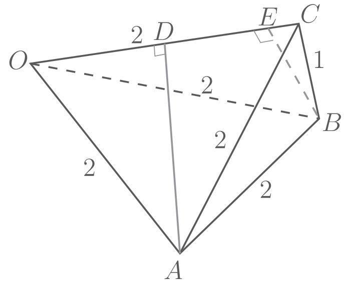

圖 3

由 (1) 至 (4) 式的四個三角函數值, 可知圖 3 中有

$$\overline{OD}=1,\quad \overline{AD}=\sqrt{3},\quad \overline{OE}=\frac{7}{4},\quad \overline{BE}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

在圖 3 中作 $\overline{FE}//\overline{AD}$ 且滿足 $\overline{FE}=\overline{AD}$, 則 $ADEF$ 爲矩形。連接 $\overline{AF}$, $\overline{BF}$ 後, 再將圖 3 中某些線段抹去, 使成下圖 4:

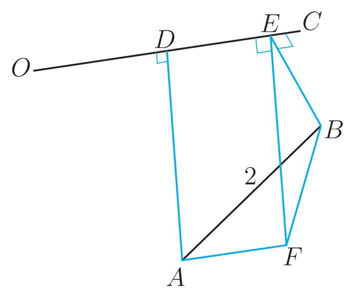

圖 4

注意圖 4 中 $\overleftrightarrow{OC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{FE}$, $\overleftrightarrow{BE}$ 四直線彼此之間的關係, 等同於圖 1 中 M, L_1, L_2, L_3 的相對關係, 且 $ADEF$ 亦爲矩形, 因此由性質 1 可知 $\overline{AF}\perp\overline{BF}$。因爲

$$\overline{AF}=\overline{DE}=\overline{OE}-\overline{OD}=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$$

由畢式定理知

$$\overline{BF}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{4}$$

因爲 $\overline{BE}$, $\overline{FE}$ 皆垂直 $\overline{OC}$ 於 E, 故 $\angle BEF$ 爲圖 3 中的兩面角 $\angle(OCA, OCB)$, 復由圖 4 中 $\overline{EF}=\overline{AD}=\sqrt{3}$ 可知

$$\begin{aligned}\cos\angle(OCA,OCB)=\cos\angle BEF&=\frac{\overline{BE}^2+\overline{EF}^2-\overline{BF}^2}{2\times\overline{BE}\times\overline{EF}}\\&=\frac{\frac{15}{16}+3-\frac{55}{16}}{2\times\frac{\sqrt{15}}{4}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}}{15}\end{aligned}$$

解題完畢, 此與 [1] 中該例子的計算結果相同。

三、透過立體幾何的證明

有了上述對問題 1 的成功解題, 接下來我們考慮一般情形下的問題。底下, 將四面體換個與圖3不同的角度來看看:

問題2: 設四面體 O-ABC 邊長如圖 5 所示, 試求 $\cos\angle(OCA, OCB)$ 之值。

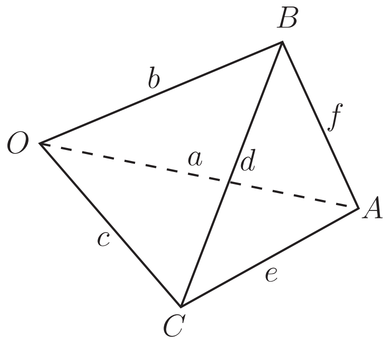

圖 5

圖 5 中, 我們沿用 [1] 中推導公式時所用的邊長符號:

$$\overline{OA}=a,\quad \overline{OB}=b,\quad \overline{OC}=c,\quad \overline{BC}=d,\quad \overline{CA}=e,\quad \overline{AB}=f \tag{5}$$

解題過程如下:

解: 仿照問題 1 的解法, 令 $\angle AOC=\theta_1$, $\angle BOC=\theta_2$, 則有底下兩餘弦值

$$\cos\theta_1=\cos\angle AOC=\frac{a^2+c^2-e^2}{2ac} \tag{6}$$

$$\cos\theta_2=\cos\angle BOC=\frac{b^2+c^2-d^2}{2bc} \tag{7}$$

此處注意 $\angle AOC$, $\angle BOC$ 不一定是銳角。由上述兩式可知

$$\sin\theta_1=\frac{\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-e^2)^2}}{2ac} \tag{8}$$

$$\sin\theta_2=\frac{\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-d^2)^2}}{2bc} \tag{9}$$

此時回到圖 5, 作 $\overline{AD}\perp\overline{OC}$ 於 D、$\overline{BE}\perp\overline{OC}$ 於 E, 如底下圖 6:

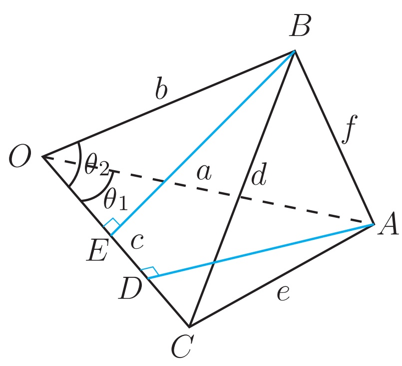

圖 6

注意作 $\triangle AOC$ 的高 $\overline{AD}$ 時, 垂足 D 不一定如圖 6 那樣落在 $\overline{OC}$ 上。一般來說, 垂足 D 的位置共有三種情形, 請看下圖:

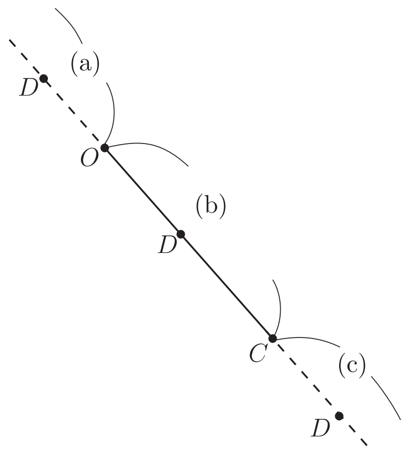

圖 7

垂足 D 在直線 OC 上的落點, 可分成上圖中 (a), (b), (c) 三種不同情形, 分述如下:

(a) $\angle AOC = \theta_1 > 90^\circ$ 時, $\overline{OD} = a\cos\theta_1 < 0$, D 不在 $\overline{OC}$ 上, 它位在直線 OC 上靠近 O 那邊的 $\overline{OC}$ 外側;

(b) $\angle AOC = \theta_1 \le 90^\circ$ 且 $\overline{OD} = a\cos\theta_1 \le \overline{OC}$ 時, D 落在 $\overline{OC}$ 上;

(c) $\angle AOC = \theta_1 < 90^\circ$ 且 $\overline{OD} = a\cos\theta_1 > \overline{OC}$ 時, D 不在 $\overline{OC}$ 上, 它位在直線 OC 上靠近 C 那邊的 $\overline{OC}$ 外側。

注意 (a) 情形會得到 $\overline{OD} < 0$, 因此這裡 $\overline{OD}$ 是表示有向線段。在 (a) 情況下有 $\overline{OD} < 0$, 另外兩情形則有 $\overline{OD} \ge 0$。

同理, 作 $\triangle BOC$ 高 $\overline{BE}$ 時, 垂足 E 也不一定是如圖 6 那樣在 $\overline{OC}$ 上。但無論如何, 我們總可以由圖 6 得出

$$\overline{ED} = \overline{OD} - \overline{OE} = a\cos\theta_1 - b\cos\theta_2 \tag{10}$$

留意此處 $\overline{ED}$ 也是有向線段, 其值也可能爲負或零, 端看 (10) 中 $a\cos\theta_1$, $b\cos\theta_2$ 兩者之間的大小關係。

仿照第二節中由圖 3 得出圖 4 的手法, 我們也將圖 6 作輔助線, 並抹去較不相干的線段, 可得下圖 8:

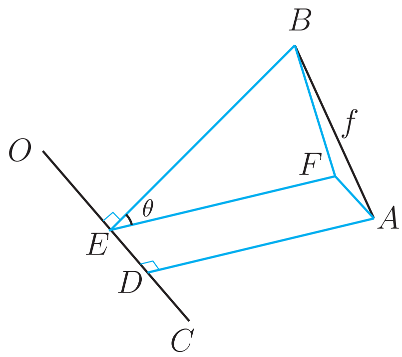

圖 8

其中我們作矩形 $ADEF$ 並連接 $\overline{BF}$, 此時由性質 1 知 $\overline{AF}\perp\overline{BF}$。令 $\angle BEF=\theta$, 則 θ 為圖 6 中平面 OCA, OCB 的兩面角, 即圖 6 中有 $\angle(OCA,OCB)=\theta$。

此時回到圖 8, 由畢氏定理與餘弦定理可知

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2-\overline{AF}^2=\overline{BF}^2&=\overline{EF}^2+\overline{BE}^2-2\overline{EF}\cdot\overline{BE}\cos\theta\\ \Rightarrow\ f^2-\overline{ED}^2&=\overline{AD}^2+\overline{BE}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{BE}\cos\theta\end{aligned}\tag{11}$$

再次回到圖 6, 可知 $\overline{AD}=a\sin\theta_1$, $\overline{BE}=b\sin\theta_2$, 利用 (10) 式, 可繼續推導 (11) 得

$$\begin{aligned}f^2-(a\cos\theta_1-b\cos\theta_2)^2&=a^2\sin^2\theta_1+b^2\sin^2\theta_2-2(a\sin\theta_1)(b\sin\theta_2)\cos\theta\\ \Rightarrow\ \cos\theta&=\frac{a^2+b^2-f^2-2ab\cos\theta_1\cos\theta_2}{2ab\sin\theta_1\sin\theta_2}\end{aligned}\tag{12}$$

將 (6), (7), (8), (9) 四式代入 (12) 後可得:

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{a^2+b^2-f^2-2ab\times\frac{a^2+c^2-e^2}{2ac}\times\frac{b^2+c^2-d^2}{2bc}}{2ab\times\frac{\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-e^2)^2}}{2ac}\times\frac{\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-d^2)^2}}{2bc}}\\ &=\frac{2c^2\times(a^2+b^2-f^2)-(a^2+c^2-e^2)(b^2+c^2-d^2)}{\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-e^2)^2}\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-d^2)^2}}\end{aligned}$$

至此, 即得圖 6 中兩面角 $\angle(OCA,OCB)$ 餘弦值的計算公式如下

$$\cos\angle(OCA,OCB)=\frac{\begin{vmatrix}a^2+b^2-f^2 & b^2+c^2-d^2\\ a^2+c^2-e^2 & 2c^2\end{vmatrix}}{\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-e^2)^2}\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-d^2)^2}}\tag{13}$$

此公式與 [1] 中作者所推得的公式完全相同。

四、使用球面三角餘弦律的證明

看完第三節的證明, 讀者可能會覺得過程有點長, 那麼是否還有其他的證法呢? 衆所周知在平面上有平面三角餘弦律, 然而球面上, 也有所謂的球面三角餘弦律, 其敘述與證明不妨請參考 [2]。透過球面三角餘弦律, 我們可再得 (13) 一個較簡單的另證。

爲了使用球面三角餘弦律, 我們先將圖 6 中的向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 分別伸縮爲單位向量 $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ 但方向保持不變。此時對以 O 爲圓心的單位球面而言, 將球面上三點 A', B', C' 透過大圓上的弧彼此連起來後, $A'B'C'$ 即成爲該球面上的球面三角形, 如下圖:

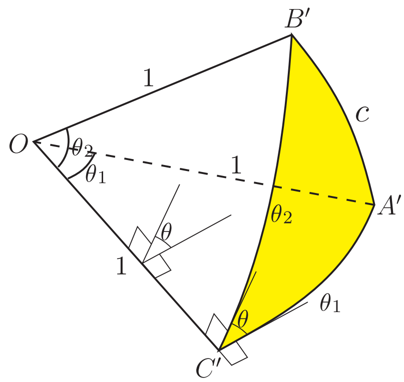

圖 9

注意上圖中 $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OC'}$ 的夾角以及 $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ 的夾角, 仍爲圖 6 中的 θ_1, θ_2。因爲是單位球面, 所以 θ_1, θ_2 同時也表示 $A'C'$ 弧與 $B'C'$ 弧的弧長。

此外, 平面 $OC'A'$ 與平面 $OC'B'$ 的夾角, 同樣是圖 8 底下所假設的 $\angle(OCA, OCB) = \theta$, 此夾角同時也是圖 9 中弧 $A'C'$ 與弧 $B'C'$ 上過 C' 的兩大圓切線夾角, 筆者將這兩個 θ 角同時畫在圖 9 內。最後, 令弧 $A'B'$ 的弧長爲 c, 同理可知 $\angle A'OB' = c$。

此時透過圖 9, 球面三角餘弦律告訴我們

$$\cos\theta = \frac{\cos c - \cos\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_1\sin\theta_2} = \frac{\cos\angle A'OB' - \cos\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_1\sin\theta_2}$$

注意 $\angle A'OB'$ 的大小與圖 6 中的 $\angle AOB$ 相同, 此時利用圖 6 及其上方的 (6), (7), (8), (9) 四式, 可繼續推導上式得

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\cos\angle AOB - \cos\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_1\sin\theta_2}\\ &= \frac{\dfrac{a^2+b^2-f^2}{2ab} - \dfrac{a^2+c^2-e^2}{2ac}\times\dfrac{b^2+c^2-d^2}{2bc}}{\dfrac{\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-e^2)^2}}{2ac}\times\dfrac{\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-d^2)^2}}{2bc}}\end{aligned}$$

$$= \frac{2c^2\times(a^2+b^2-f^2)-(a^2+c^2-e^2)(b^2+c^2-d^2)}{\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-e^2)^2}\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-d^2)^2}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a^2+b^2-f^2 & b^2+c^2-d^2 \\ a^2+c^2-e^2 & 2c^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-e^2)^2}\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-d^2)^2}}$$

這樣子便再度證明了 (13) 式。

以上就是透過球面三角餘弦律的證明方法。要特別提醒讀者的是, 在 [2] 文末的附錄中, 作者對球面三角餘弦律的證明內, 與 [1] 同樣使用到了三維的 Binet-Cauchy 恆等式, 但第三節中的證明中, 則沒有用上這個恆等式。

五、利用公式計算四面體的高與體積

有了公式 (13) 後, 我們不妨也造個例子來計算看看。仿照圖 6 的樣子, 我們另外畫個四面體並賦予各稜長, 如下圖 10:

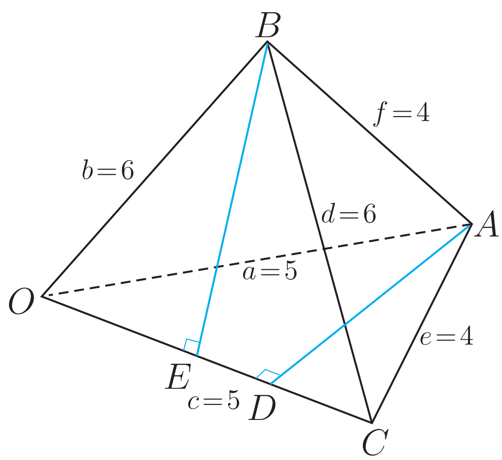

圖 10

由公式 (13) 可計算 $\cos\angle(OCA, OCB)$ 如下:

$$\cos\angle(OCA,OCB)=\frac{\begin{vmatrix} 45 & 25 \\ 34 & 50 \end{vmatrix}}{\sqrt{1344}\sqrt{2975}}=\frac{5}{\sqrt{51}}$$

對圖 10 作四面體 O-ABC 的高 $\overline{BG}$, 如下圖 11:

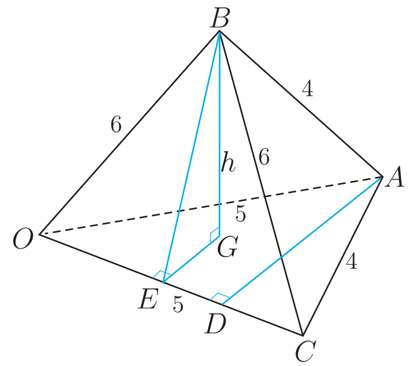

圖 11

若想求出 $\overline{BG}$ 長, 連接 $\overline{GE}$ 後, 因 $\overline{BE}\perp\overline{OC}$ 且 $\overline{BG}\perp$ 平面 AOC, 由三垂線定理知 $\overline{GE}\perp\overline{OC}$, 因此 $\angle BEG$ 爲平面 OCA 與 OCB 的兩面角, 所以

$$\cos\angle BEG=\cos\angle(OCA,OCB)=\frac{5}{\sqrt{51}}$$
$$\Rightarrow\ \sin\angle BEG=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{51}}$$

再來由 $\triangle BOC$ 的三邊長, 不難得知 $\overline{BE}=\dfrac{\sqrt{119}}{2}$, 因此可求得

$$\overline{BG}=\overline{BE}\times\sin\angle BEG=\frac{\sqrt{546}}{6}=\frac{\sqrt{21\times 26}}{6}$$

這樣就得到了高 $\overline{BG}$ 的長度。此時令圖 11 中四面體體積爲 $V_{O\text{-}ABC}$, 先由海龍公式求出 $\triangle AOC$ 面積爲 $2\sqrt{21}$, 便得到

$$V_{O\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{546}}{6}\times 2\sqrt{21}=\frac{7\sqrt{26}}{3}$$

六、結語

初次讀到文章 [1] 時, 覺得該篇文章很有意思, 可以推導出 (13) 這個公式, 有了它就可求出任一已知稜長的四面體內部任一兩面角餘弦值, 以前印象中課本上都只會算一些稜長較簡單的情形, 比如正四面體。

但是, 看到 [1] 中作者採取先證明公式 (13), 再以公式對例子解題的順序, 筆者想可否跳過公式的證明, 直接針對例子解題。於是對問題 1 的例子, 筆者有了圖 3 這個想法, 即對我們所感興趣的兩面角, 以該兩面所共用的稜爲底邊, 對兩面上的三角形作高 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$。此時筆者猜想, 圖 3 中向量 $\overrightarrow{DA}$ 與 $\overrightarrow{EB}$ 所夾的角即爲我們感興趣的兩面角, 而這個猜想透過圖 4 配合性質 1 作推論, 即可確定其正確性, 並藉此加以解題。

有了公式 (13) 後, 如同第五節那樣, 我們可進一步應用它來求出四面體的高與體積。要提醒讀者的是, 遇到像問題 1 這類的問題時, 只要是在 (5) 的稜長設定條件下, 我們總是可以運用公式 (13) 來解題。但除此之外, 我們也可仿照問題 1 的解法來處理, 這樣就算手邊沒有公式 (13), 一樣可加以求解。

最後要提的是, 因為審稿者的修改建議, 才有本文第四節的內容, 在此筆者要表達由衷的感謝, 而撰寫第四節內容的同時, 也發現自己其它各節有不少地方要修改。此外, 筆者也要感謝 [1] 的作者, 因為若沒有 [1] 這篇文章, 應該不會有本文的出現。

參考文獻

1. 朱漢民。四面體的餘弦定理。數學傳播, 40(1), 62-71, 2016。
   Available from: `http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d401/40106.pdf`
2. 張海潮。球面三角形的 AAA 定理。數學傳播, 28(1), 34-37, 2004。
   Available from: `http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d281/28104.pdf`

—本文作者投稿時任職於麥當勞竹南民權中心—