數學傳播 42卷4期, pp. 46-70

與巨人同行一探圓周率

沈淵源

摘要: 隨著 John Wallis 的舞步, 觀察積分值 $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx$ 的倒數, 稱之為 Wallis 函數 $W(p,q)$:

$$W(p,q)=\left(\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx\right)^{-1}。$$

當 p,q 爲自然數時, Wallis 函數 $W(p,q)$ 的風華絕色在我們眼前展露無遺; 這彰顯在三個美妙的性質中, 但其適用範圍不僅僅限於自然數。接著我們觀察實數數列

$$\left\{W\left(\frac{1}{2},\frac{q}{2}\right)\right\}_{q=0}^{\infty}$$

並藉助於商的公式及數學歸納法, 得到一個 π 的不等式, 進而導引出 π 的無窮乘積公式。最後, 對每一個自然數 d, 重施故技於遞增實數數列

$$\left\{W\left(\frac{1}{d},\frac{q}{d}\right)\right\}_{q=0}^{\infty}$$

得到一個積分值 $\int_0^1 (1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$ 的無限乘積公式。

一、站在巨人的肩膀上

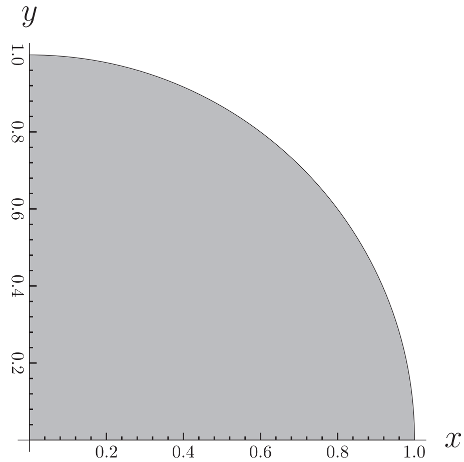
牛頓曾說:「如果我可以看得比別人更遠, 那是由於我站在巨人的肩膀上 (If I have seen a little farther than others it is because I have stood on the shoulders of giants)」, 他所說的巨人之一就是 John Wallis[1]。現在我們就與巨人同行, 一起來探討老少皆知的圓周率[2]。

[1] John Wallis (1616∼1703) 英國數學家[7], 以他在微積分上的前瞻性工作而聞名。在他的《無窮微量的算術(Arithmetica Infinitorum)》(1655) 中, 他把 $\frac{\pi}{4}$ 表示成一無窮乘積來計算π。他也是第一個解釋指數如 x^0, x^{-n} 及 $x^{\frac{n}{m}}$ 的人, 且引用 ∞ 爲無限大的符號。

[2] 任何圓的周長除以直徑都是一樣的, 此比值就是所謂的圓周率。1706 年, 威爾斯作家 William Jones 首次用希臘字母 π 來表示。古代對 π 的估算值包括 3 (舊約聖經)、$\frac{25}{8}$(巴比倫)、$\frac{256}{81}$(埃及)、$\frac{22}{7}$(希臘)、$\frac{355}{113}$(中國) 跟 $\sqrt{10}$ (印度)。1429 年阿拉伯數學家 Al-Kashi 算出精確至小數點 16 位的 π 值。目前可算至百萬小數位。π 在1767年被 J. H. Lambert(1728∼1777) 證明爲無理數, 而 1882 年才被 Lindemann (1852∼1939) 證明爲超越數。

π 乃是單位圓所包圍區域的面積。若將圓心放置在座標平面的原點, 則在第一象限的四分之一圓盤的面積就是

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx。$$



任何估算這一個定積分的方法, 就提供了一個估算 π 的方法。John Wallis 的才華就展現在他決定先觀察類似的積分上：

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx。$$

首先, 我們分別計算 $q=0,1,2,3$ 時, 其積分值化簡後分別為：

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^0\,dx = 1\ ,$$

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^1\,dx = \frac{1}{p+1}\ ,$$

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^2\,dx = \frac{2}{(p+1)(p+2)}\ ,$$

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^3\,dx = \frac{6}{(p+1)(p+2)(p+3)}。$$

顯而易見, 展現在眼前的形式或規則, 讓我們輕而易舉的可以猜出下一個公式為：

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^4\,dx = \frac{4\,!}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}。$$

因而, 當 q 為一自然數時, 此積分值必為

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx = \frac{q\,!}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)}。$$

細思量, 此乃二項式展開式係數之倒數也：

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx=\frac{p!\,q!}{(p+q)!}=\binom{p+q}{q}^{-1}=\binom{p+q}{p}^{-1}。$$

所以若將這些積分值倒數過來, 就都變成自然數了：

$$\left(\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx\right)^{-1}=\binom{p+q}{q}\in\mathbb{N}。$$

因此之故, 我們就隨著 John Wallis 的舞步, 一起來觀察這個積分值的倒數, 姑且稱之爲 $W(p,q)$。很自然地, 我們有下面的定義及猜測：

定義： 對任意的 $p\neq 0, q\in\mathbb{R}$, 我們定義

$$W(p,q)=\left(\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx\right)^{-1}。$$

爲了方便起見, 對所有的 q 我們定義 $W(0,q)=1$; 這與上面的公式是一致的。顯而易見, 對所有的 p 我們也有 $W(p,0)=1$。

猜測一： 對任意的自然數 p,q 我們有

$$W(p,q)=\binom{p+q}{q}=\binom{p+q}{p}。$$

二、實驗一：函數值 $W(p,q)$, $p,q\in\mathbb{N}$ 的美妙性質

首先讓我們透過 Mathematica 來確認上述的現象並觀察 p,q 爲自然數時函數 $W(p,q)$ 之值變化的情形。

(a) 首先在 Mathematica中定義函數 $W(p,q)$ 如下：

In[1]:= $\texttt{W[p\_, q\_] := }\left(\int_0^1 \left(1-x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx\right)^{-1}$;

接下來, 製作一個 8 階方陣 $(W(p,q))$; $p,q=0,1,2,\cdots,7$。

```
In[2]:= n1 = Table[W[p, q], {p, 1, 7}, {q, 0, 7}];
        n2 = Prepend[n1, {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}];
        MatrixForm[n2]
```

(b) 這些數是否似曾相識? 何處見過其倩影芳蹤?

(c) 在上面的方陣中, $W(p,q-1)$ 位於 $W(p,q)$ 的左側, 而 $W(p-1,q)$ 則在 $W(p,q)$ 的上方。觀察此三元素可得

$$W(p,q-1)+W(p-1,q)=W(p,q)\quad 或\quad W(p,q)-W(p,q-1)=W(p-1,q)\ \ (1)$$

此公式是否對所有的 p, q 都成立呢?

(d) 上面的方陣中是否有任何的對稱性? 可得何公式? 試証明之!

(e) 觀察 $QW(p,q) = \dfrac{W(p,q)}{W(p,q-1)}$, 有何特殊的形式圖樣顯示在你眼前?

```
In[5]:= QW[p_, q_] := W[p, q] / W[p, q - 1];
        k1 = Table[QW[p, q], {p, 1, 7}, {q, 1, 7}];
        Prepend[k1, {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}] // MatrixForm
```

(f) 所以在同一列中 (相同的 p 值) 相鄰兩項之差的公式在 (c), 而其商的公式在 (e), 試証明 (e) 中的公式對所有的 p, q 也都成立!

(g) 試由商的公式導出差的公式。

三、實驗一之結果與分析

用 Mathematica 製作的 8 階方陣如下：

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & 120 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 & 330 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 & 792 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 & 1716 \\ 1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432 \end{pmatrix}$$

(a) 這些數是否似曾相識? 何處見過其倩影芳蹤? 不用多想, 你一定馬上脫口而出這就是二項式展開式的係數; 將上面的方陣轉個 45 度, 不就是人人熟知的巴斯卡三角形嗎?

(b) 在上面的方陣中, $W(p,q-1)$ 位於 $W(p,q)$ 的左側, 而 $W(p-1,q)$ 則在 $W(p,q)$ 的上方。若你已經看出上面的方陣轉個 45 度就是巴斯卡三角形的話, 那麼理所當然這三個函數值滿足下面的關係式：

$$W(p,q-1) + W(p-1,q) = W(p,q)。$$

然而, 這個公式目前僅適用於前幾個自然數而已; 是否對所有使相關定積分都有意義的 p, q 都成立呢? 若回到原來定積分的形式, 那麼公式就變成

$$\left(\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\,dx\right)^{-1} + \left(\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p-1}})^{q}\,dx\right)^{-1} = \left(\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^{q}\,dx\right)^{-1}。$$

要直接証明這個公式, 看起來似乎是一件遙不可及的任務。

(c) 上面的方陣中是否有任何的對稱性? 一看即知, 此方陣乃是一對稱方陣; 也就是說,

$$\left(\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx\right)^{-1} = W(p,q) = W(q,p) = \left(\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{q}})^p\,dx\right)^{-1}。$$

再一次地, 這個公式目前僅適用於前幾個自然數; 是否對所有使相關定積分都有意義的 p,q 都成立呢? 從上面的積分式可知, 我們僅需證明

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx = \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{q}})^p\,dx。$$

這只消一個代換緊接著一個分部: 令 $y=(1-x^{\frac{1}{p}})^q$, 則 $x=(1-y^{\frac{1}{q}})^p$。因而我們有

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx = \int_1^0 y\,d\Big((1-y^{\frac{1}{q}})^p\Big) = y(1-y^{\frac{1}{q}})^p\Big|_1^0 - \int_1^0 (1-y^{\frac{1}{q}})^p\,dy\ ;$$

最右邊的式子實際上就是 $(0-0)+\displaystyle\int_0^1 (1-y^{\frac{1}{q}})^p\,dy = \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{q}})^p\,dx$, 故得證對稱性。

(d) 觀察 $QW(p,q)=\dfrac{W(p,q)}{W(p,q-1)}$, 有何特殊的形式圖樣顯示在你眼前?

將上面的方陣, 每一行除以前一行對應的數, 得到的 8×7 矩陣如下:

Out[7]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
2 & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{5}{4} & \frac{6}{5} & \frac{7}{6} & \frac{8}{7}\\
3 & 2 & \frac{5}{3} & \frac{3}{2} & \frac{7}{5} & \frac{4}{3} & \frac{9}{7}\\
4 & \frac{5}{2} & 2 & \frac{7}{4} & \frac{8}{5} & \frac{3}{2} & \frac{10}{7}\\
5 & 3 & \frac{7}{3} & 2 & \frac{9}{5} & \frac{5}{3} & \frac{11}{7}\\
6 & \frac{7}{2} & \frac{8}{3} & \frac{9}{4} & 2 & \frac{11}{6} & \frac{12}{7}\\
7 & 4 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{11}{5} & 2 & \frac{13}{7}\\
8 & \frac{9}{2} & \frac{10}{3} & \frac{11}{4} & \frac{12}{5} & \frac{13}{6} & 2
\end{pmatrix}$$

驚鴻一瞥, 第二列中的每一個數其分子都比分母多 1, 此列是 $p=1$ 的那一列; 而第二行由上而下, 每次增加 $1/2$, 進而發現其實每一行都是等差級數, 其公共的差分別就是 $1/2,1/3,1/4,1/5,1/6,1/7$ (這分別對應於 $q=2,3,4,5,6,7$)。這讓我們很篤定的猜測到 $QW(p,q)$ 的分母應該就是 q, 然而分子呢? 第二列隱約地提示大概是 $p+q=1+q$

(此列是 $p = 1$ 的那一列)。爲了更進一步確認, 我們就默認上面篤定的猜測 : $QW(p,q)$ 的分母就是 q。所以就把第 q 行的分母全改爲 q, 看看怎樣! 我們得到如下的矩陣 :

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{1} & \frac{2}{2} & \frac{3}{3} & \frac{4}{4} & \frac{5}{5} & \frac{6}{6} & \frac{7}{7} \\
\frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{5}{4} & \frac{6}{5} & \frac{7}{6} & \frac{8}{7} \\
\frac{3}{1} & \frac{4}{2} & \frac{5}{3} & \frac{6}{4} & \frac{7}{5} & \frac{8}{6} & \frac{9}{7} \\
\frac{4}{1} & \frac{5}{2} & \frac{6}{3} & \frac{7}{4} & \frac{8}{5} & \frac{9}{6} & \frac{10}{7} \\
\frac{5}{1} & \frac{6}{2} & \frac{7}{3} & \frac{8}{4} & \frac{9}{5} & \frac{10}{6} & \frac{11}{7} \\
\frac{6}{1} & \frac{7}{2} & \frac{8}{3} & \frac{9}{4} & \frac{10}{5} & \frac{11}{6} & \frac{12}{7} \\
\frac{7}{1} & \frac{8}{2} & \frac{9}{3} & \frac{10}{4} & \frac{11}{5} & \frac{12}{6} & \frac{13}{7} \\
\frac{8}{1} & \frac{9}{2} & \frac{10}{3} & \frac{11}{4} & \frac{12}{5} & \frac{13}{6} & \frac{14}{7}
\end{pmatrix}$$

真是太美了! 你看 : 行也好、列也好、由上而下也好、由左而右也好, 每移動一個位置, 分子就增加 1; 這意味著, 分子就是 $p+q$, 因而我們有如下的猜測。

猜測二 : 對任意的自然數 p, q 我們有

$$\frac{W(p,q)}{W(p,q-1)} = \frac{p+q}{q} \tag{2}$$

(e) 所以在同一列中 (相同的 p 值) 相鄰兩項之差的公式在 (1), 而其商的公式在 (2), 試証明 (2) 中的公式對所有使相關定積分都有意義的 p, q 也都成立!

首先將定積分 $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx$ 寫成

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})(1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\,dx = \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\,dx + \int_0^1 -x^{\frac{1}{p}}(1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\,dx \tag{3}$$

再將 (3) 式右側第二個定積分 $\int_0^1 -x^{\frac{1}{p}}(1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\,dx$ 寫成

$$\frac{p}{q}\int_0^1 x\,q(1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\left(\frac{-x^{\frac{1}{p}-1}}{p}\right)\,dx = \frac{p}{q}\int_0^1 x\,d\Big((1-x^{\frac{1}{p}})^q\Big)$$

最後使用分部積分的公式得到

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}\int_0^1 x\,d\Big((1-x^{\frac{1}{p}})^q\Big) &= \frac{p}{q}\Big\{x(1-x^{\frac{1}{p}})^q\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx\Big\}\\ &= \frac{p}{q}\Big\{(0-0) - \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx\Big\}\end{aligned}$$

此即 $-\frac{p}{q}\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx$ 再代回 (3) 式, 我們有

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx = \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\,dx - \frac{p}{q}\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx$$

$$\Longrightarrow \left(1+\frac{p}{q}\right)\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx = \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\,dx$$

$$\Longrightarrow \left(1+\frac{p}{q}\right)W(p,q)^{-1} = W(p,q-1)^{-1}$$

$$\Longrightarrow \left(1+\frac{p}{q}\right)^{-1}W(p,q) = W(p,q-1)$$

故得證 (2) 中的公式對所有使相關定積分都有意義的 p,q 也都成立!

(f) 試由商的公式 (2) 導出差的公式 (1)。

現在所有的工具都齊全了, 透過對稱性以及商的公式 (2) , 不費吹灰之力即可導出差的公式 (1)。首先將商的公式 (2) 寫成

$$\frac{W(p,q-1)}{W(p,q)} = \frac{q}{p+q} \tag{4}$$

公式 (4) 也可寫成

$$\frac{W(q,p-1)}{W(q,p)} = \frac{p}{p+q}$$

對稱性告訴我們, 上式就是

$$\frac{W(p-1,q)}{W(p,q)} = \frac{p}{p+q} \tag{5}$$

最後將 (4) 式加上 (5) 式, 我們有

$$\frac{W(p,q-1)+W(p-1,q)}{W(p,q)} = \frac{W(p,q-1)}{W(p,q)} + \frac{W(p-1,q)}{W(p,q)} = \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q} = 1\,,$$

因而得到差的公式 (1), 故得證。

(g) 總結以上的分析, 我們將所得到結論整理在下面的定理中：

定理 (Wallis **函數的三個美妙性質**)：對任意使相關定積分有意義的數 p, q, Wallis 函數

$$W(p,q)=\left(\int_0^1(1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx\right)^{-1}$$

滿足下列三個美妙的性質：

W1. (對稱性質) $W(p,q)=W(q,p)$

W2. (商的公式) $\dfrac{W(p,q)}{W(p,q-1)}=\dfrac{p+q}{q}$

W3. (差的公式) $W(p,q)-W(p,q-1)=W(p-1,q)$

已知起始值 $W(p,0)=1$ 及 $W\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi}$； 透過商的公式對 q 作數學歸納法,

我們輕而易舉地就可以得到下面的推論：

推論：如果 p, q, n, d 全部都是自然數, 那麼我們就有

C1. $W(p,q)=\dbinom{p+q}{q}=\dbinom{p+q}{p}$。

C2. $W\left(\dfrac{1}{2},n\right)=\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$

C3. $W\left(\dfrac{1}{2},n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot(2n+2)}{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}\cdot\dfrac{4}{\pi}$

C4. $W\left(\dfrac{1}{d},n\right)=\dfrac{(d+1)(2d+1)(3d+1)\cdots(dn+1)}{d\cdot 2d\cdot 3d\cdot\cdots\cdot(dn)}$

C5. $W\left(\dfrac{1}{d},n+\dfrac{1}{d}\right)=\dfrac{(d+2)(2d+2)(3d+2)\cdots(dn+2)}{(d+1)(2d+1)(3d+1)\cdots(dn+1)}\cdot W\left(\dfrac{1}{d},\dfrac{1}{d}\right)$

四、實驗二：π 的無限乘積公式之探討

當 p, q 都是自然數的時候, 對應的函數值 $W(p,q)$ 也是自然數, 跟 π 扯不上關係。另一方面, 我們知道 $W\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi}$, 其實這就是一開始所看到的那個積分值的倒數, 所以 π 出現在當 p 跟 q 都是奇數的一半時。因此我們就進一步來觀察當 $p,q\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 時函數值 $W(p,q)$ 變化的情形如何?

(a) 觀察對應於 $p=\dfrac{1}{2}$ 的那一列的數, 可得一有趣的遞增數列

$$\left\{W\left(\frac{1}{2},\frac{q}{2}\right)\right\}_{q=0}^{\infty}$$

由此遞增數列, 得到一不等式作爲 π 的有理數近似值。

```
In[8]:= Table[W[1/2, q], {q, -1/2, 4, 1/2}]
        Plot[W[1/2, q], {q, 0, 10 000}]
```

(b) 據此得到 $W\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi}$ 的一對不等式

$$\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ \cdots\cdot\ (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdots\cdot\ (2n-2)}<\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot\ \cdots\cdot\ (2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ \cdots\cdot\ (2n-1)}\cdot\frac{4}{\pi}<\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ \cdots\cdot\ (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdots\cdot\ (2n)}.$$

令 $U_n=\dfrac{2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\ \cdots\cdot\ (2n-2)^2\cdot(2n)}{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot\ \cdots\cdot\ (2n-1)^2}$, 由上得到 $\dfrac{\pi}{4}$ 的上限 U_n、下限 L_n

$$L_n=U_n\cdot\frac{2n}{2n+1}<\frac{\pi}{4}<U_n \iff \frac{\pi}{4}<U_n<\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2n+1}{2n}$$

最後透過夾擠定理, 可得 Wallis 的無限乘積公式如下：

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}=\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{\pi}{4}\ 。$$

(c) 用 Mathematica 算出 4 倍上述無限乘積之前 $n-1$ 項的部分積

$$W_n=4\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}。$$

透過圖形的觀察, 請問此一部分積數列 $\{W_n\}$ 如何趨近於 π 的呢?

```
In[10]:= W[n_] := 4 ∏_{k=1}^{n-1} ((2 k + 1)^2 - 1)/((2 k + 1)^2);

In[11]:= DiscretePlot[{W[n], π, 3.14}, {n, 10, 7890},
          PlotLegends→ "Expressions"]
```

(d) 需要取多大 的 n, 才能精確到小數點之後第三位?

```
In[12]:= DiscretePlot[{W[n], π, 3.141, 3.142}, {n, 1500, 2000},
          PlotLegends→ "Expressions"]
```

(e) 若要改良其精確度, 可將 $\frac{\pi}{4}$ 的上下限平均一下。試証明其平均值爲

$$\frac{2n+\frac{1}{2}}{2n+1}\cdot U_n = \frac{2n+\frac{1}{2}}{2n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}\text{。} \tag{6}$$

令 $W_n(t)=\dfrac{2n+t}{2n+1}\cdot 4U_n$。則 $W_n(\frac{1}{2})=\dfrac{2n+\frac{1}{2}}{2n+1}\cdot 4U_n$ 就是 π 上下限的平均值。

```
In[14]:=  W[n_, t_] := (2 n + t)/(2 n + 1) * W[n];
```

(f) 此一平均值數列如何趨近 π 的呢? 需要取多大的 n, 才能精確到小數點之後第三位?

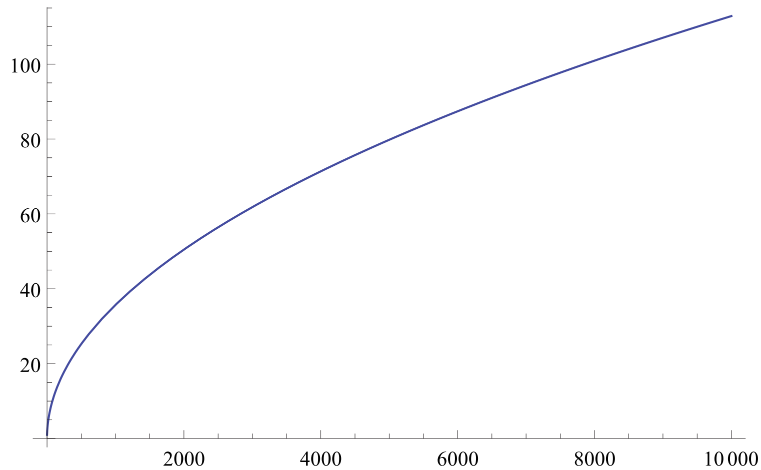
```
In[15]:=  DiscretePlot[{W[n, 0.5], π, 3.142, 3.141},
            {n, 20, 350}, PlotLegends→ "Expressions"]
```

五、實驗二之結果與分析

(a) 數列 $\left\{W\left(\frac{1}{2},\frac{q}{2}\right)\right\}_{q=0}^{\infty}$ 的前幾項及其圖形如下所示：

Out[8]= $\left\{\frac{2}{\pi},\ 1,\ \frac{4}{\pi},\ \frac{3}{2},\ \frac{16}{3\pi},\ \frac{15}{8},\ \frac{32}{5\pi},\ \frac{35}{16},\ \frac{256}{35\pi},\ \frac{315}{128}\right\}$

Out[9]=



在數列 $\left\{W\left(\frac{1}{2},\frac{q}{2}\right)\right\}_{q=0}^{\infty}$ 中, 對應於 $q=2n-2,\ 2n-1,\ 2n$ 那三項分別爲

$$\left(\int_0^1(1-x^2)^{n-1}\,dx\right)^{-1},\ \left(\int_0^1(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dx\right)^{-1},\ \left(\int_0^1(1-x^2)^{n}\,dx\right)^{-1}.$$

因爲 $x\in[0,1]\Rightarrow(1-x^2)\in[0,1]$, 我們有

$$(1-x^2)^{n-1}\geq(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\geq(1-x^2)^n\geq 0\quad\forall x\in[0,1];$$

因此得到

$$\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\,dx > \int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dx > \int_0^1 (1-x^2)^{n}\,dx > 0\,,$$

所以我們有

$$\left(\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\,dx\right)^{-1} < \left(\int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dx\right)^{-1} < \left(\int_0^1 (1-x^2)^{n}\,dx\right)^{-1}\ ;$$

也就是說,

$$W\left(\frac{1}{2}, n-1\right) < W\left(\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right) < W\left(\frac{1}{2}, n\right)\,. \tag{7}$$

同理可確認實數數列 $\left\{W\left(\frac{1}{2}, \frac{q}{2}\right)\right\}_{q=0}^{\infty}$ 的的確確是一個遞增的數列, 跟上面圖形所顯示出來的結果是一致的。

(b) 將不等式 (7) 以及推論 C2 跟 C3 放在一起, 馬上得到 Wallis 不等式

$$\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n-2)} < \frac{4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{4}{\pi} < \frac{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$$

整理一下, 得到 $\dfrac{4}{\pi}$ 的上、下限

$$\frac{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot\cdots\cdot(2n-1)^2}{2\cdot4^2\cdot6^2\cdot\cdots\cdot(2n-2)^2\cdot(2n)} < \frac{4}{\pi} < \frac{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot\cdots\cdot(2n-1)^2}{2\cdot4^2\cdot6^2\cdot\cdots\cdot(2n-2)^2\cdot(2n)}\cdot\frac{2n+1}{2n}$$

因而得到 $\dfrac{\pi}{4}$ 的上、下限

$$\frac{2\cdot4^2\cdot6^2\cdot\cdots\cdot(2n-2)^2\cdot(2n)}{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot\cdots\cdot(2n-1)^2}\cdot\frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{4} < \frac{2\cdot4^2\cdot6^2\cdot\cdots\cdot(2n-2)^2\cdot(2n)}{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot\cdots\cdot(2n-1)^2}$$

若將 $\dfrac{\pi}{4}$ 的上、下限分別以 $U_n\,, L_n$ 表示之, 則 $U_n = \dfrac{2\cdot4^2\cdot6^2\cdot\cdots\cdot(2n-2)^2\cdot(2n)}{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot\cdots\cdot(2n-1)^2}\,,$ $L_n = U_n\cdot\dfrac{2n}{2n+1}$; 而且我們有

$$L_n < \frac{\pi}{4} < U_n \iff \frac{\pi}{4} < U_n < \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2n+1}{2n}\text{。} \tag{8}$$

將上限的分子 $2\cdot4^2\cdot6^2\cdot\cdots\cdot(2n-2)^2\cdot(2n)$ 寫成 $n-1$ 對連續偶數的乘積

$$[2\cdot4]\cdot[4\cdot6]\cdot[6\cdot8]\cdots\cdot[(2n-2)\cdot(2n)]\,,$$

而每一對連續偶數都是中間那個奇數加減 1 ; 亦即

$$[(3-1)(3+1)][(5-1)(5+1)][(7-1)(7+1)]\cdots[((2n-1)-1)((2n-1)+1)]\,,$$

平方差的公式告訴我們, 上式等於 $(3^2-1)(5^2-1)(7^2-1)\cdots((2n-1)^2-1)$ 。回到上限的分母 $3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot\cdots\cdot(2\,n-1)^2$, 馬上看出來 $\frac{\pi}{4}$ 的上限可以寫成

$$U_n=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}\,. \tag{9}$$

將 (8) 式透過夾擠定理, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\frac{\pi}{4}$; 而(9) 式兩邊取極限, 得到

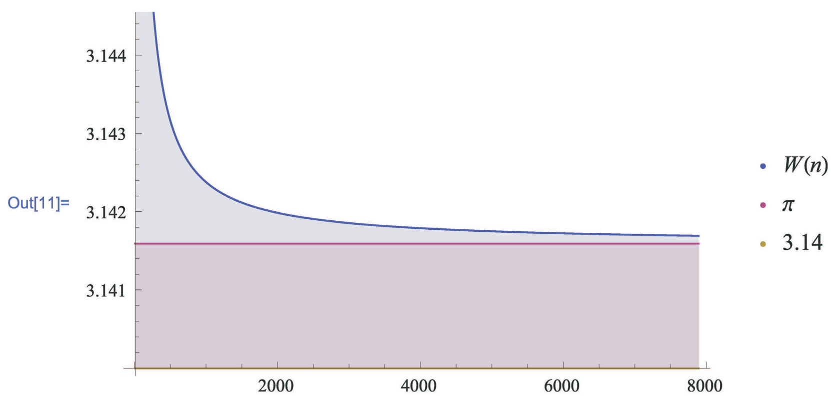
$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}。$$

終於我們得到了 Wallis 的無限乘積公式, 如下:

$$\frac{\pi}{4}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}。$$

(c) 用 Mathematica 算出 4 倍上述無窮乘積之前 $n-1$ 項的部分積 W_n

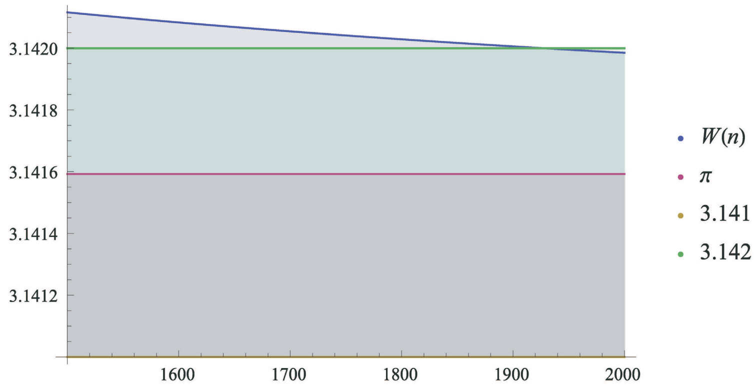
$$W_n=4\,U_n=4\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}\,, \tag{10}$$



很明顯地, 水平線 $y=\pi$ 爲此一部分積數列 $\left\{W_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的水平漸近線; 而且圖形顯示, 此一部分積數列 $\left\{W_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在 π 的上方遞減地趨近於 π, 其收斂的速度有些緩慢。

(d) 需要取多大的 n, 才能精確到小數點之後第三位?

Out[12]=



從上面的圖形約略估算 W_n 降到 3.142 時, 對應的 n 尚未抵達但很接近 2000 ; 所以我們就試試 n 從 1950 至 1970 之間, 對應之 W_n 的值 :

```
In[13]:= Table[N[W[n]], {n, 1950, 1954}]

Out[13]= {3.142, 3.142, 3.142, 3.14199, 3.14199}
```

很幸運地, $n = 1952$ 時其值是 3.14199 , 精確到小數點之後第三位。

(e) 若要改良精確度, 可將 $\dfrac{\pi}{4}$ 的上、下限平均一下。試証其平均值 $\dfrac{L_n+U_n}{2}$ 爲

$$\frac{2\,n+0.5}{2\,n+1}\cdot U_n=\frac{2\,n+0.5}{2\,n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}\text{。}$$

這只要回到(8) 式之前上下限的關係式 $L_n = U_n\cdot\dfrac{2\,n}{2\,n+1}$, 馬上得到上式 :

$$\frac{L_n+U_n}{2}=\frac{U_n\cdot\dfrac{2\,n}{2\,n+1}+U_n}{2}=\frac{U_n\left(\dfrac{2\,n}{2\,n+1}+1\right)}{2}=\frac{2\,n+0.5}{2\,n+1}\cdot U_n\text{。}$$

令 $U_n(t)=\dfrac{2\,n+t}{2\,n+1}\cdot U_n$。則 $W_n(t)=4\,U_n(t)$ 且 (6) 式中平均值就是 $W_n(0.5)$;
因而 π 的上、下限分別就是

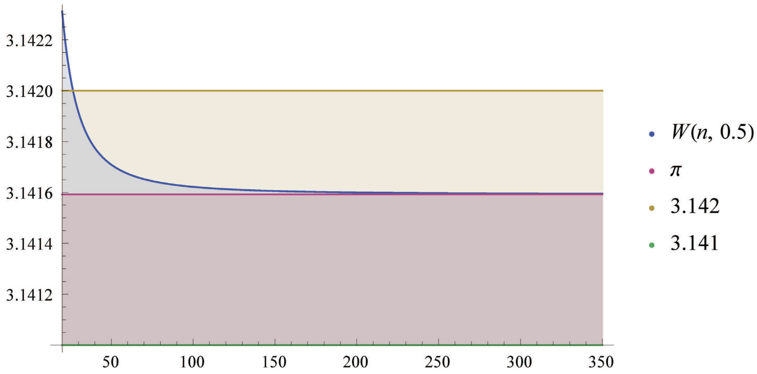
$$W_n(1)=4\,U_n(1)=4\,U_n=W_n\,,\qquad W_n(0)=4\,U_n(0)=4L_n\text{。}$$

(f) 請問這一個 π 的上、下限平均值數列 $\Big\{W_n(0.5)\Big\}_{n=1}^{\infty}$ 是如何趨近 π 的呢? 如何估計需要取多大的 n, 才能精確到小數點之後第三位?

因爲要精確到小數點之後第三位, 所以我們得觀察包含有水平線

$$y=3.141\,,\qquad y=\pi\,,\qquad y=3.142$$

在內的圖形, 如下所示 :

Out[15]=


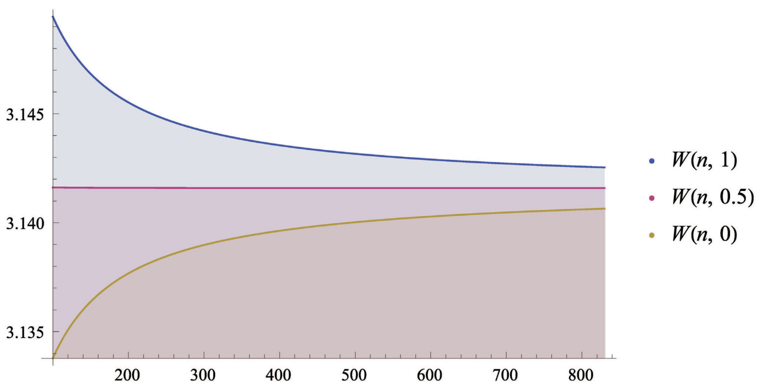
很明顯地, 平均值數列 $\left\{W_n(0.5)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 乃一快速遞減收斂於 π 的數列; 圖形就是上面非水平線的那條曲線, 收斂的速度快到幾幾乎乎與水平線 $y=\pi$ 是合而爲一的。這一條曲線一開始在第一小格內就降到 3.1420 了, 而第一小格的範圍是 20 到 30 ; 所以就讓我們試試 n 從 25 至 30 之間, 對應的 $W_n(0.5)$ 值如何 :

```
In[16]:= Table[N[W[n, .5]], {n, 25, 30}]
```

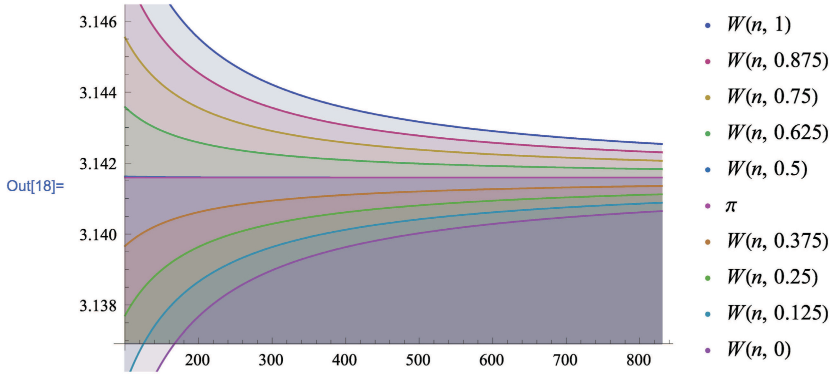
```
Out[16]= {3.14205, 3.14202, 3.14199, 3.14196, 3.14194, 3.14191}
```

很幸運地, $n=27$ 的時候對應的 $W_{27}(0.5)=3.14199\cdots$, 精確到小數點之後第三位; 跟前面的 $n=1952$ 相比, 真是好太多了。

(g) 上面討論告訴我們 : π 之上下限平均值數列 $\left\{W_n(0.5)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 如何快速地收斂於 π, 而其上、下限數列則分別爲 $\left\{W_n(1)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 及 $\left\{W_n(0)\right\}_{n=1}^{\infty}$; 將此三數列之圖形放在同一平面, 如下所示 :

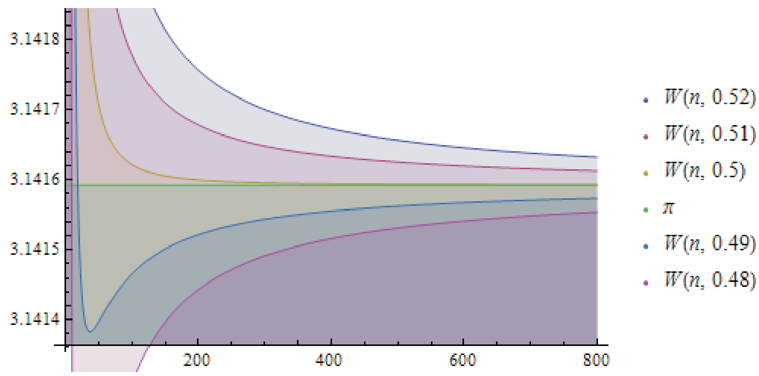
Out[17]=


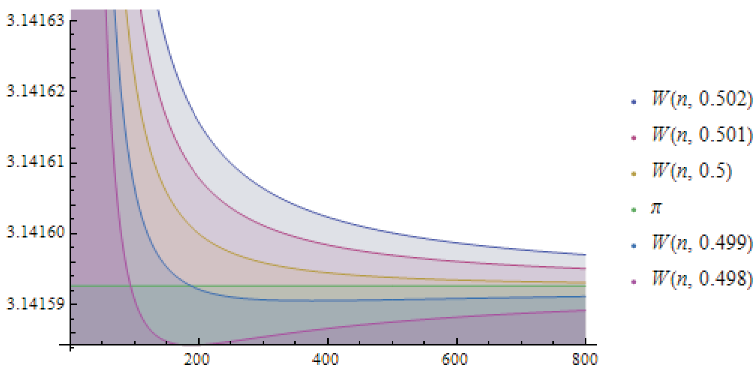
介於 0 與 1 之間, 取更多的 t 值; 將對應數列之圖形放在同一平面, 如下所示 :

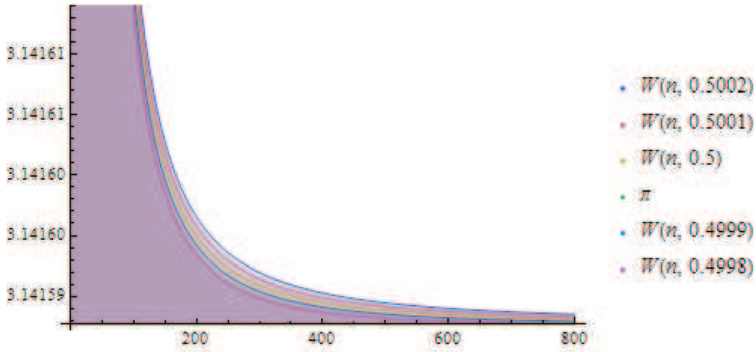


遠遠地觀看這些曲線, 感受到的是強烈的「對稱美」; 鏡子就是水平線 $y=\pi$ 連同那幾乎與她合體的上、下限平均值數列 $\left\{W_n(0.5)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 曲線, 至此該是劃下句點的時候了。然而我們很好奇地想看那些非常接近 0.5 的 t 值, 其對應的數列 $\left\{W_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 曲線是否仍舊那麼的對稱呢? 拭目以待!

(h) 下面的圖形中 t 以 0.5 爲中心, 間距分別是 0.01, 0.001, 0.0001 : 請問鏡子還是水平線 $y=\pi$ 連同那幾乎與她合體的上、下限平均值數列 $\left\{W_n(0.5)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 曲線嗎?







六、定積分 $\int_0^1 (1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$ 之無限乘積公式的探討

回首來時路, Wallis 藉助於定積分 $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx$ 倒數的美妙性質, 得到關於

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

的不等式, 最後更進一步地導出 π 的一個無限乘積公式。這整個過程, 顯而易見, 不用吹灰之力即可推廣至 p 跟 q 都是同一個自然數 d 的倒數; Wallis 選中的 d 是 2, 靈感來自上面那個定積分。若將此限制拿走, 所得到的將是下列定積分之值

$$\int_0^1 (1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx \tag{11}$$

的一個無限乘積公式。下面我們就順著這個思緒將上面 Wallis 所做的的事情再做一次。

(a) 令 d 爲自然數。實數數列 $\left\{W\left(\frac{1}{d}, \frac{q}{d}\right)\right\}_{q=0}^{\infty}$ 中, 對應於 $q=d(n-1),\ d(n-1)+1,\ dn$ 那三項分別爲

$$\left(\int_0^1 (1-x^d)^{n-1}\,dx\right)^{-1},\ \left(\int_0^1 (1-x^d)^{n-1+\frac{1}{d}}\,dx\right)^{-1},\ \left(\int_0^1 (1-x^d)^{n}\,dx\right)^{-1}.$$

因爲 $x\in[0,1] \Rightarrow (1-x^d)\in[0,1]$, 我們有

$$(1-x^d)^{n-1} \ge (1-x^2)^{n-1+\frac{1}{d}} \ge (1-x^d)^n \ge 0 \quad \forall x\in[0,1];$$

因此得到

$$\int_0^1 (1-x^d)^{n-1}\,dx > \int_0^1 (1-x^d)^{n-1+\frac{1}{d}}\,dx > \int_0^1 (1-x^d)^{n}\,dx > 0,$$

所以我們有

$$\left(\int_0^1 (1-x^d)^{n-1}\,dx\right)^{-1} < \left(\int_0^1 (1-x^d)^{n-1+\frac{1}{d}}\,dx\right)^{-1} < \left(\int_0^1 (1-x^d)^{n}\,dx\right)^{-1};$$

也就是說,

$$W\left(\frac{1}{d}, n-1\right) < W\left(\frac{1}{d}, n-1+\frac{1}{d}\right) < W\left(\frac{1}{d}, n\right). \tag{12}$$

同理可確認實數數列 $\left\{W\left(\frac{1}{d},\frac{q}{d}\right)\right\}_{q=0}^{\infty}$ 的確是遞增的數列。

(b) 將不等式 (12) 以及推論 C4 跟 C5 放在一起, 馬上得到不等式

$$\begin{aligned}
&\frac{(d+1)(2\,d+1)(3\,d+1)\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1)+1)}{d\cdot\quad 2\,d\quad\cdot\quad 3\,d\quad\cdot\cdots\cdot\quad(d\,(n-1))}\\
&< \frac{(d+2)(2\,d+2)(3\,d+2)\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1)+2)}{(d+1)(2\,d+1)(3\,d+1)\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1)+1)}\cdot W\left(\frac{1}{d},\frac{1}{d}\right)\\
&< \frac{(d+1)(2\,d+1)(3\,d+1)\cdot\cdots\cdot(d\,n+1)}{d\cdot\quad 2\,d\quad\cdot\quad 3\,d\quad\cdot\cdots\cdot\quad(d\,n)}
\end{aligned}$$

整理一下, 得到 $W\left(\frac{1}{d},\frac{1}{d}\right)$ 的上、下限

$$\begin{aligned}
&\frac{(d+1)^2(2\,d+1)^2(3\,d+1)^2\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1)+1)^2}{d(d+2)(2\,d)(2\,d+2)(3\,d)(3\,d+2)\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1))(d\,(n-1)+2)} < W\left(\frac{1}{d},\frac{1}{d}\right)\\
&< \frac{(d+1)^2(2\,d+1)^2(3\,d+1)^2\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1)+1)^2}{d(d+2)(2\,d)(2\,d+2)(3\,d)(3\,d+2)\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1))(d\,(n-1)+2)}\cdot\frac{d\,n+1}{d\,n}
\end{aligned}$$

因而得到 $\int_0^1 (1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx = \left(W\left(\frac{1}{d},\frac{1}{d}\right)\right)^{-1}$ 的上、下限

$$\begin{aligned}
&\frac{d(d+2)(2\,d)(2\,d+2)(3\,d)(3\,d+2)\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1))(d\,(n-1)+2)}{(d+1)^2(2\,d+1)^2(3\,d+1)^2\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1)+1)^2}\cdot\frac{d\,n}{d\,n+1}\\
&< \int_0^1 (1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx\\
&< \frac{d(d+2)(2\,d)(2\,d+2)(3\,d)(3\,d+2)\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1))(d\,(n-1)+2)}{(d+1)^2(2\,d+1)^2(3\,d+1)^2\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1)+1)^2}
\end{aligned}$$

若將 $\int_0^1 (1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$ 的上、下限分別以 $U_n(d)\,, L_n(d)$ 表示之, 則

$$U_n(d) = \frac{d(d+2)(2\,d)(2\,d+2)(3\,d)(3\,d+2)\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1))(d\,(n-1)+2)}{(d+1)^2(2\,d+1)^2(3\,d+1)^2\cdot\cdots\cdot(d\,(n-1)+1)^2},$$

且

$$L_n(d)=U_n(d)\cdot\frac{d\,n}{d\,n+1}\,; \tag{13}$$

而且我們有

$$L_n(d)<\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx<U_n(d)\,,$$

也就是說

$$\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx<U_n(d)<\frac{d\,n+1}{d\,n}\cdot\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx\,. \tag{14}$$

將上限 $U_n(d)$ 的分子 $d(d+2)(2\,d)(2\,d+2)(3\,d)(3\,d+2)\cdot\cdots(d\,(n-1))(d\,(n-1)+2)$ 寫成 $n-1$ 對差距爲2 的相鄰整數之乘積

$$[d(d+2)]\cdot[(2\,d)(2\,d+2)]\cdot[(3\,d)(3\,d+2)]\;\cdots\cdot[(d\,(n-1))(d\,(n-1)+2)]\,,$$

而每一對差距爲2 的相鄰整數都是中間那個整數加減 1； 亦即

$$\{[(d{+}1){-}1][(d{+}1){+}1]\}\{[(2d{+}1){-}1][(2d{+}1){+}1]\}\cdots\{[d(n{-}1){+}1]{-}1\}\{[d(n{-}1){+}1]{+}1\},$$

平方差的公式告訴我們, 上式等於

$$[(d+1)^2-1][(2d+1)^2-1][(3d+1)^2-1]\;\cdots\;[(d(n-1)+1)^2-1]\,.$$

因爲上限的分母是

$$(d+1)^2(2\,d+1)^2(3\,d+1)^2\cdots\cdot\,(d\,(n-1)+1)^2\,,$$

馬上看出來 $\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$ 的上限可以寫成

$$U_n(d)=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(d\,k+1)^2-1}{(d\,k+1)^2}\,. \tag{15}$$

透過夾擠定理, (14) 式導致 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n(d)=\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$; 而 (15) 式兩邊取極限, 則得

$$\lim_{n\to\infty}U_n(d)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(d\,k+1)^2-1}{(d\,k+1)^2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(d\,k+1)^2-1}{(d\,k+1)^2}\,.$$

這就是定積分 $\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$ 的無限乘積公式, 如下：

$$\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(d\,k+1)^2-1}{(d\,k+1)^2}\,. \tag{16}$$

(c) 若要改良精確度, 可將其上、下限平均一下 $\dfrac{L_n(d)+U_n(d)}{2}$ 得平均值爲

$$\frac{d\,n+0.5}{d\,n+1}\cdot U_n(d)=\frac{d\,n+0.5}{d\,n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}\,.$$

這只要回到 (13) 式中上下限的關係式 $L_n=U_n\cdot\dfrac{d\,n}{d\,n+1}$, 馬上得到上式:

$$\begin{aligned}\frac{L_n(d)+U_n(d)}{2}&=\frac{U_n(d)\cdot\dfrac{d\,n}{d\,n+1}+U_n(d)}{2}=\frac{U_n(d)\left(\dfrac{d\,n}{d\,n+1}+1\right)}{2}\\&=\frac{d\,n+0.5}{d\,n+1}\cdot U_n(d)\,.\end{aligned}$$

令 $W_n(d,t)=\dfrac{d\,n+t}{d\,n+1}\cdot U_n(d)$. 則定積分 $\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$ 之值的上下限平均值就是 $W_n(d,0.5)$; 而其上、下限分別就是 $W_n(d,1)$ 與 $W_n(d,0)$, 且對所有的 $t\in[0,1]$ 我們有

$$W_n(d,0)<W_n(d,t)<W_n(d,1)\quad\text{及}\quad\lim_{n\to\infty}W_n(d,t)=\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx\,.\tag{17}$$

我們將上面所討論的結果, 整理在下面的定理中。

Wallis **無窮乘積公式**: 令 d 爲自然數且令 $t\in[0,1]$。定義數列 $\Big\{W_n(d,t)\Big\}_{n=1}^{\infty}$ 如下:

$$W_n(d,t)=\frac{d\,n+t}{d\,n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(d\,k+1)^2-1}{(d\,k+1)^2}\,.\tag{18}$$

則我們有

(a) 對所有的 $t\in[0,1]$, $\lim_{n\to\infty}W_n(d,t)=\prod_{k=1}^{\infty}\dfrac{(d\,k+1)^2-1}{(d\,k+1)^2}$.

(b) 定積分 $\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$ 之值的上、下限分別就是 $W_n(d,1)$ 與 $W_n(d,0)$.

(c) 對所有的 $t\in[0,1]$, $W_n(d,0)\le W_n(d,t)\le W_n(d,1)$.

(d) 對所有的 $t\in[0,1]$, $\lim_{n\to\infty}W_n(d,t)=\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$; 因而再一次地得到

$$\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(d\,k+1)^2-1}{(d\,k+1)^2}\ ;$$

當 $d=2$ 時, 這就是 Wallis 無窮乘積公式

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2\,k+1)^2-1}{(2\,k+1)^2}\,.$$

(e) 上一節的 (f) 之後半段說：實數數列 $\left\{W_n(2,0.5)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個遞減且比其他的實數數列 $\left\{W_n(2,t)\right\}_{n=1}^{\infty}$, $t\in[0,1]\backslash\{0.5\}$ 更快速地收斂於 $\dfrac{\pi}{4}$ 的實數數列。

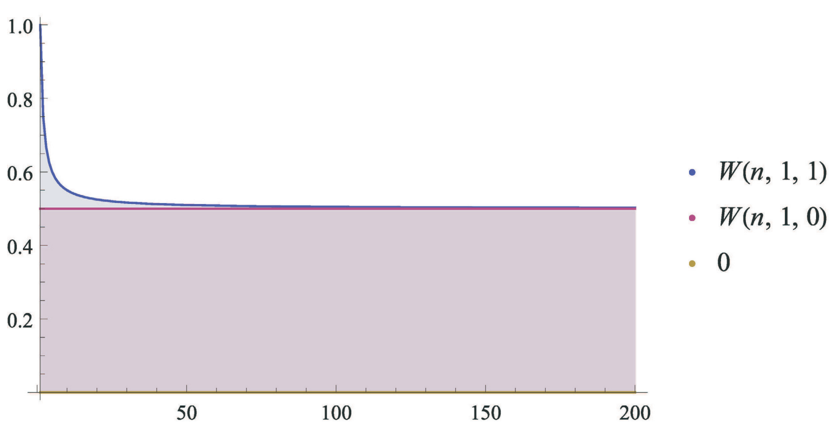
接下來讓我們一起看看當 $d\neq 2$ 時, 上下限平均值數列 $\left\{W_n(d,0.5)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是否也是最快速地收斂於對應的定積分 $\displaystyle\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$ 的呢? 先在 Mathematica 裏頭定義函數 $W(n,d,t)$, $WI(d)$,分別就是上面的數列 $\left\{W_n(d,t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 及定積分 $\displaystyle\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$; 指令如下：

$$\mathtt{W[n\_,\ d\_,\ t\_]\ :=\ \frac{d*n+t}{d*n+1}*\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(d*k+1)^2-1}{(d*k+1)^2};}$$

$$\mathtt{WI[d\_]\ :=\ \int_0^1 (1-x^d)^{1/d}\,dx;}$$

我們就依序從最簡單的 $d=1$ 開始：定積分 $\displaystyle\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2}$, 下限數列 $\left\{W_n(1,0)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 就是常數數列 $\left\{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \cdots\cdots\right\}$; 輸入指令與輸出結果如下所示：

```
{DiscretePlot[{W[n, 1, 1], W[n, 1, 0], 0}, {n, 1, 200},
   PlotLegends → "Expressions"],
  Table[W[n, 1, 0], {n, 1, 10}], WI[1]} // ColumnForm
```



$\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$

$\frac{1}{2}$

因此 $d=1$ 時, 下限數列 $\left\{W_n(1,0)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是以超光速的速度一開始就收斂於 $\dfrac{1}{2}$。其他的自然數 d 呢? 下一節我們就繼續透過圖形的幫助, 趕快一起來尋找到底是哪一個 $t\in[0,1]$ 會讓數列 $\left\{W_n(d,t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 最快收斂於定積分 $\displaystyle\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$ 的呢?

七、何數列 $\left\{W_n(d,t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 最快收斂於定積分 $\displaystyle\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$?

對自然數 d, 我們要看看是哪一個 $t\in[0,1]$ 會讓數列 $\left\{W_n(d,t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 最快收斂於定積分

$$\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}dx?$$

這個 t 會跟 d 扯上關係嗎? 所以讓我們將單位區間 $[0,1]$ 分割成 d 等分, 其分割點包含兩個端點由大而小排列, 分別就是 $\left\{1=t_0,\,t_1,\,t_2,\,\cdots,t_d=0\right\}$, 其中

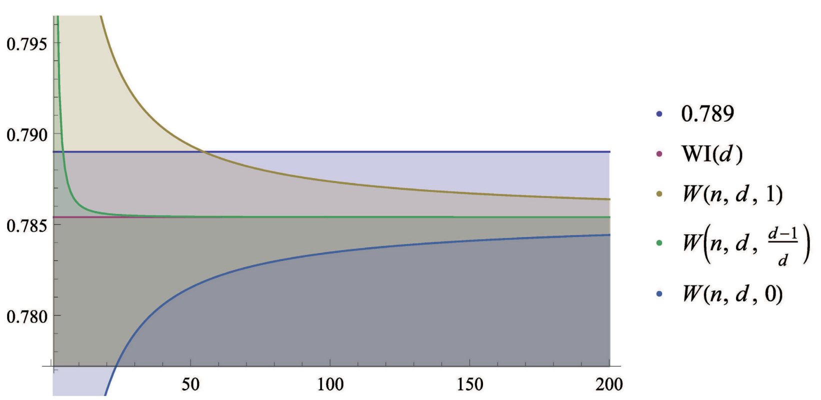
$$t_i=\frac{d-i}{d},\qquad i=0,1,2,\ldots,d\,.$$

對每一個 d, 下面的資料中, 首先出現的是包含 $d+3$ 條曲線的一個圖形; 前二條分別就是參考水平線 $y=c$ (此 $c>WI(d)$) 及水平線 $y=WI(d)$, 接下去分別就是下列數列的曲線:

$$\left\{W_n(d,t_i)\right\}_{n=1}^{\infty},\qquad i=0,1,2,\ldots,d\,.$$

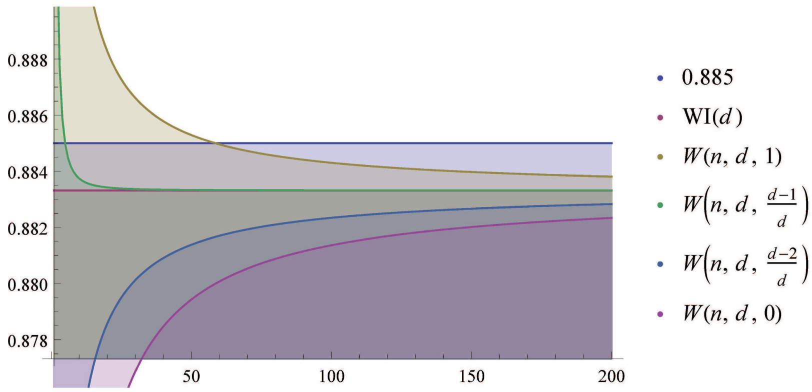
圖形之後出現的是數列 $\left\{W_n(d,\dfrac{d-1}{d})\right\}_{n=1}^{\infty}$ 第 4 到第 9 項精確到六位的近似值, 而最後則是定積分 $WI(d)=\displaystyle\int_0^1(1-x^d)^{\frac{1}{d}}\,dx$ 精確到六位的近似值。爲了完全起見, 我們也把上面已經知道 $d=2$ 的資料按照目前的格式展現在你眼前:

(a) $d=2$:



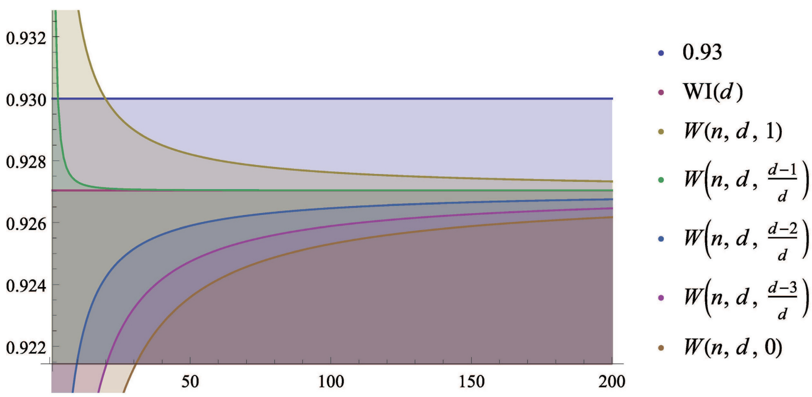
{0.789478, 0.788071, 0.787284, 0.786799, 0.78648, 0.786259}
0.785398

(b) $d = 3$:



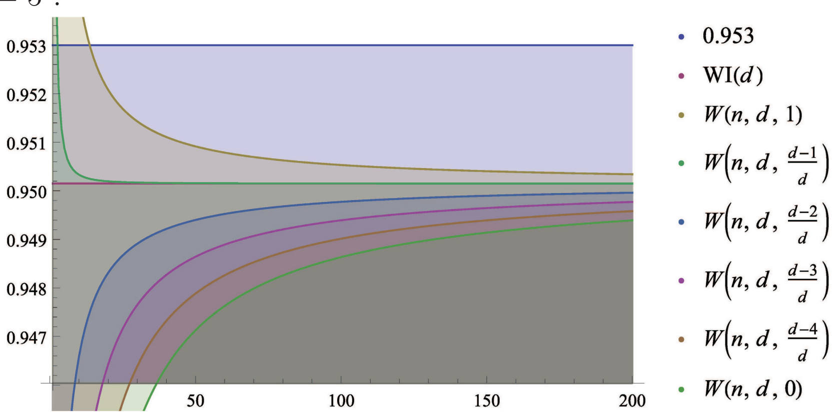
{0.885871, 0.884975, 0.884479, 0.884177, 0.883979, 0.883842}
0.883319

(c) $d = 4$:



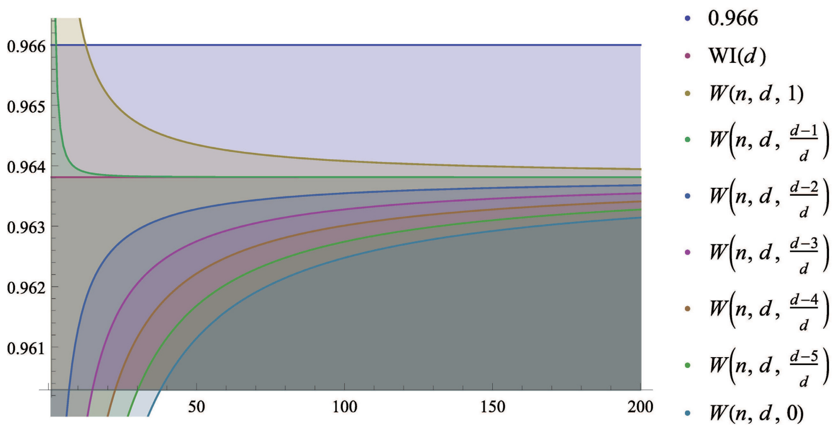
{0.928677, 0.928095, 0.927775, 0.927581, 0.927455, 0.927368}
0.927037

(d) $d = 5$:



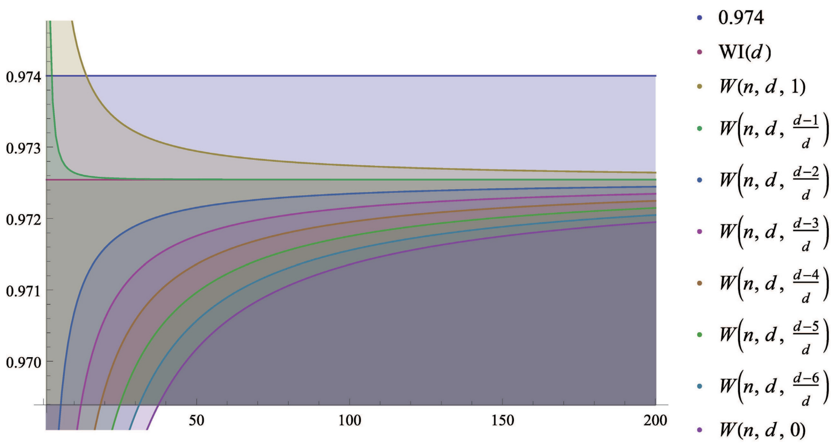
{0.951274, 0.950872, 0.950653, 0.95052, 0.950433, 0.950374}
0.95015

(e) $d=6$：



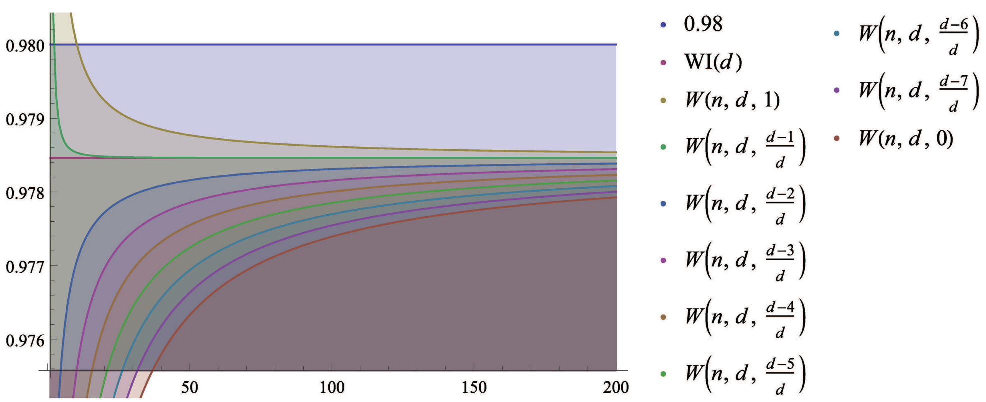
{0.964624, 0.964332, 0.964173, 0.964077, 0.964014, 0.963972}
0.963811

(f) $d=7$：



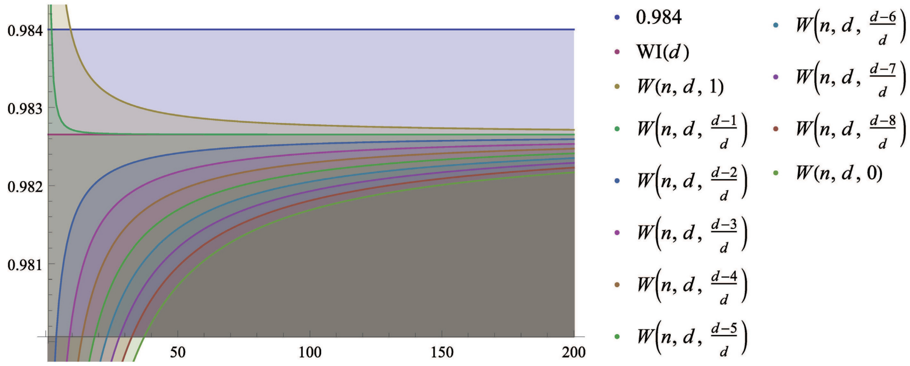
{0.973158, 0.972936, 0.972816, 0.972744, 0.972697, 0.972664}
0.972544

(g) $d=8$：



{0.97894, 0.978767, 0.978673, 0.978616, 0.97858, 0.978555}
0.978461

(h) $d = 9$:



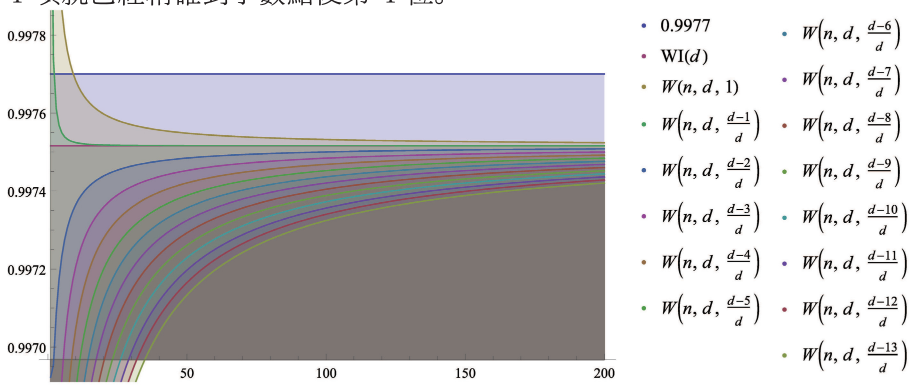

```
{0.983037, 0.982898, 0.982823, 0.982778, 0.982748, 0.982728}
0.982654
```

看完這些資料, 可得如下的猜測 :

猜測 : 令 d 爲自然數且令 $t \in [0,1]$, 則我們有

1. 數列 $\left\{W_n(d,t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 最快收斂於定積分 $\displaystyle\int_0^1 (1-x^d)^{\frac{1}{d}}\, dx$ 的 t 值是 $\dfrac{d-1}{d}$。
2. 當 $\dfrac{d-1}{d} \leq t \leq 1$ 時, $\left\{W_n(d,t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個遞減數列; 下界之一爲 $WI(d)$.
3. 當 $0 \leq t < \dfrac{d-1}{d}$ 時, $\left\{W_n(d,t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個遞增數列; 上界之一爲 $WI(d)$.
4. 上面九個 d 值, 除了 $d=2$ 之外, 數列 $\left\{W_n(d,\dfrac{d-1}{d})\right\}_{n=1}^{\infty}$ 都是在九項之內就精確到小數點後第 3 位。

再看一個稍大一點的例子 $d = 25$: 上面猜測一樣正確, 而且數列 $\left\{W_n(25, 0.96)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的第 4 項就已經精確到小數點後第 4 位。




```
{0.997569, 0.997549, 0.997539, 0.997533, 0.997529, 0.997526}
0.997516
```

參考資料

1. J. M. Borwein and P. B. Borwein, Ramanujan and pi, Scientific American 258(2) (1988), 66-73. (中譯見數播第十三卷第二期)
`http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_20_1_03/index.html`
2. David M. Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis*, MAA, Washington D.C., 1994.
3. Christopher Clapham, *A Concise Oxford Dictionary of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford/New York, 1990.
4. John Daintith and R. D. Nelson, *The Penguin Dictionary of Mathematics*, Penguin Books Ltd., 1989.
5. 蔡聰明, 瓦里斯公式及其相關的結果, 科學月刊第二十七卷第五期, 1996年5月。
`http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_27_05_1/index.html`
6. 蔡聰明, 圓與 π, 科學月刊第二十七卷第六期, 1996年6月。
`http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_27_06_1/index.html`
7. 華理斯生平事蹟, 細請見 The MacTutor History of Mathematics archive 之網站, 其網址為：
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Wallis.html`

—本文作者任教於東海大學應用數學系—