

對廣義相對論三個預測的補充說明

—附 1919/11/7 倫敦泰晤士報報導

張海潮

愛因斯坦 (1879~1955) 獨創的相對論思想首見於 1905 年的論文 [1], 文中愛氏釐清時、空、電磁波的意義, 提出慣性坐標系之間的 (勞侖茲) 時空轉換公式 (註1)。2 年後 (1907), 愛氏結合 1905 年的狹義相對論和等效原理 (Equivalence Principle), 發現光在靠近重力場時速度較慢, 因此會因重力場的影響而轉彎 [2]。緊接著在 1911 年 [3] 愛氏想到可以利用日全食時天空一片漆黑的機會, 拍下太陽周邊星星的照片, 來驗證 (星) 光經過太陽的偏折, 於是他利用 [2] 中光速受重力影響的公式, 計算了光經過太陽的偏折角度。但是因為此刻他只考慮到在接近重力場的時間膨脹效應而忽略了長度收縮, 因此只能得到正確偏折角度值的一半 (註2)。到了 1915 年年底, 愛氏提出集大成的論文 [4], 文中以黎曼幾何的語言說明在重力影響之下, 時空應服從的場方程式並提出兩個計算, 其一是水星近日點的進動 (註3), 其二是光線經過太陽偏折角度的正確數值 (註2)。

水星論文 (註3) 和光偏折論文 (註2) 加上愛氏在 [3] 中預測光線在脫離重力場時的紅移現象, 合稱(廣義) 相對論的三大預測。其實愛氏在 1915 年水星論文所做的計算, 本來就可直接回溯而與天文學家在 1882 年的觀測吻合 (註3), 而光經過太陽的偏折角度 (1.7 弧秒) 的計算也終於在 1919 年 5 月 29 日日全食的觀測得到證實 (註4)。至於紅移現象的實驗, 則要到 1960 年才由哈佛大學的物理學家 Pound 和 Rebka 完成 (註5)。

由於筆者已在《數學傳播》重現水星進動與光經過太陽的偏折角度計算, 因此筆者計畫在本文中補充說明愛氏有關紅移現象的推論。必須指出, 愛因斯坦以物理為前導的數學推論與計算非常獨特, 正如 Landau 和 Lifshitz 在《The classical theory of fields》一書 227 頁對愛因斯坦相對論的評論:

It is remarkable that it was developed by Einstein in a purely deductive manner and only later was substantiated by astronomical observations.

也就是說, (廣義) 相對論一向是以演繹思考, 數學計算來進行預測, 然後由天文觀測加以證實。因此, 不論是從物理或是數學的角度, 相對論都是極具特色的工作。

以下我們討論紅移現象。討論的基礎是愛因斯坦在 1907 年 [2] 提出的等效原理 (註6):

早先，當牛頓提出運動定律和萬有引力定律時，關於力的表達有兩個公式。由運動第二定律，我們有：

$$F = m_I a;$$

式中 a 是加速度， m_I 是慣性質量， I 代表慣性 (Inertia)。另一個(地表的)重力公式是：

$$F = G \frac{m_G M_G}{R^2};$$

式中 G 是萬有引力常數， m_G 和 M_G 分別是蘋果和地球的重力質量，下標 G 代表重力 (Gravitation)， R 是地球的半徑。將這兩個公式合併，則有 (a 是蘋果墜地的加速度)

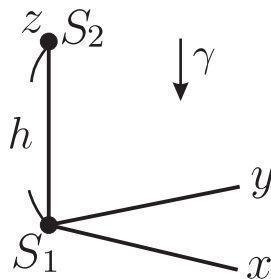
$$m_I a = G \frac{m_G M_G}{R^2}.$$

如果伽利略是正確的，則不論蘋果的大小輕重， a 都是一樣 (9.8公尺/秒²)，則由

$$\frac{m_I}{m_G} a = G \frac{M_G}{R^2}$$

可以看出 $\frac{m_I}{m_G}$ 是一個常數，我們不妨將之取為 1，而得到 $m_I = m_G$ ，亦即慣性質量和重力質量相等。

愛因斯坦更進一步提出等效原理，他由 $m_I = m_G$ 想到在一個均勻的重力場中，如圖一，重力加速度為 γ (註7)



圖一

則此一系統中 S_1 和 S_2 的關係，有如在慣性系統中，一個以等加速 γ 向上運動的電梯內的地板和天花板，地板 S_1 和天花板 S_2 的距離不變。

另一個想法是，如圖一，若有一人 A 以自由落體落下，則 A 必處於一慣性系統，而見到 S_2 及 S_1 以等加速 γ 向上經過。若 A 開始時在 S_2 與 S_2 相對靜止，則經過 T 秒後 ($h = \frac{1}{2}\gamma T^2$) A 經過 S_1 ，看到 S_1 以 $v = \gamma T$ 的速度向上， $v^2 = 2\gamma h$ 。(註8)

不論是 $m_I = m_G$ 或是圖一的電梯比喻都可以結合狹義相對論來得到紅移現象，底下我們將從 $m_I = m_G$ 開始論證 (註9)。

如圖二，有一個質量 M 所生的重力場，並且有一個頻率為 ν_e 的光子從距 Mr_e 的位置輻射到 r_R 的位置，頻率變成 ν_R 。



圖二

首先由普朗克能量公式 $E = h\nu$ ，光子能量的改變是 $h\nu_e - h\nu_R$ 。但是根據 $E = mc^2$ ，我們可以認為光子具慣性質量 $\frac{h\nu_e}{c^2}$ 和 $\frac{h\nu_R}{c^2}$ 。因此，從 r_e 到達 r_R ，根據等效原理 $m_I = m_G = m$ ，光子獲得了額外的重力位能 $GM\frac{h\nu_e}{c^2}/r_e - GM\frac{h\nu_R}{c^2}/r_R$ ，而得失相抵

$$h\nu_e - h\nu_R = GM\frac{h\nu_e}{c^2}/r_e - GM\frac{h\nu_R}{c^2}/r_R.$$

另一種說法是光子的內能 $h\nu_e$ 加上重力位能 $-GM\frac{h\nu_e}{c^2}/r_e$ 不變，消去 h (註10)

$$\nu_e \left(1 - \frac{GM}{r_e c^2}\right) = \nu_R \left(1 - \frac{GM}{r_R c^2}\right),$$

或

$$\nu_R/\nu_e \doteq 1 - \frac{GM}{r_e c^2} + \frac{GM}{r_R c^2}.$$

當 $r_R > r_e$ 時 $\nu_R < \nu_e$ ，代表輻射離開重力場的紅移現象。(註11)

在下面的附錄 — 泰晤士報 1919/11/7 — 可以看到相對論的三個預測 (水星運動、通過太陽光線偏折、光譜位移) 是當時科學界的熱門話題，可惜的是，愛因斯坦死後5年，紅移現象才被證實。

附錄

1919/11/7 倫敦泰晤士報 張海潮譯

科學革命/宇宙新理論/拋棄牛頓的想法

昨天下午，英國皇家學會和天文學會在皇家學會的會議廳舉行了一場聯席會議，討論5月29日日全食發生當天，英國觀測隊觀測的結果。

由於大家都期望對基礎物理問題不同的觀點，能夠透過實驗來檢測真偽，因此引發科學圈對昨日之會極大的興趣，出席的天文和物理學家異常踴躍。

根據皇家學會主席的報告，大家相信此次觀測對知名物理學家愛因斯坦的預測有決定性的

確認，可以說是自海王星發現以來最引人注目的科學事件。但是也有不同的聲音表示科學界對此一觀測的結果究竟是視為一個新的、尚未解釋的現象，還是認為是一個足以完全推翻舊有物理基礎的新理論，不無商榷的餘地。

皇家天文院士戴森爵士描述了分別前往北巴西 Sobral 和西非 Principe 島兩支觀測隊伍的工作。如果日全食當天，天氣許可的話，就可以全程拍攝一組被月球遮蔽之後，全黑的太陽附近一批閃耀星星的照片。此一工作的目的是要確定這些星光向我們而來的時候，究竟是一直線向前，無視於太陽的存在，還是因為太陽而有所偏折，並且如果偏折，則偏折的角度為何。因為如果偏折的話，在底片上星星的位置會與它理論上出現的位置有一段可見的距離。他仔細解釋了觀測的儀器，誤差的修正，和比較星星拍攝位置與理論位置差異所用的方法。他向大會保證確有偏折，偏折的角度和愛因斯坦理論所預測的相符，而非以牛頓理論計算的結果，後者計算的結果是愛因斯坦預測的一半。

值得注意的是，Lodge 爵士去年二月在皇家學會的演講，他當時懷疑光經過太陽會產生偏折，並且大膽的預測即使偏折發生，偏折的角度一定是符合牛頓而非愛因斯坦。

緊接皇家天文院士的發言，兩位觀測隊長 Andrew Crommelin 博士和愛丁頓教授，針對他們的工作，作了有趣的報告，同時從每一個角度確認之前已清楚說明的一般性結論。

重要宣布

至此，事態已經清楚，但是在討論開始時，與會者顯然對此一觀測結果在理論上的興趣遠大於觀測結果本身。即使是主席本人，在說明當下大家所見如非人類思想史上最重大的宣告，至少也是最重大的宣告之一時，不得不承認從來無人能夠清楚的解說愛因斯坦的理論。但是大家都理解愛因斯坦從理論出發，所作的三個預測。

第一個是關於水星運動的預測，已經被證實了。第二個是關於通過太陽的光線會有一定程度的偏折，也已經被證實了。至於第三個關於光譜位移的觀測，則尚未分曉。但是主席本人相信愛因斯坦的理論必將從基礎上改變我們對宇宙結構的看法。

正當大家熱切想聆聽 Lodge 爵士對此事的看法時，Lodge 卻已離開了會場。

後續的發言者皆向觀測者祝賀並表示接受他們的結果。但是，也有如劍橋的 Newell 教授，對會議的推論全盤接受表示遲疑，並且提出光線偏折是否可能源自於一般未可知的太陽氣流。此段發言之後，再也沒有人給出任何非數學的清楚說明。

扭曲的空間

簡言之，牛頓原理主張空間是處處均勻不變的，比方說，不管在何處，任意三角形的三內角和永遠等於 180° 。但是這樣的看法其實是來自於在地面上觀察到三角形三內角和等於 180° 和觀察到圓確實是圓。但是似乎有一些物理現象質疑上述觀察的普遍性，而認為在某些狀況下，空間可能是扭曲的，例如，因為重力導致空間本身的位移而影響觀測的儀器和被觀測的物件。愛因

斯坦學說相信過去一直認為本質上是絕對的空間，其實是受周遭影響的相對空間。愛因斯坦從他的理論導出在某些情形下空間的扭曲會表現在測量由計算而預測的光線偏折角度。他的三個預測已有兩個證實，但是是否可以從對這些預測的證實來證明導出這些預測的理論為真？仍有討論的空間。

註1: 請參考張海潮《狹義相對論筭記》，數學傳播 37 卷 1 期，2013。

註2: 請參考張海潮《愛因斯坦的曲率公式與光線經過太陽的偏折角度》，數學傳播 42 卷 2 期，2018。

註3: 請參考張海潮《介紹愛因斯坦 1915 年 11 月 18 日的水星論文》，數學傳播 42 卷 3 期，2018。

註4: 請見本文附錄，張海潮譯 1919 年 11 月 7 日倫敦泰晤士報的報導。

註5: Google “Pound-Rebka experiment” 或參考 J. Foster 及 J. D. Nightingale 所著《A Short Course in General Relativity》2nd edition, 134-135.

註6: 1907 年，愛因斯坦嘗試在時空中引入重力來思考所謂的廣義相對論，此時他已完成狹義相對論，因此想到輔以等效原理，來發展一個近似的重力原理。不過必須等到 1915/1916 年，才能以黎曼幾何徹底完成廣義相對論對重力的探索。

註7: 此圖出現在 [3] 對等效原理的說明。

註8: 愛因斯坦自稱這兩個想法是「畢生最快樂的思想」(The happiest thought of my life).

註9: 愛因斯坦在 [3] 中是利用都普勒效應來得到頻率的變化，此處參考註 5 的教科書 135 頁的導法，但是利用 $m_I = m_G$ ，仍然需要狹義相對論由都普勒效應導出的 $E = m_I c^2$ 加上普朗克公式 $E = h\nu$ 才能推出紅移現象。這兩個有關能量的式子都出現在高中物理，對高中生比較親切。

註10: 此處普朗克常數只是一個比例，即 E 與 ν 成正比， h 的數值不重要。

註11: 利用等效原理和狹義相對論所得是一個近似的重力理論，一直要到 1915/1916 集大成的工作之後，這些近似的工作才變得準確，請見 L. I. Schiff, On experimental tests of the General Theory of Relativity, Am. J. of Physics 1960, 文中對使用等效原理和狹義相對論探索重力的評論。不過在地表紅移現象的實驗 (註 5 的 Pound-Rebka 實驗)，本文的計算是相當準確的。

參考資料

1. 論動體的電動力學 1905 年 德國《物理學雜誌》。
2. 關於相對論原理和由此得出的結論 1907 年 德國《放射學和電子學年鑑》。
3. 關於引力對光傳播的影響 1911 年 德國《物理學雜誌》。
4. 廣義相對論的基礎 1916 年 德國《物理學雜誌》。

以上四篇論文的中譯本均收集在《紀念愛因斯坦文集》第二卷，學術論文，凡異出版社。

—本文作者為台大數學系退休教授—