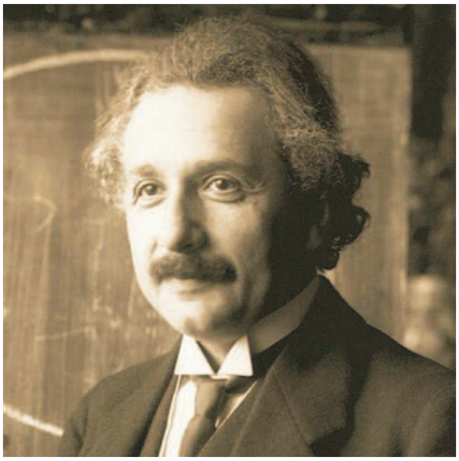
數學傳播 42卷4期, pp. 15-26

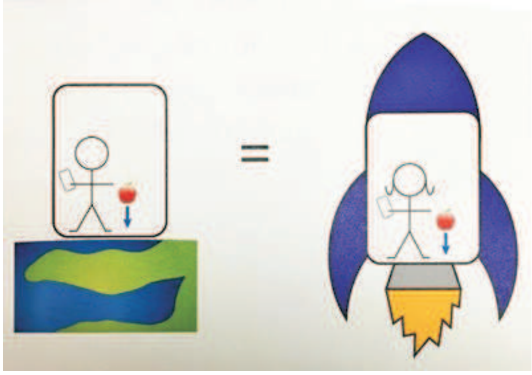
時空幾何與廣義相對論中的質量

演講者：丘成桐院士
時　間：民國 107 年 7 月 6 日
地　點：天文數學館國際會議廳

愛因斯坦的廣義相對論的根源, 是意圖統合甫發展的狹義相對論與牛頓重力理論。他在 1915 年完成這項艱鉅的任務。大多數物理學家認爲這是人類歷史上最具創造力的科學工作。容我在此闡釋這個理論的一部分。



愛因斯坦



一個重大要素是「等效原理 (equivalence principle)」的概念, 其發展之歷史至爲悠久。伽利略曾以實驗驗證: 物體因重力引起的加速度, 與質量無關。克卜勒曾說: 「任意放置的相鄰兩塊石頭, 若不在其他同類物體的影響範圍, 則它們會如兩根磁針聚攏於中間點, 而一塊石頭朝對方趨近的量, 會與對方的質量成正比。」

伽利略

克卜勒

愛因斯坦在 1970 年說道:

> 「我們假設重力場與參考系統的相應加速度在物理上完全等效。小測試物體的重力運動, 僅取決於它在時空的初始位置及速度, 而與它的構造無關。在自由落體實驗室裡的任何實驗 (無論有無重力) 結果, 與實驗室的速度及實驗室在時空中的位置無關。」

因此, 愛因斯坦意識到, 在他想發展的新重力理論中, 重力定律應與觀察者無關。但他需要一個框架來構建此種重力理論, 聯繫起哲學與觀察。由於重力等價於參考系統的加速度, 且質點的加速度可藉由其軌跡的曲率來描述, 愛因斯坦推測: 新的重力概念應該與新的空間概念有關。他知道 (有固定的座標系的) 靜態空間是不適用的。

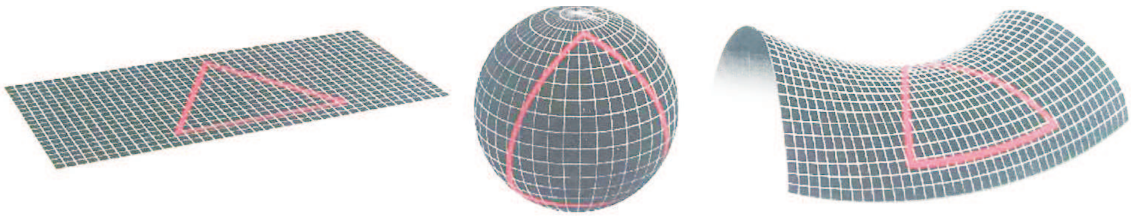
愛因斯坦的偉大工作受益於許多幾何學家的幫助。他和 Grossmann 同受業於傑出的幾何學家兼物理學家 Minkowski。他也與 Levi-Civita 長期交流, 後來與 Hilbert 和 Noether 也時有互動。但最重要的是, 19 世紀大數學家黎曼的空間概念, 對愛因斯坦劃時代的貢獻居功厥偉。

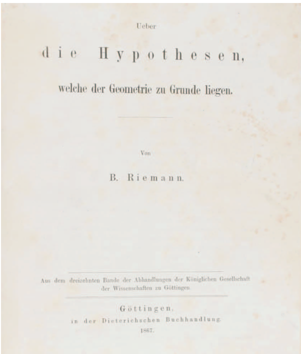
Grossmann

Hilbert

黎曼

在黎曼之前, 只有三種類型的空間: 歐幾里德空間、球體空間及雙曲空間; 它們都由單一座標系統描述, 類似當年牛頓所設想的靜態宇宙。





Ueber

die Hypothesen,

welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Göttingen,
in der Dieterichschen Buchhandlung.
1867.

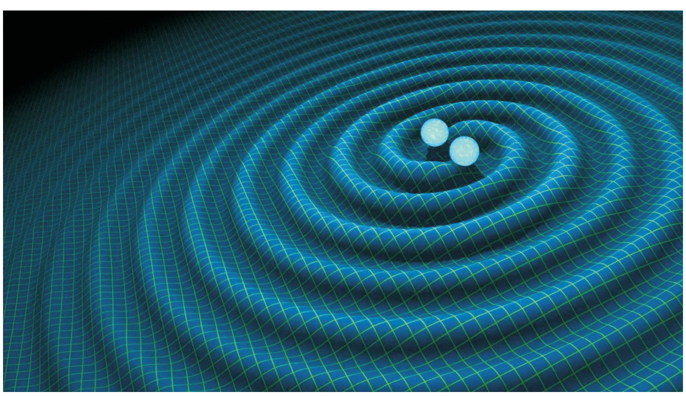
然而黎曼在 1854 年發表著名的論文「關於幾何基礎的假說」, 徹底改變了空間的概念。他的空間與上述三種空間全然不同, 且在無固定參考座標系的情況下仍可存在。他也知道: 當兩點非常靠近時, 我們感覺不到加速度, 所以在一階效應下, 我們感受不到曲率的存在。因此, 在無限小的尺寸, 空間應看似平坦的歐幾里德空間。另一方面, 重力的二階效應必來自質點的加速度。因此, 用於描述重力的動態時, 空間應展現曲率。

我們不確知大域空間是何樣貌。另一方面, 空間應該具有足夠的一般性, 能在不改變重力的物理本質之下, 容許不同的觀察者, 並讓他們得以互通信息。因此, 黎曼要求: 我們可使用各種不同的座標系來觀察空間的基本屬性, 但空間有意義的屬性應與座標系的選取無關。這種空間觀點至關緊要, 因爲它正是廣義相對論中關鍵的等效原理。

黎曼

在引入抽象空間時, 黎曼定義了曲率的概念。事實上, 廣義相對論中重力場的推展是由曲率來量度, 而物質分佈是由曲率的一部分來表示; 隨著時間推移, 曲率也會隨著物質分佈的變化而起伏。

曲率的動態顯示了時空振動的效應。正因如此, 愛因斯坦得出結論: 重力波儘管微弱, 必當存在。在愛因斯坦方程, 重力場與時空幾何不可分割, 渾然一體。



值得注意的是, 在 1854 年的演講中, 黎曼開發新的空間概念, 是爲了要理解物理現象。他甚至建議用不同的方式描述空間中至小和極大的部分。從現代物理的角度來看, 黎曼正在尋找量子空間的可能結構! 黎曼曾考慮使用離散空間來闡釋這個問題。

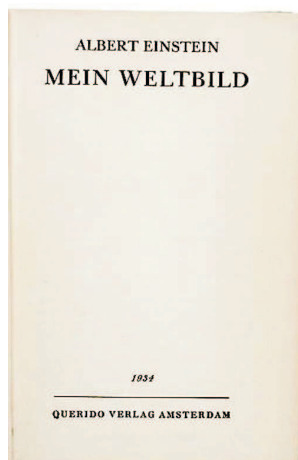
黎曼自 25 歲開始科學著述, 39 歲時因肺疾辭世。過世之前的三年, 他每年都前往義大利避寒, 從而影響了義大利和瑞士的諸多幾何學家, 包括 Christoffel、Ricci 及 Levi-Civita。他

Christoffel

Ricci

Levi-Civita

們推廣了黎曼的想法, 嚴格定義了張量和連絡 (connections), 兩者都是廣義相對論和規範場理論所不可或缺。Ricci 引入了 Ricci 曲率張量, 並證明此張量可產生一個滿足守恆律的張量。這些由幾何學家在 19 世紀中後期完成的工作, 爲廣義相對論提供了至關緊要的工具。



愛因斯坦在 1934 年撰寫了題爲「廣義相對論起源箚記 (Notes on the origin of the general theory of relativity)」的文章 (見 Mein Weltbild, 阿姆斯特丹: Querido 出版社) , 回顧了廣義相對論的發展。第一階段當然是狹義相對論。除了愛因斯坦本人, 該理論的主要創始人還包括 Lorentz 和 Poincaré。

Lorentz

Poincaré

牛頓

一個最重要的結果是: 距離受時間影響。但愛因斯坦知道: 狹義相對論與牛頓重力理論的遠距離作用 (action at a distance) 並不相容, 必須予以修正。

起初, 物理學家沒有意識到: 黎曼做了突破後, 空間概念已發生了根本性的變化。他們試圖在三維空間的框架內修正牛頓的重力理論, 使之與甫發現的狹義相對論一致。這個想法導致愛因斯坦誤入歧途三年。

愛因斯坦在「廣義相對論起源箚記」(第 286-287 頁) 中說:

「我當然熟悉 Mach 的觀點; 根據該觀點, 似可想像慣性阻力的反作用不屬此類加速度, 而是關乎他物之質量的加速度。這個想法有令我著迷之處, 但它沒有爲新理論提供可行的基礎。

最簡單的方法當然是保留重力的 Laplacian 純量位能, 並藉由某個對時間微分的項, 以明顯的方式完整寫下 Poisson 方程, 從而滿足特殊相對論。重力場中質點的運動定律也必須因狹義相對論而做修改。其取徑並未明確標出, 原因是物體的慣性質量可能取決於重力位能。事實上, 基於能量慣性原理, 這是合乎預期的。然而, 這些研究結果令我強烈懷疑。

慣性和重力質量的等效原理現可極爲清楚地陳述如下: 在均勻的重力場中, 相對於均勻加速的座標系, 所有運動都如同發生在無重力場處。這個原則 (「等效原則」) 若適用於任何事件, 就顯示出: 要獲致自然的重力場理論, 相對論的原則需擴展至相互之間非均勻運動的座標系。1908 年至 1911 年, 這類思考使我煩勞不已 ...」

Minkowski

愛因斯坦在蘇黎世求學時, 他的數學教授 Minkowski 是與 Hilbert 和 Poincaré 齊名的大數學家。Minkowski 曾說:「我的班上有位懶惰的學生, 最近完成了一項重要的工作, 而我已對此提出了幾何解釋」。

Minkowski 的物理師承 Helmholtz、J. J. Thomson 及 Heinrich Herz。他認爲: 由於「數學與自然之間已建立的和諧」, 幾何學可作爲物理洞察力的關鍵。他把物理實相歸結爲時空幾何。

1908 年 9 月 21 日, Minkowski 在科隆自然科學家和醫師大會第八十次會議上發表了題爲「時空」的演講, 其中所發展的空間及時間的想法, 隨後被應用在他於 1908 年發表的論文「運動物體之電磁現象的基本方程」; 這是他在電動力學定律的主要工作。(Minkowski 於 1909 年辭世) 。這篇生前最後的論

文, 對有重量的介質, 提出了第一個相對論上正確的 Maxwell 方程表述, 及其以張量運算表達的數學形式。實際上, 愛因斯坦與普朗克 (Planck) 就 Minkowski 的這項工作寫了幾篇論文。

普朗克與愛因斯坦

Minkowski 寫道:

「我想要鋪陳的空間和時間觀點, 已從實驗物理學的土壤中迸現出來, 含藏著它們的力量。它們很激進。爾後, 空間及時間本身注定要消沒於陰影, 惟有結合兩者才能保有獨立的實相。」

有趣的是, Minkowski 承認: 在很大程度上, 他的時空概念歸功於 Poincaré 在 1906 年的工作; Poincaré 當時注意到: 藉著將時間取爲虛數, Lorentz 變換會成爲旋轉。然而, Poincaré 並不認爲四維表示具有太多物理意義。直到 1908 年, Poincaré 仍表示:「三維語言似乎更適合用來描述世界, 儘管這種描述可改採另一種嚴謹的風格。」

這與 Minkowski 的觀點截然不同。他直言:「在某種意義上, 空間和時間的世界是四維的非歐流形。事實上, 我們所處理的不僅是一種新的空間和時間概念。我聲稱的是: 它是一個非常具體的自然法則, 由於它的重要性 (因爲它涉及所有自然知識的原初概念, 即空間和時間), 它堪稱所有自然法則之首。」

在 1908 年的文章中, Minkowski 構建了一個四維空間, 仿效黎曼引入一個度量張量, 提出狹義相對論的幾何意義。作爲狹義相對論中基本對稱群的 Lorenzian 群, 就成了 Minkowski 時空的等距群 (group of isometries)。破天荒地, 我們從 Minkowski 得知自己生活在四維時空中。於是, 在 1908 年, 愛因斯坦從 Minkowski 獲得廣義相對論最重要的靈感: 他必須根據空間應是四維的這一事實, 來構建他的新重力理論。

一般認爲, 在這一年裡, 愛因斯坦最重要的作爲就是他的思考實驗 (thought experiment)。思考實驗讓愛因斯坦知道等效原理的重要性, 也讓他了解以新幾何展現重力的需要。他知道他需要新的空間概念來達成目的。牛頓重力的靜態空間不復適用。

Minkowski 的文章爲何如此重要? 從三維空間至四維空間, 不僅是概念上的突破, 而且也唯有在四維空間內, 重力才能有足夠的空間來展現它的動態性質! 牛頓的重力理論是靜態的, 單一函數即足以描述重力現象。

Minkowski 時空提出了最重要的概念, 即我們需要一個張量來描述重力。張量是甫發明的概念; 組成張量的衆多函數協同一致地轉換, 從而遵循等效原理。Minkowski 的張量完美地描述了狹義相對論, 但愛因斯坦希望進一步將牛頓力學與 Minkowski 空間結合起來。因此, 在無限小的尺度, 他的新時空理論應等同於 Minkowski 時空。也因此, 當兩點非常靠近時, 若僅慮及一階效應, 掌控它們的重力規則應即 Minkowski 時空的規則。然而, 考量重力的二階效應時, 這不復屬實, 曲率變得重要。當時, 物理學家對張量概念一無所知 (事實上, 也只有少數幾何學家了解張量分析。)

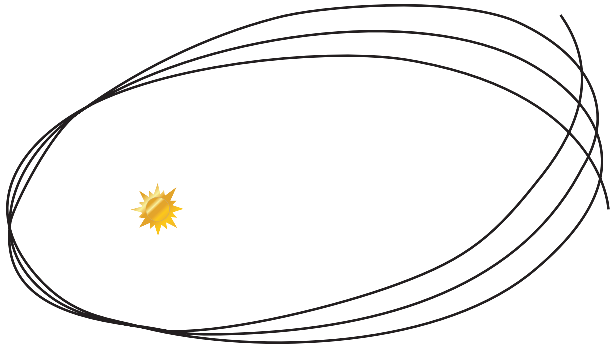
愛因斯坦由等效原理得知, 新的重力位能應取決於一點及該點之切空間的切線向量 (速度向量) , 但他不知道有何可用的數學工具。於是他求助於同窗 Marcell Grossmann, 終於發現重力場應該用度量張量來描述。此張量在時空中不斷變化, 但在每一點都可用一階 Minkowski 度量來作逼近。

Grossmann 是一位幾何學家, 在蘇黎世時曾幫愛因斯坦寫幾何作業。他在圖書館發現了張量的想法。然而, 單獨引入度量張量的想法並不足以描述重力場。我們需要知道如何在彎曲的空間對張量做微分, 並希望微分的結果也與座標系的選取無關 (等效原理的要求) 。這正是 Christoffel 和 Levi-Civita 的連絡理論。

愛因斯坦在上述的廣義相對論回憶錄中說: 這是他的第一個問題, 發現到已被 Levi-Civita 和 Ricci 解決。愛因斯坦的第二個問題是, 如何在這個新框架中推廣牛頓的重力定律。牛頓方程很簡單, 即重力位能的二階導數等於物質密度。

當時, 愛因斯坦和 Grossmann 都不知道該如何微分度量張量, 好讓微分所得仍是與座標選取無關的張量。在愛因斯坦一再央求下, Grossmann 勉爲其難去了圖書館, 找到 Ricci 的工作。結果 Ricci 早已將黎曼的曲率張量收縮爲對稱的二階張量; 它與度量張量有相同的自由度, 可視爲度量張量的二階導數。愛因斯坦立即意識到: 它必定是場方程的左側, 而右側是一般物質分佈的張量 (在平坦空間中, 該張量已被深入研究。) 在兩篇分別發表於 1912 年及 1913 年的文章中, 愛因斯坦和 Grossmann 提出了這個方程式。

然而, 當愛因斯坦試圖藉由漸近方法解此方程時, 並未重現他試圖解釋的天文現象 (例如光偏折、水星在近日點的偏移) 。這讓他非常沮喪。



隨後的幾年裡, 他爲了解釋天文現象, 試圖選取特殊座標, 實質上放棄了珍貴而簡潔的等效原理。他與 Levi-Civita 之間的諸多交流也無所助益。

爲佐證我的陳述, 茲援引愛因斯坦的論文: 廣義相對論起源箚記 (1934年, 第288-289頁)

>「我很快就發現: 等效原理所要求計入的非線性變換, 與座標的簡單物理詮釋勢必無法共存; 亦即, 座標差異不再彰顯理想尺度或時鐘的直接測量結果。
>
> 我對此認知深感困擾, 因爲我花了很長的時間, 才了解物理學中座標的意涵。直到 1912 年, 我才找到擺脱此困境的方法, 它是做以下考慮之後的心得: 必須找到一個新的慣性定律; 當沒有『實存的重力場』時, 若以慣性系統爲座標系, 該新定律即爲伽利略的慣性原理。伽利略所陳述的是: 一個未受力的質點, 在四維空間中將表徵爲一直線, 亦即一段最短的線, 或者更確切地説, 一條極值線 (extremal line)。
>
> 該概念預先假定線元的長度, 亦即度量。在狹義相對論中, 如 Minkowski 所示, 該度量爲擬歐幾里德 (quasi-Euclidean), 亦即線元『長度』ds 的平方是座標微分的某個二次函數。如果藉由非線性變換引入其他座標, 則 ds^2 仍是座標微分的齊次函數, 但函數 $(g_{\mu\nu})$ 的係數不再是常數, 而是座標的某個函數。在數學術語中, 這意味著物理 (四維) 空間具有黎曼度量。對於除了重力之外未受他力作用的質點, 該度量的類時 (timelike) 極值線提供了質點的運動定律, 而該度量的係數 $(g_{\mu\nu})$ 以選取的座標系來描述重力場。如是, 等效原理的自然表述已被找到, 它可擴展到任何重力場, 形成完全自然的假設。
>
> 因此, 上述困境的解決方案如下: 物理意義無關乎座標的微分, 而僅與相對應的黎曼度量相關。現已找到了廣義相對論的可行基礎。然而, 還有兩個待解決的問題:
>
> 1. 若根據狹義相對論來陳述場律, 如何將其轉移到黎曼度量的情況?
> 2. 什麼微分定律決定了黎曼度量 (即 $g_{\mu\nu}$)?
>
> 就問題 2 而言, 其解決方案顯然需要藉由 $(g_{\mu\nu})$ 來構造二階微分不變量。我們很快看出這些已由黎曼 (曲率張量) 建立。在發表廣義相對論的兩年之前, 我們已經考慮了正確的重力場方程, 但無法看出它們如何用於物理。」

愛因斯坦在 1913 年至 1915 年間持續拚搏。有趣的是, 在沒有物質分佈時, 愛因斯坦和 Grossmann 寫下的方程式其實是正確的。事實上, 在愛因斯坦和 Hilbert 寫下正確的場方程之後, Schwarzschild 在 1916 年對球狀恆星得到愛因斯坦方程的解。

Schwarzschild

Schwarzschild 的解假設物質不存在, 且該解足以計算由太陽的重力引起的光偏折。因此, 如果愛因斯坦和 Grossmann 找到確切的球對稱解, 他們大可在 1913 年進行觀察。 顯然, 當近似解未能提

供與物理觀察相符的正確答案時, 愛因斯坦氣餒了。他非常沮喪, 並試圖使用特殊座標, 放棄等效原理。以下的文字透顯了他的沮喪:

> 「相反地, 我確信它們未能妥當處理實驗結果。更甚者, 我相信我可以在一般性的考慮下證明: 在座標變換下保持不變的重力定律, 與因果律不一致。這些是思維上的錯誤, 致使我耗時兩年過於艱苦地工作, 1915 年底才終於辨識出錯誤, 懊惱地回到黎曼曲率, 隨即成功地將理論與天文觀測的結果聯繫起來。
>
> 由最終的理解看來, 喜悅的成果似乎理所當然, 任何聰明的學生都能毫不費力地掌握它。但在黑暗中焦慮探索的歲月, 內中強烈的渴望、交替更迭的信心與疲憊, 以及最終湧現的光亮 - 只有經歷過的人才能理解。」

現在讓我們回溯廣義相對論的最後工作階段發生的事。1915 年春, 愛因斯坦造訪哥廷根的大數學家 David Hilbert。Hilbert 當然深諳幾何, 但最重要的是, 他是當代幾何不變量理論的奠基者。他在哥廷根邀集了大批傑出的數學家, 其中的一些如下述: Felix Klein 是援用對稱群來分類幾何的先驅, Hilbert 的學生 Hermann Weyl 是規範場理論的奠基者, Emmy Noether 堪稱史上最偉大的女性數學家。在 1915 年至 1918 年期間, Noether 發展了她的流 (current) 理論, 據此吾人可使用連續對稱來推導運動方程。(在廣義相對論中, 連續的對稱群是座標變換的群。)

Klein

Weyl

Noether

愛因斯坦的訪問恰逢其時! Hilbert 在同年 11 月發現了 Hilbert 作用量 (action), 藉之迅即推導出正確的重力方程。獲悉此事並收到 Hilbert 關於方程式的明信片後, 愛因斯坦也快速獲得他的方程式, 且據此推算出他一直試圖解讀的天文現象。

起初, 愛因斯坦不滿 Hilbert 搶得頭籌。但 Hilbert 旋即宣稱這項工作應該完全歸屬於愛因斯坦, 讓愛因斯坦寬了心。這是項劃時代的工作。後代物理學家和數學家都應向愛因斯坦致以最崇高的敬意。但我希望歷史記住那群幾何學家, 莫忘他們曾幫助愛因斯坦完成偉大的重力理論。凡此所述大都出自愛因斯坦的文章。遺憾的是, 在那篇文章中, 他並未提到 Hilbert 的貢獻。

回頭看, Hilbert 和愛因斯坦導出的正確運動方程, 其實 Grossmann 及愛因斯坦在 1913 年早能發現。1913 年之方程式左側是 Ricci 曲率, 右側是物質張量。右側是吾人所熟悉的, 符合守恆定律。但方程式左側是不滿足守恆律的 Ricci 張量。所以兩側不會相等。因此, 左側應該置換爲滿足守恆律的某種曲率張量。事實上 Ricci 早已用 Bianchi 恆等式發現了此種張量, 亦即把度量張量乘上 Ricci 張量的 trace, 而後將 Ricci 張量減去此乘積。如果愛因斯坦和 Grossmann 信賴幾何的美, 並試圖根據其內在一致性完成方程式, 就不必等到 1915 年才寫下正確的方程式。

完成廣義相對論後, 愛因斯坦認爲: 物理學最基本的部分應由思考實驗及數學的優雅來主導。在文章的最後, 他說: 在找到廣義相對論的方程之後, 一切都來得如此自然而簡單, 對有能力的學者來說輕而易舉。然而, 在找到真理之前, 他殫精竭慮, 經年勞瘁, 日夜承受煎熬, 箇中艱辛難以言說。愛因斯坦的工作堪稱人類所曾完成的最偉大科學工作。

廣義相對論的成功留給我們另一項艱鉅的任務: 解釋重力的自然現象。任務之所以困難, 是因方程組爲十足地非線性, 且背景時空呈動態變化。對此複雜的非線性系統, 重力物理學無法準確描述其初始數據或邊界條件。

動態變化的時空沒有全域的對稱性。全域時間不存在, 亦即類時的平移對稱性不存在, 致使牛頓力學的許多重要物理量難以定義。如果類時平移能讓系統保持不變, 則 Noether 的流理論允許我們定義質量及線性動量之四維向量。但廣義相對論的一般系統不存在連續的對稱群。

不存在連續對稱性, 致使我們難以定義經典概念, 諸如質量、線性動量和角動量, 這些是理解重力物理學的基礎。觀看兩顆中子星相互作用時, 我們需要知道每顆星球的質量及整個系統的束縛能 (binding energy), 將物質和重力的貢獻加總。這個問題出現在廣義相對論, 因爲該理論不容許能量密度的概念; 理由如下述: 如果存在密度, 它將僅取決於作爲重力位能之度量張量的一階訊息。然而, 我們總能找到一個座標系, 其度量張量的一階微分在某點爲零; 這意味著能量密度爲零。

一百年前, 愛因斯坦已經意識到這些問題。基於模擬牛頓力學的擬張量 (pseudo-tensor) 概念, 他提出了能量的定義。Arnowitt, Deser 和 Misner 在 1962 年更精確地闡明此定義, 現今稱之爲 ADM 質量。該定義適用於孤立的物理重力系統, 其總質量可被定義。從 Noether 的觀點來看, 這是很自然的, 因爲對於孤立的物理系統, 我們期望在無窮遠處存在漸近對稱性, 且無窮遠處的時間平移捕獲系統的總能量。這是總能量的一個良好定義。但是, 它僅捕獲總能量, 而我們需要探索部分能量的詳細訊息。

再次, 這個至關緊要的問題可回溯至愛因斯坦。他曾提出重力輻射的概念: 時空的振動會輻射出提供能量的波。該能量來自系統的束縛能。Bondi、van der Burg、Metzner 及 Trautman 澄清了此概念, 在一些零超曲面 (null hypersurface) 上定義質量, 稱之爲 Bondi 質量。它具有很好的特性, 會隨零超曲面移往未來而減少。減少的 Bondi 質量被詮釋爲重力輻射帶走的能量。Bondi 質量的定義很重要, 因爲它描述了時空的動態。然而, 該定義預設某些取決於愛因斯坦方程動態的時空結構。.

ADM 和 Bondi 質量本質上都是總質量, 無法捕捉到與他物作用中的物體之質量。一個重要的問題是: 如何定義兩個相互作用的中子星之束縛能。因此, 我們需要一個擬局部 (quasilocal) 質量的概念: 在時空中給定一個封閉的二維 (類空間) 曲面 S, 它包含的總能量是多少? 如果 S 是時空中某三維的類空間流形 M 的邊界, 我們想測量 M 中 S 所包圍的總質量。既然我們想確保能量守恆, 那麼我們想要的量應該完全取決於時空中 S 的訊息, 而與 M 的選取無關。這是擬局部質量的守恆律。

長久以來, 這個量的存在性一直是個嚴肅的問題。愛因斯坦和廣義相對論領域的後繼學者最感興趣的是: 孤立物理系統的 ADM 質量總量是否爲正?

事實上, 在 1957 年, Bondi 和其他著名的物理學家曾聚會, 討論廣義相對論中負質量的可能性。愛因斯坦的理論無法判斷這是否可能。但如果總質量爲負, 則系統可能會崩塌, 這意味著: 對不穩定系統, 愛因斯坦的重力理論可能會產生相當讓人困擾的效應。

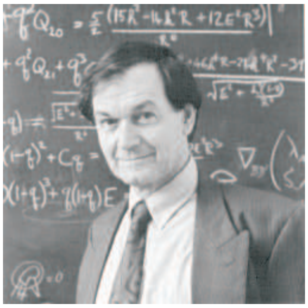
Schoen 和我在 1979 年證明了 ADM 質量爲正, 並於 1981 年發表完整的證明。我們的證明較爲幾何性。隨後, Witten 藉由 Dirac 算子給出了另一個證明; 它對物理學家來說更易了解。不久之後, Bondi 質量也被證明爲正。於是, 在重力作用下, 孤立物理系統總質量的情況非常令人滿意。

與 Schoen

Witten

Schoen 和我用我們的方法有效地證明: 黑洞會在物質密度足夠大時形成。關於物質密度很大時黑洞的形成, 這可能是第一個嚴謹的陳述。

證明擬局部質量的良好定義存在, 耗時甚久, 涵蓋的工作分屬多人, 包括 Penrose、Hawking、Brown-York、Geroch、Horowitz 和史宇光 – 譚聯輝。對平坦的 Minkowski 時空中的任何封閉表面, 這應該是零, 而對一般時空它是非負。因此, 如此的定義可存在, 且與 ADM



Penrose

Hawking

和 Bondi 的既有結果相容, 實屬奇蹟。有兩個重要的定義被提出: 其一是由 Robert Bartnik, 另一個是由王慕道和我。

擬局部質量允許我們定義與雙聯 (binary) 黑洞相關的束縛能, 它與重力輻射的能量有關。王慕道和我利用我們的方法, 與陳泊寧 (Po-Ning Chen) 定義了擬局部角動量, 有助於澄清之前的總角動量定義。

經由 Richard Schoen 及他的共同作者的工作, 我們知道 Bartnik 定義的質量不同於王慕道與我定義的。去了解何者對描述重力的物理動態較有裨益, 會是有趣的工作。

其他許多關於重力的重要經典概念, 在廣義相對論中有其對應物, 然而廣義相對論的非線性性質使其難以被定義。但我認爲: 諸多幾何分析學家近日取得的進展, 將非常重要。

擬局部質量和擬局部角動量的概念, 打開了一扇研究時空物理和時空幾何的窗口。更多的努力需要投注於其研究。

對孤立物理系統中的物體, 這些定義最有成效。而在理解更一般的情況, 以涵蓋更高維度的類似物時, 它們仍然有用。這些概念的研究涉及相當複雜的幾何。

在上個世紀, 藉由物理洞察力, 愛因斯坦的重力理論開啟了我們對幾何的深刻理解, 反之亦然。我們預計這在本世紀將被延續。Stony Brook 的會議中, 有極爲有趣的活動, 展現了幾何、分析和物理相互作用的未來, 令人興奮。

—演講者丘成桐爲哈佛大學講座教授—