數學傳播 42卷3期, pp. 74-94

勾股弦幻方組的三種構造方法

梁培基 · 李學數

一、前言

勾股弦數組是一個歷史悠久的古老數學問題, 近代將勾股弦數組代入幻方之中, 使得幻方的結果也滿足勾股弦數組的定義, 頗爲有趣。在此之前, 國外僅有2篇勾股弦幻方的文章, 介紹了2種方法。第一種是「R 法」(Royal Vale Heath) [1], 第二種是「EE 法」(Emanuel Emanouilidis) [2]。第三種是我們本次提供的「LL 法」, 三種方法各不相同, 都可以得到勾股弦幻方組, 殊途而同歸。

「R 法」與「EE 法」研究的是 $K=2$ 次方勾股弦數組的勾股弦幻方組, 本文我們給出了 $K=3$、4、5 次方數組的勾股弦幻方組, 拓廣了勾股弦幻方組的研究範圍。

二、畢氏定理的來由及用途

畢氏定理描述了直角三角形三條邊之間的關係, 我國古代把直角三角形中較短的直角邊叫做「勾」, 較長的直角邊叫做「股」, 斜邊叫做「弦」。

「平面上的直角三角形的兩條直角邊的長度 a, b (古稱勾長、股長) 的平方和等於斜邊長 c (古稱弦長) 的平方。」則畢氏定理的公式爲 $a^2+b^2=c^2$。(a,b,c) 叫做勾股數組。

最早發現畢氏定理的國家是古巴比倫, 在英國博物館保存的一塊相同時期的泥板上有這樣的記載: 「長是 4, 對角線是 5。那麼寬是多少?

沒人知道。

4 乘 4 是 16。

5 乘 5 是 25。

你從 25 裏面拿掉 16, 剩下的是 9。

幾乘幾是 9 呀?

3 乘 3 是 9。

3 就是寬。」

這段文字說明古巴比倫人知道當直角三角形的斜邊是 5, 一條直角邊是 4 的時候, 另外一條直角邊一定是 3。

在美國哥倫比亞大學收藏的一塊編號爲 PLIMPTON 322 的泥板上記錄了很多例子。這塊泥板西元前 2000 年至西元前 1600 年的古巴比倫泥板, 總共有 15 行符號, 分成 5 列。其中第四列相當於我們的「編號」兩個字, 第五列從第一行到最後一行依次是從 1 到 15 這 15 個數字。所以說真正有意義的其實只有前 3 列。第三列是斜邊長, 第二列是短的直角邊長。最令人費解的是第一列, 這一列的數字從第一行的 0.9834... 逐漸減少到最後一行的 0.38716...。關於這第一列的含義, 長期以來爭論不休。美國威斯康星大學巴克教授於1980年寫了一篇膾炙人口的文章《夏洛克. 福爾摩斯在巴比倫》。這篇文章發表在《美國數學月刊》上。巴克教授在這篇文章裏從大偵探福爾摩斯的角度出發來研究這些數字。其結論令人吃驚不已 [4]。

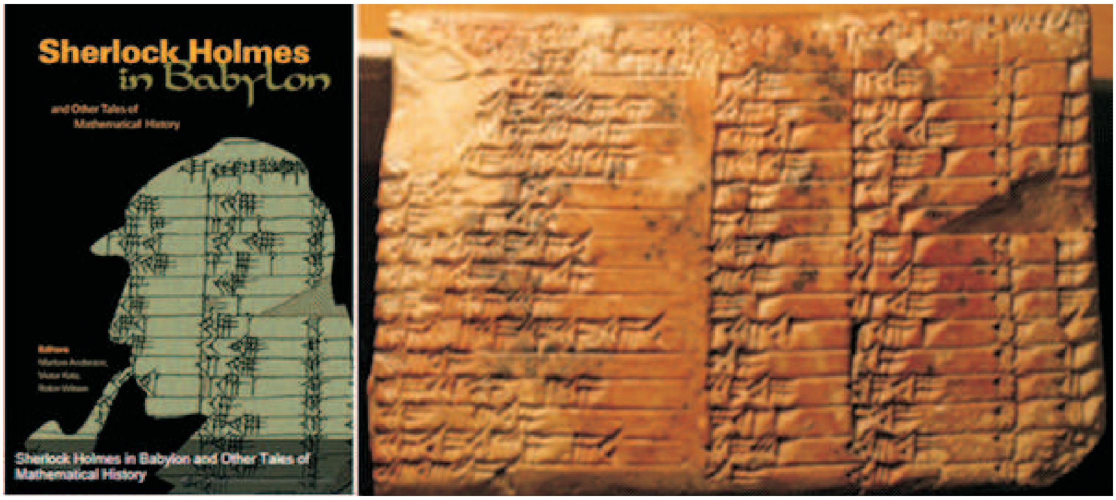

圖 2.1:《夏洛克.福爾摩斯在巴比倫》

原來這一列的數字代表的是短的直角邊和長的直角邊比值的平方, 也就是 $(a/b)^2$。如果以 θ 代表斜邊和長的直角邊的夾角, 那麼這第一列數字就是 $(\tan\theta)^2$。更有趣的是這個 θ, 從第一行開始, 幾乎是穩定的以 1 度的速度下降, 從大約 45 度, 下降到大約 30 度。所以這個表還有可能是古巴比倫人的三角函數表呢。

巴克教授認爲古巴比倫人不但知道很多勾股數組的例子, 而且還知道如何製造勾股數組。也就是說他們知道勾股數組的那個一般公式:

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2。$$

巴克的結論是可信, 因爲泥板涉及的最大的一個勾股數組是 (18541, 12709, 13500)。這樣的例子是絕對不可能通過測量發現的, 也幾乎不可能通過湊巧得到。而且 18541 還是個素數, 也

就是說這組數字也不可能是通過較小的勾股數組放大得來。所以我們確實有充分的理由相信古巴比倫人知道一般形式的畢氏定理。

正因爲如此, 2002 年 1 月份的《美國數學會通告》封面登載了 YBC 7289 泥板的照片。配的文字說明是比「畢達哥拉斯早一千年的畢達哥拉斯定理」。

約西元前一世紀的《周髀算經》相傳畢氏定理是商代由商高發現的, 全書第一節就記載著一個名叫商高的人, 對周公講了這樣一段話:「折矩以爲勾廣三, 股修四, 徑隅五。既方其外, 半之一矩, 得成三四五。兩矩共長二十有五, 是謂積矩。」這段話毫無疑問是在談論畢氏定理, 而周公大約生活在西元前 11 世紀, 商高既和周公談話, 當然是周公的同時代人, 這就比畢達哥拉斯早了數百年, 所以商高理應獲得畢氏定理的榮譽。故又有稱爲商高定理, 明確記載了周公後人陳子敘述的畢氏定理公式:「若求邪至日者, 以日下爲勾, 日高爲股, 勾股各自乘, 並而開方除之, 得邪至日」(圖 2.2)。

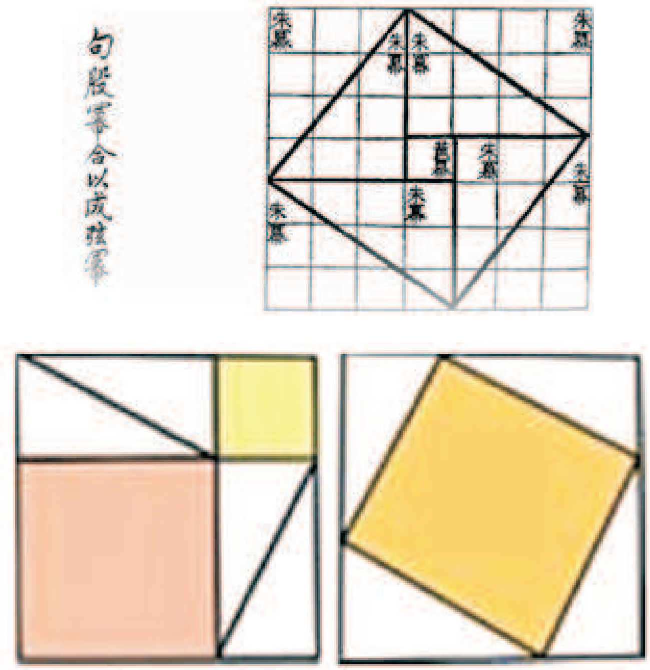

圖 2.2:

表述爲「勾股各自乘, 並之, 爲弦實。開方除之, 即弦」。

法國稱爲「驢橋定理」, 埃及稱爲「埃及三角形」。畢氏定理在幾何學中的實際應用非常廣泛。相傳大禹在治水過程中,「左準繩, 右規矩」。(「規」就是圓規,「矩」就是曲尺, 由長短兩尺在端部相交成直角合成, 短尺叫勾, 長尺叫股), 運用勾股測量術進行測量。表明大禹已經知道用長爲 3:4:5 的邊構成直角三角形。陳子利用畢氏定理, 測量太陽高度等。

勾股弦定理廣泛應用在人民生活方面, 例如: 測量土地的面積、測量距離、測量山的高度、太陽高度等。畢氏定理把數學由計算與測量技術轉變爲證明與推理科學。畢氏定理中的公式是第一個不定方程, 也是最早得出完整解答的不定方程, 它一方面引導到各式各樣的不定方程, 包括著名的費爾馬大定理, 也爲不定方程的解題程式樹立了一個規範的模式。從畢氏定理出發開平方、開立方、求圓周率等。

古希臘的畢達哥拉斯證明了畢氏定理。相傳畢達哥拉斯證明這個定理後, 殺了一百頭牛作慶祝, 故又稱「百牛定理」。據有關資料報導, 僅畢氏定理的證明方法就有 500 多種, 是數學定理中證明方法最多的定理之一。但他們發現的時間都比我國晚, 我國是世界上最早發現畢氏定理的證明。

三、最早提出構造勾股弦幻方組的學者

Royal Vale Heath (1883 年～1960 年) 是紐約城經紀人、美國魔術師和數學謎題愛好者, 1930 年發表了一組幻方圖 3.1 在他的書《數學魔術 — 數字的魔術, 謎題, 遊戲》(Mathemagic — magic, puzzles, games with numbers, Dover 1953)

圖 3.1: Royal Vale Heath 的書

這組幻方分別由 3 階、4 階與 5 階所組成, 奇怪的是, 這 3 個幻方的幻和都相同, 都等於 174。而 3 階幻方幻和的總和是 $174\times 3=522$, 4 階幻方幻和的總和是 $174\times 4=696$, 5 階幻方幻和的總和是 $174\times 5=870$。再求 3 個幻方總和的平方和, 得: $522^2+696^2=870^2=272484+484416=756900$。

這種方法稱爲「R 法」。其特點是, 每個階數不同的幻方, 他們幻和相等, 再求 n 個幻和的平方和, 使得 $A^2+B^2=C^2$. 又稱爲「同幻和, 不同階數法」。

我們利用「R 法」可以得到其幻和較小的 3, 4, 5 階勾股弦幻方組 (圖 3.2):

幻和 $=120$ 的勾股弦幻方組

3階

			120
39	51	30	120
31	40	49	120
50	29	41	120
120	120	120	120

3階總和=360

4階

				120
1	8	56	55	120
57	54	2	7	120
4	5	59	52	120
58	53	3	6	120
120	120	120	120	120

4階總和=480

5階

					120
9	15	21	27	48	120
26	47	13	14	20	120
18	19	25	46	12	120
45	11	17	23	24	120
22	28	44	10	16	120
120	120	120	120	120	120

5階總和=600

圖 3.2

由 3、4、5 階幻方, 得到:$3^2+4^2=5^2$。即 $360^2+480^2=600^2=360000$。方陣外邊的數字分別是各個幻方的行、列及對角線之和 (下同)。

還可以拓廣到廣義勾股弦數組及 3 次冪和數組。在洛書中我們發現兩個廣義 4 元素 3 次勾股弦數組。第 1 組是 $A=3$, $B=4$, $C=5$, $D=6$, 第 2 組是 $A=1$, $B=6$, $C=8$, $D=9$, 用這兩個數組可以構造出廣義勾股弦幻方組, 圖 3.3 是 $A=3$, $B=4$, $C=5$, $D=6$ 的廣義勾股弦數組, 他們滿足:

$$A^3+B^3+C^3=D^3.$$

這 4 個幻方的幻和都等於 240。A, B, C, D 各個子幻方的總和分別是 720,960,1200,1440。計算得 $720^3+960^3+1200^3=1440^3$, 即: $373248000+884736000+1728000000=2985984000$。

圖 3.4 是利用第 2 組元素, 當 $A=1$, $B=6$, $C=8$, $D=9$ 時構造的廣義勾股弦幻方組, 仍然滿足 3 次方的性質: 對於拓廣勾股數組 1, 6, 8, 9, 我們可以造出 4 個幻方, 來滿足廣義勾股弦幻方組。

設 $S=1080$, 則 $(1080\times 1)^3+(1080\times 6)^3+(1080\times 8)^3=(1080\times 9)^3$.

在幻方的階數 1, 6, 8, 9 中, 第一個「1」, 代表 1 階幻方, 其幻和爲 1080; 其餘的 6, 8, 9, 分別代表 6 階, 8 階, 9 階幻方。

幻和=240的勾股弦幻方組

$n=3$

240

79	159	2	240
3	80	157	240
158	1	81	240

240

$n=4$

240

4	115	114	7	240
112	9	10	109	240
11	110	111	8	240
113	6	5	116	240

240

$n=5$

240

12	18	61	71	78	240
62	72	74	13	19	240
75	14	20	63	68	240
21	59	69	76	15	240
70	77	16	17	60	240

240

$n=6$

240

22	31	56	54	52	25	240
27	32	47	46	35	53	240
29	44	37	38	41	51	240
57	39	42	43	36	23	240
50	45	34	33	48	30	240
55	49	24	26	28	58	240

240

圖 3.3

6 階平方幻方

1	10	357	355	353	4
6	11	348	347	14	354
8	345	16	17	342	352
358	18	343	344	15	2
351	346	13	12	349	9
356	350	3	5	7	359
1080	1080	1080	1080	1080	1080

8 階平方幻方

20	37	227	240	228	247	33	48
244	231	49	32	36	21	243	224
41	24	236	223	251	232	44	29
235	248	28	45	25	40	220	239
31	50	230	245	225	242	22	35
241	226	38	19	47	34	246	229
46	27	249	234	238	221	39	26
222	237	23	42	30	43	233	250
1080	1080	1080	1080	1080	1080	1080	1080

9 階平方幻方

149	154	138	90	101	88	121	132	107
94	105	80	122	127	111	144	155	142
117	128	115	148	159	134	95	100	84
136	147	158	83	97	99	114	116	130
87	89	103	109	120	131	137	151	153
110	124	126	141	143	157	82	93	104
156	140	145	106	81	92	125	112	123
98	85	96	129	113	118	160	135	146
133	108	119	152	139	150	102	86	91
1080	1080	1080	1080	1080	1080	1080	1080	1080

圖 3.4

我們造出的 1, 6, 8, 9 廣義勾股弦幻方組如圖 3.4, 1 階省略。

有意思的是, 8 階幻方與 9 階幻方都具有平方幻方的性質, 並且這兩個幻方的 1 次幻和相等, 即 $S_8 = 1080$; $S_9 = 1080$。但是他們的 2 次幻和就分道揚鑣了 $S_8^2 = 227284$; $S_9^2 = 134520$。

經計算得:

$$1080^3 + 6480^3 + 8640^3 = 9720^3$$

即:$1259712000 + 272097792000 + 644972544000 = 918330048000$。

四、Emanuel Emanouilidis 的勾股弦幻方組

4.1. 「EE 法」是 Emanuel Emanouilidis 新澤西州 Kean 大學電腦科學系教授在 2005 年介紹的概念 [3]。

定義: 如果 n 階幻方 A, B, C 滿足:

$$(A_{ij})^2 + (B_{ij})^2 = (C_{ij})^2$$

則稱 A、B、C 爲 EE 法勾股弦幻方組。

由於勾股弦幻方組的階數都相同, 又稱爲「同階勾股弦幻方組」。這一點與「R 法」不同。

圖 4.1.1 上部的 A, B, C; 是滿足勾股弦幻方組的 3 個 3 階幻方;
再計算出他們各個元素的平方和, 如圖 4.1.1 下部的 $(A_{ij})^2$, $(B_{ij})^2$, $(C_{ij})^2$。

$A = 3L$

12	27	6	45
9	15	21	45
24	3	18	45

$B = 4L$

16	36	8	60
12	20	28	60
32	4	24	60

$C = 5L$

20	45	10	75
15	25	35	75
40	5	30	75

$(A_{ij})^2$

144	729	36
81	225	441
576	9	324

$(B_{ij})^2$

256	1296	64
144	400	784
1024	16	576

$(C_{ij})^2$

400	2025	100
225	625	1225
1600	25	900

圖 4.1.1

我們再把 $(A_{ij})^2 + (B_{ij})^2$ 與 $(C_{ij})^2$ 計算出來, 如下圖4.1.2

$(A_{ij})^2 + (B_{ij})^2$

400	2025	100
225	625	1225
1600	25	900

$(C_{ij})^2$

400	2025	100
225	625	1225
1600	25	900

圖 4.1.2: 兩個方陣的結果相同

他給出以下定理:

定理: 用 EE 法可以得到下面的勾股弦幻方組:

步驟 1. 選擇 n 階幻方或乘法幻方 M。

步驟 2. 選擇一組勾股弦數組 (x, y, z), $x < y < z$。

步驟 3. 設 $A = xM$, $B = yM$、$C = zM$。

則 A、B、C 爲 EE 型勾股弦幻方組.

例如: A、B、C, EE 型勾股弦幻方組可由下面

$$M = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 9 & 4 \\ \hline 7 & 5 & 3 \\ \hline 6 & 1 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, 得到。

4.2. EE 型勾股弦幻方組的拓廣

利用 EE 型勾股弦幻方的構造方法, 可以造出 4 元 2 次勾股幻方組, 例如 $A^2+B^2+C^2 = D^2$。

我們從古老的洛書 (3 階幻方, 簡記爲 L) 中找到兩組 4 元 2 次 (3:1型) 拓廣勾股數組: $1^2 + 4^2 + 8^2 = 9^2 = 81$; $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2 = 49$。用這兩個數組, 分別乘以洛書 L 的各個元素, 可以構造 4 個 3 階幻方。當 $A = 1$, $B = 4$, $C = 8$ 及 $D = 9$ 時, 用 L 分別乘以 1, 4, 8, 9 得到的 4 個 3 階幻方, 如圖 4.2.1 上部的 A, B, C, D; 再計算出他們各個元素的平方和, 如圖 4.2.1 下部的 $(A_{ij})^2$, $(B_{ij})^2$, $(C_{ij})^2$, $(A_{ij})^2$。

$A = L$

4	9‘	2	15
3	5	7	15
8	1	6	15

$B = 4L$

16	36	8	60
12	20	28	60
32	4	24	60

$C = 8L$

32	72	16	120
24	40	56	120
64	8	48	120

$D = 9L$

36	81	18	135
27	45	63	135
72	9	54	135

$(A_{ij})^2$

16	81	4
9	25	49
64	1	36

$(B_{ij})^2$

256	1296	64
144	400	784
1024	16	576

$(C_{ij})^2$

1024	5184	256
576	1600	3136
4096	64	2304

$(D_{ij})^2$

1296	6561	324
729	2025	3969
5184	81	2916

圖 4.2.1

我們再把 $(A_{ij})^2+(B_{ij})^2+(C_{ij})^2$ 與 $(D_{ij})^2$ 計算出來, 如下圖 4.2.2。

$(A_{ij})^2+(B_{ij})^2+(C_{ij})^2$

1296	6561	324
729	2025	3969
5184	81	2916

$(D_{ij})^2$

1296	6561	324
729	2025	3969
5184	81	2916

圖 4.2.2: 兩個方陣的結果相同

4.3. 拓廣勾股數組, 6 元 2 次勾股數幻方組 (4:2)

存在 $(A_{ij})^2+(B_{ij})^2+(C_{ij})^2+(D_{ij})^2=(E_{ij})^2+(F_{ij})^2$ 拓廣勾股數組, 當 $A=4$, $B=10$, $C=13$, $D=14$ 及 $E=15$, $F=16$ 時, 用洛書方陣 L分別乘以 4, 10, 13, 14, 15, 16 得到 6 個 3 階幻方, 如圖 4.3.1 上部的 A,B,C,D,E,F; 再計算出他們各個元素的平方和如圖 4.3.1 下部的 $(A_{ij})^2$, $(B_{ij})^2$, $(C_{ij})^2$, $(D_{ij})^2$, $(E_{ij})^2$, $(F_{ij})^2$。

$A=L\times 4$

16	36	8	60
12	20	28	60
32	4	24	60

$B=L\times 10$

40	90	20	150
30	50	70	150
80	10	60	150

$C=L\times 13$

52	117	26	195
39	65	91	195
104	13	78	195

$D=L\times 14$

56	126	28	210
42	70	98	210
112	14	84	210

$E=L\times 15$

60	135	30	225
45	75	105	225
120	15	90	225

$F=L\times 16$

64	144	32	240
48	80	112	240
128	16	96	240

$(A_{ij})^2$

256	1296	64
144	400	784
1024	16	576

$(B_{ij})^2$

1600	8100	400
900	2500	4900
6400	100	3600

$(C_{ij})^2$

2704	13689	676
1521	4225	8281
10816	169	6084

$(D_{ij})^2$

3136	15876	784
1764	4900	9604
12544	196	7056

$(E_{ij})^2$

3600	18225	900
2025	5625	11025
14400	225	8100

$(F_{ij})^2$

4096	20736	1024
2304	6400	12544
16384	256	9216

圖 4.3.1

我們再把 $(A_{ij})^2+(B_{ij})^2+(C_{ij})^2+(D_{ij})^2$ 與 $(E_{ij})^2+(F_{ij})^2$ 計算出來, 如下圖 4.3.2:

$(A_{ij})^2+(B_{ij})^2+(C_{ij})^3+(D_{ij})^2)^2$

7696	38961	1924
4329	12025	23569
30784	481	17316

$(E_{ij})^2+(F_{ij})^2$

7696	38961	1924
4329	12025	23569
30784	481	17316

圖 4.3.2: 兩個方陣的結果相同

4.4. 拓廣勾股數組, 4 元 3 次勾股數幻方組 (3:1型)

我們可以構造出 4 元 3 次勾股數幻方組 (3:1 型) , 首先找到滿足3次方勾股數組 $(A_{ij})^3+(B_{ij})^3+(C_{ij})^3=(D_{ij})^3$ 也就是說, 這3個子幻方任意相同位置上 $A^3+B^3+C^3$ 之和都等於 D^3。

下面給出用洛書 L 分別乘以 3、4、5、6 與分別乘以 1、6、8、9 的兩個例子。這兩個數組 $3^3+4^3+5^3=6^3$ 與 $1^3+6^3+8^3=9^3$, 來源於中國的洛書, 洛書中蘊藏的「珍寶」還多著呢, 等待著有興趣的人擷取和開發!

把 3, 4, 5, 6 分別乘以 L, 得到 4 個 3 階幻方如圖 4.4.1 上部的 A,B,C,D; 再計算出他們各個元素的立方和如圖 4.4.1 下部的 $(A_{ij})^3$, $(B_{ij})^3$, $(C_{ij})^3$, $(D_{ij})^3$。

$3L$

12	27	6	45
9	15	21	45
24	3	18	45

$4L$

16	36	8	60
12	20	28	60
32	4	24	60

$5L$

20	45	10	75
15	25	35	75
40	5	30	75

$6L$

24	54	12	90
18	30	42	90
48	6	36	90

$(A_{ij})^3$

1728	19683	216
729	3375	9261
13824	27	5832

$(B_{ij})^3$

4096	46656	512
1728	8000	21952
32768	64	13824

$(C_{ij})^3$

8000	91125	1000
3375	15625	42875
64000	125	27000

$(D_{ij})^3$

13824	157464	1728
5832	27000	74088
110592	216	46656

圖 4.4.1

我們再把 $(A_{ij})^3+(B_{ij})^3+(C_{ij})^3$ 與 $(D_{ij})^3$ 計算出來, 如下圖 4.4.2:

$(A_{ij})^3+(B_{ij})^3+(C_{ij})^3$

13824	157464	1728
5832	27000	74088
110592	216	46656

$(D_{ij})^3$

13824	157464	1728
5832	27000	74088
110592	216	46656

圖 4.4.2: 兩個方陣的結果相同

把 1, 6, 8, 9 分別乘以 L, 得到 4 個 3 階幻方如圖 4.4.3 上部的 A,B,C,D; 再計算出他們各個元素的立方和如圖 4.4.3 下部的 $(A_{ij})^3$, $(B_{ij})^3$, $(C_{ij})^3$, $(D_{ij})^3$。

$A=L$

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$B=6L$

24	54	12
18	30	42
48	6	36

$C=8L$

32	72	16
24	40	56
64	8	48

$D=9L$

36	81	18
27	45	63
72	9	54

$(A_{ij})^3$

64	729	8
27	125	343
512	1	216

$(B_{ij})^3$

13824	157464	1728
5832	27000	74088
110592	216	46656

$(C_{ij})^3$

32768	373248	4096
13824	64000	175616
262144	512	110592

$(D_{ij})^3$

46656	531441	5832
19683	91125	250047
373248	729	157464

圖 4.4.3

我們再把 $(A_{ij})^3+(B_{ij})^3+(C_{ij})^3$ 與 $(D_{ij})^3$ 計算出來, 如下圖 4.4.4

$(A_{ij})^3+(B_{ij})^3+(C_{ij})^3$

46656	531441	5832
19683	91125	250047
373248	729	157464

$(D_{ij})^3$

46656	531441	5832
19683	91125	250047
373248	729	157464

圖 4.4.4: 兩個方陣的結果相同

4.5. 拓廣勾股數組, 5元3次勾股數幻方組 (4:1型)

存在數組滿足 $(A_{ij})^3+(B_{ij})^3+(C_{ij})^3+(D_{ij})^3=(E_{ij})^3$, 兩個滿足條件的數組如下:

$$1^3+5^3+7^3+12^3=13^3;$$

$$5^3+7^3+9^3+10^3=13^3.$$

利用上述數組可以構造出 5 元 3 次勾股弦數幻方組 (4:1型) , 下面給出洛書 L 分別乘以 1、5、7、12、13 及 L 分別乘以 5、7、9、10、13 的兩個例子。這兩個數組 $1^3+5^3+7^3+12^3=13^3=5^3+7^3+9^3+10^3$, 結果相同。如圖 4.5.1 與圖 4.5.3。計算結果分別在圖 4.5.2 與圖 4.5.4。

$A=L$

4	9	2	15
3	5	7	15
8	1	6	15

$B=5L$

20	45	10	75
15	25	35	75
40	5	30	75

$C=7L$

28	63	14	105
21	35	49	105
56	7	42	105

$D=12L$

48	108	24	180
36	60	84	180
96	12	72	180

$E=13L$

52	117	26	195
39	65	91	195
104	13	78	195

圖 4.5.1

我們把 $(A_{ij})^3+(B_{ij})^3+(C_{ij})^3+(D_{ij})^3$ 計算出來, 圖 5.4.2 (左) , 再把 $(E_{ij})^3$ 計算出來, 圖 5.4.2 (右) 。

$(A_{ij})^3+(B_{ij})^3+(C_{ij})^3+(D_{ij})^3$

140608	1601613	17576
59319	274625	753571
1124864	2197	474552

$(E_{ij})^3$

140608	1601613	17576
59319	274625	753571
1124864	2197	474552

圖 4.5.2: 兩個方陣結果相同

下面是 $5^3+7^3+9^3+10^3=13^3$ 的例子圖 4.5.3 :

$A=5L$

20	45	10	75
15	25	35	75
40	5	30	75

$B=7L$

28	63	14	105
21	35	49	105
56	7	42	105

$C=9L$

36	81	18	135
27	45	63	135
72	9	54	135

$D=10L$

40	90	20	150
30	50	70	150
80	10	60	150

$E=13L$

52	117	26	195
39	65	91	195
104	13	78	195

圖 4.5.3

我們把 $(A_{ij})^3+(B_{ij})^3+(C_{ij})^3+(D_{ij})^3$ 計算出來, 圖 4.5.4 (左), 再把 $(E_{ij})^3$ 計算出來, 圖 4.5.4 (右),

$(A_{ij})^3+(B_{ij})^3+(C_{ij})^3+(D_{ij})^3$

140608	1601613	17576
59319	274625	753571
1124864	2197	474552

$(E_{ij})^3$

140608	1601613	17576
59319	274625	753571
1124864	2197	474552

圖 4.5.4: 兩個方陣的結果相同

4.6. 拓廣勾股數組, 7 元 5 次勾股數幻方組 (6:1 型)

存在 $(A_{ij})^5+(B_{ij})^5+(C_{ij})^5+(D_{ij})^5+(E_{ij})^5+(F_{ij})^5=(G_{ij})^5$ 拓廣勾股數組

$$4^5+5^5+6^5+7^5+9^5+11^5=12^5=248832.$$

下面給出洛書 L 分別乘以 4、5、6、7、9、11、12 的例子, 得到 7 個 3 階幻方如圖 4.6.1。

$A=4L$

16	36	8	60
12	20	28	60
32	4	24	60
60	60	60	

$B=5L$

20	45	10	75
15	25	35	75
40	5	30	75
75	75	75	

$C=6L$

24	54	12	90
18	30	42	90
48	6	36	90
90	90	90	

$D=7L$

28	63	14	105
21	35	49	105
56	7	42	105
105	105	105	

$E=9L$

36	81	18	135
27	45	63	135
72	9	54	135
135	135	135	

$F=11L$

44	99	22	165
33	55	77	165
88	11	66	165
165	165	165	

$G=12L$

48	108	24	180
36	60	84	180
96	12	72	180
180	180	180	

圖 4.6.1

各個子陣幻和的 5 次方: $60^5+75^5+90^5+105^5+135^5+165^5=188956800000=180^5=188956800000$ 相等。

把 6 個子幻方幻和的 5 次方和計算出來, 圖 4.6.2 (左) , 再把 $(G_{ij})^5$ 計算出來。

$(A_{ij})^5+(B_{ij})^5+(C_{ij})^5+(D_{ij})^5+(E_{ij})^5+(F_{ij})^5$

254803968	14693280768	7962624
60466176	777600000	4182119424
8153726976	248832	1934917632

$(G_{ij})^5$

254803968	14693280768	7962624
60466176	777600000	4182119424
8153726976	248832	1934917632

圖 4.6.2: 兩個方陣的結果相同

4.7. 用 4 階幻方爲基圖擴大倍數得到勾股弦幻方組的嘗試

前面所講述的是用 3 階幻方爲「基圖」, 乘以勾股數組使得滿足勾股幻方的方法, 下面我們用 4 階幻方來探討這個問題:

我們把圖 4.7.1 的 4 階幻方稱爲 L 陣, 用 4 階幻方代替原來的 3 階幻方。其他步驟同前。

L

1	12	7	14	34
15	6	9	4	34
10	3	16	5	34
8	13	2	11	34
34	34	34	34	

圖 4.7.1:

用 $A=3$, $B=4$, $C=5$ 的勾股數組分別乘以圖 4.7.1 的 4 階幻方 L, 得到另外 3 個 4 階幻方, 圖 4.7.2

$A=3L$

3	36	21	42	102
45	18	27	12	102
30	9	48	15	102
24	39	6	33	102
102	102	102	102	

$B=4L$

4	48	28	56	136
60	24	36	16	136
40	12	64	20	136
32	52	8	44	136
136	136	136	136	

$C=5L$

5	60	35	70	170
75	30	45	20	170
50	15	80	25	170
40	65	10	55	170
170	170	170	170	

圖 4.7.2:

經計算知: $(A_{ij})^2+(B_{ij})^2=(C_{ij})^2$, 即: $102^2+136^2=170^2=28900$。
我們把 $(A_{ij})^2+(B_{ij})^2$ 計算出來, 圖 4.7.3 (左); 再把 $(C_{ij})^2$ 計算出來, 圖 4.7.3 (右)。

$(A_{ij})^2+(B_{ij})^2$

25	3600	1225	4900
5625	900	2025	400
2500	225	6400	625
1600	4225	100	3025

$(C_{ij})^2$

25	3600	1225	4900
5625	900	2025	400
2500	225	6400	625
1600	4225	100	3025

圖 4.7.3: 兩個方陣的結果相同

由此, 可以猜想用任意相同奇數的幻方作基圖, 都可以得到勾股弦幻方組。

4.8. 用 4 階幻方構造 7 元 5 次方勾股弦幻方組 (6:1 型)

$A^5+B^5+C^5+D^5+E^5+F^5=G^5$ 用 $A=4$, $B=5$, $C=6$, $D=7$, $E=9$, $F=11$, $G=12$ 的勾股數組分別乘以圖 4.8.1 的 4 階幻方 L, 得到另外 7 個 4 階幻方, 圖 4.8.1

$A=4L$

4	48	28	56	136
60	24	36	16	136
40	12	64	20	136
32	52	8	44	136
136	136	136	136	

$B=5L$

5	60	35	70	170
75	30	45	20	170
50	15	80	25	170
40	65	10	55	170
170	170	170	170	

$C=6L$

6	72	42	84	204
90	36	54	24	204
60	18	96	30	204
48	78	12	66	204
204	204	204	204	

$D=7L$

7	84	49	98	238
105	42	63	28	238
70	21	112	35	238
56	91	14	77	238
238	238	238	238	

$E=9L$

9	108	63	126	306
135	54	81	36	306
90	27	144	45	306
72	117	18	99	306
306	306	306	306	

$F=11L$

11	132	77	154	374
165	66	99	44	374
110	33	176	55	374
88	143	22	121	374
374	374	374	374	

$G=12L$

12	144	84	168	408
180	72	108	48	408
120	36	192	60	408
96	156	24	132	408
408	408	408	408	

圖 4.8.1

經過計算知: A、B、C、D、E、F, 這 6 個幻方幻和的 5 次方和等於幻方 G 的 5 次方和。

即: $136^5+170^5+204^5+238^5+306^5+374^5=408^5=11305787424768$。

我們把 $(A_{ij})^5+(B_{ij})^5+(C_{ij})^5+(D_{ij})^5+(E_{ij})^5+(F_{ij})^5$ 計算出來, 圖 4.8.2 (左) ; 再把 $(G_{ij})^5$ 計算出來, 圖 4.8.2 (右) ,

$(A_{ij})^5+(B_{ij})^5+(C_{ij})^5+(D_{ij})^5+(E_{ij})^5+(F_{ij})^5$

248832	61917364224	4182119424	133827821568
188956803072	1934917632	14693280768	254803968
24883200000	60466176	260919263232	777600000
8153726976	92389580800	7962624	40074641408

$(G_{ij})^5$

248832	61917364224	4182119424	133827821568
188956803072	1934917632	14693280768	254803968
24883200000	60466176	260919263232	777600000
8153726976	92389580800	7962624	40074641408

圖 4.8.2: 兩個方陣的結果相同

五、用 LL 法構造的勾股弦幻方組

用上述兩種方法得到的勾股弦幻方組, 各自的特點是:「R 法」是幻和相同, 幻方階數不相同;「EE 法」是幻方的階數相同, 而幻和不相同。

我們另闢蹊徑, 用「幻方的幻和不相同, 幻方的階數也不相同」的方法得到勾股弦幻方組, 稱爲「LL 法」。

定義 1: 由自然數 A, B, C 構成的數組, 並且滿足方程:

$$A^2+B^2=C^2$$

則稱 A、B、C爲勾股弦數組。

定義 2: 如果勾股弦數組的三個元素兩兩互素 (即他們沒有公約數), 稱爲「本原勾股弦數組」。

如果將一個本原勾股弦數組的各個元素同時乘以一個相同的數, 得到的有公約數的新勾股弦數組, 則稱爲「倍數勾股弦數組」。

勾股弦數組是一個古老的數學問題, 勾股弦數組在測量和計算等方面有廣泛的應用, 勾股弦數組的實際應用, 導致了無理數的重大發現[2]。爲紀念勾股弦數組之功績, 我們用 20 個字來頌其功績:

奇妙勾股弦, 天下廣流傳, 成就冠寰宇, 萬古流芳遠!

5.1. 勾 3、股 4、弦 5 幻方組

本文介紹以勾、股、弦數組爲階次的三個幻方。這三個幻方的階次是勾股弦數組, 並且他們的幻和也是勾股弦數組。

定義: 如果由 $A^2+B^2+C^2$ 個自然數構成的 A 階、B 階與 C 階幻方, 它們的幻和分別記作 S_A, S_B, S_C。如果 A、B、C 是勾股弦數組, 即 $A^2+B^2=C^2$。並且滿足:

$$S_A^2+S_B^2=S_C^2$$

則稱這 3 個幻方爲「勾股弦幻方組」。

圖 5.1.1 是一個勾股弦幻方組。

22	52	10
16	28	40
46	4	34

A

2	50	48	12
42	18	20	32
24	36	38	14
44	8	6	54

B

7	23	64	15	31
60	11	37	3	29
33	9	25	56	17
21	62	13	39	5
19	35	1	27	58

C

圖 5.1.1

上圖 A、B、C 三個幻方是一組「勾股弦幻方組」, 其「幻和」分別爲 $S_3=84$, $S_4=112$, $S_5=140$。它們的階次 3、4、5 是一個勾股弦數組; 它們幻和的平方和是:

$$84^2+112^2=140^2,$$

即: $7056+12544=19600$, 也是一個勾股弦數組。所以 A、B、C 是勾股弦幻方組。

其中:

(1) 3 階幻方與 4 階幻方具有雪花幻方的性質。

(2) 5 階幻方都具有全對稱幻方的性質。即每行、每列及各條對角線 (包括折斷對角線) 上的 n 個元素之和都等於定值。

(3) 3 階幻方與 4 階幻方全部由偶數所組成。

(4) 在 5 階幻方中僅僅使用了 56、58、60、62、64, 五個偶數, 其餘全部是奇數。

對於勾股弦幻方組, 我們得到下面的結果:

1. 不存在由連續自然數構成的「本原勾股弦幻方組」;
2. 存在由連續自然數構成的「倍數勾股弦數組 (A、B、C 爲本原數組的偶數倍)」階次的幻方。

5.2. 倍數勾股弦數組 勾 6、股 8、弦 10 幻方組

下面我們給出由連續自然數 1, 2, ..., 200 構作的 $A=6$, $B=8$, $C=10$ 的勾股弦幻方組 (圖 5.2.1, 圖 5.2.2, 圖 5.2.3)。其中 A 是一個分層幻方, 內心 (粗實線所圍的) 是一個 4 階全對稱幻方, 整體是一個 6 階幻方。C 也是一個分層幻方, 內心 (粗實線所圍的虛線部分) 的 8×8 方陣與 B 陣是一對「8 階同值平方幻方」。

1	10	198	196	194	4
199	11	189	14	188	2
192	186	16	183	17	9
6	187	13	190	12	195
8	18	184	15	185	193
197	191	3	5	7	200

圖 5.2.1: A, $S_6=603$, $S_4=402$

52	122	160	70	145	91	61	103
37	127	153	83	136	94	60	114
90	148	102	64	123	49	71	157
95	133	115	57	126	40	82	156
120	46	76	162	85	143	105	67
129	43	77	151	100	138	112	54
142	88	66	108	47	117	163	73
139	97	55	109	42	132	150	80

圖 5.2.2: B, $S_8=804$, $S_8^2=91724$

19	28	180	178	176	29	36	170	167	22
181	98	140	110	56	131	41	79	149	20
174	87	141	107	65	118	48	74	164	27
24	44	130	152	78	137	99	53	111	177
26	45	119	161	75	144	86	68	106	175
171	134	96	58	116	39	125	155	81	30
166	147	89	63	101	50	124	158	72	35
32	128	38	84	154	93	135	113	59	169
33	121	51	69	159	92	146	104	62	168
179	173	21	23	25	172	165	31	34	182

圖 5.2.3: $S_{10}=1005$; $S_8=804$, $S_8^2=91724$

$6^2+8^2=10^2, \quad 603^2+804^2=1005^2.$

對於勾股弦幻方組 Z 陣元素的選擇, 有很多種方法, 請讀者自己發掘。如果找到新的 Z 陣元素, 構造出新的勾股弦幻方組, 將使您忘記疲勞和煩惱, 而帶來無窮的樂趣!

5.3. 勾股弦數組的拓廣 A_3、B_4、C_5、D_6 幻方組

在洛書中, 有一組勾股弦數組, 即 $3^2+4^2=5^2$。我們把他稱爲 3 元數組, 因爲該數組共有 3 個元素。

另有 3 次冪和相等的 4 元數組, 即: $3^3+4^3+5^3=6^3$。我們稱爲「拓廣勾股弦數組」。

下面我們討論 4 元幻方組。

圖 5.3.1: 是 $A=3$、$B=4$、$C=5$、$D=6$ 的拓廣勾股弦幻方組。

49	99	2
3	50	97
98	1	51

$A, S_3=150$

4	95	94	7
92	9	10	89
11	90	91	8
93	6	5	96

$B, S_4=200$

27	53	76	37	57
74	35	60	25	56
58	28	54	72	38
52	75	36	61	26
39	59	24	55	73

$C, S_5=250$

12	13	23	83	84	85
34	**19**	**80**	**79**	**22**	66
86	**70**	**31**	**32**	**67**	14
82	**33**	**68**	**69**	**30**	18
71	**78**	**21**	**20**	**81**	29
15	87	77	17	16	88

$D, S_6=300$ (中心 $S_4=200$)

圖 5.3.1

各個幻方幻和的3次方之和, 即 $150^3+200^3+250^3=300^3=27000000$。

我們可以造出由連續自然數 1∼344 組成的 6、8、10、12 階幻方組 (圖 5.3.2, A, B, C, D) 。

1	10	342	340	338	4
6	**11**	**333**	**332**	**14**	339
8	**330**	**16**	**17**	**327**	337
343	**18**	**328**	**329**	**15**	2
336	**331**	**13**	**12**	**334**	9
341	335	3	5	7	344

圖 5.3.2: A, $S_6=1035$, 中心部分 $S_4=690$

52	266	304	70	289	91	61	247
37	271	297	83	280	94	60	258
90	292	246	64	267	49	71	301
95	277	259	57	270	40	82	300
264	46	76	306	85	287	249	67
273	43	77	295	100	282	256	54
286	88	66	252	47	261	307	73
283	97	55	253	42	276	294	80

圖 5.3.2: B, $S_8 = 1380$, $S_8^2 = 327308$

19	28	324	322	320	314	311	29	36	22
24	98	284	254	56	275	41	79	293	321
26	87	285	251	65	262	48	74	308	319
30	44	274	296	78	281	99	53	255	315
35	45	263	305	75	288	86	68	250	310
312	278	96	58	260	39	269	299	81	33
313	291	89	63	245	50	268	302	72	32
325	272	38	84	298	93	279	257	59	20
318	265	51	69	303	92	290	248	62	27
323	317	21	23	25	31	34	316	309	326

圖 5.3.2: C, $S_{10} = 1725$

123	113	171	165	194	244	172	105	190	187	236	170
242	168	206	205	131	133	102	224	195	184	145	135
178	234	233	153	220	183	136	185	115	107	138	188
119	146	202	118	117	179	213	208	156	229	152	231
186	191	149	106	120	141	221	142	235	216	215	148
176	217	108	134	163	122	164	201	127	198	219	241
169	128	237	211	182	223	181	144	218	147	126	104
159	154	196	239	225	204	124	203	110	129	130	197
226	199	143	227	228	166	132	137	189	116	193	114
167	111	112	192	125	162	209	160	230	238	207	157
103	177	139	140	214	212	243	121	150	161	200	210
222	232	174	180	151	101	173	240	155	158	109	175

圖 5.3.2: D, $S_{12} = 2070$, $S_{12}^2 = 77810$, $S_{12}^3 = 72325800$

圖 5.3.2, C 的中心部分 (粗實線所圍的) 是一個 8 階幻方平方幻方, 其 1 次、2 次幻和與圖 5.3.2 B 相同, 並且這兩個幻方的每行上 16 個元素的 $S_{16} = 2760$, $S_{16}^2 = 654616$; $S_{16}^3 = 174509280$。對於這類幻方, 我們稱爲「同值平方幻方」。

真是: 同值幻方妙趣無窮, 幻和相等模樣相同, 數理蘊藏左右對稱, 誰大誰小難分伯仲。

圖 5.3.2. D 的幻方由連續自然數 101∼244 構成。其兩條對角線上的 $S_{12}^4 = 14389435574$。

各個幻方幻和的3次方之和, 即 $1035^3 + 1380^3 + 1725^3 = 2070^3 = 8,869,743,000$。

六、構造勾股弦幻方組的三種方法大薈萃

截止目前, 有 3 種方法可以造出勾股弦幻方組。李學數提議構造一組勾股弦幻方組 — 使他們的幻和等於 2016, 或者與 2016 有關聯以示紀念。這三個方法都可以造出其幻和等於 2016 的年份, 倘若錯過 2016 這個年份, 必須再等 12 年才能符合這個條件。12 年, 對於年輕朋友來說, 只是瞬間而已, 但對於我們來說, 是非常漫長和艱辛的, 甚至是不可能的。但我們渴望在有生之年再造幾次與年份有關的勾股弦幻方組 ......。

第一種方法, R 法: 下面是用第一種 R 法, 造出幻和等於 2016 的 3 個幻方, 圖 6.1

$A = 3$

671	676	669	2016
670	672	674	2016
675	668	673	2016
2016	2016	2016	

$B = 4$

496	511	510	499	2016
508	501	502	505	2016
503	506	507	500	2016
509	498	497	512	2016
2016	2016	2016	2016	

$C = 5$

114	132	1506	123	141	2016
1504	121	144	112	135	2016
142	115	133	1502	124	2016
131	1505	122	145	113	2016
125	143	111	134	1503	2016
2016	2016	2016	2016	2016	

圖 6.1

驗算: $6048^2 + 8064^2 = 10080^2 = 36578304 + 65028096 = 101606400$。

第二種方法: 下面是用 EE 法, 構造 3 個 5 階幻方, 圖 6.2, 使他們的幻和之和等於 2016 的 (把原來 3 階或 4 階拓廣到 5 階)。用 3 個 5 階幻方分別滿足勾股弦幻方組。

$S_A = 168 \times 3$

4	32	404	18	46	504
402	16	49	2	35	504
47	5	33	400	19	504
31	403	17	50	3	504
20	48	1	34	401	504
504	504	504	504	504	

$S_B = 168 \times 4$

9	37	552	23	51	672
550	21	54	7	40	672
52	10	38	548	24	672
36	551	22	55	8	672
25	53	6	39	549	672
672	672	672	672	672	

$S_C = 168 \times 5$

14	42	700	28	56	840
698	26	59	12	45	840
57	15	43	696	29	840
41	699	27	60	13	840
30	58	11	44	697	840
840	840	840	840	840	

圖 6.2

上面 3 個幻方的幻和分別用 S_A, S_B, S_C 來表示, 他的幻和之和 $= S_A + S_B + S_C$

即: $504 + 672 + 840 = 2016$。

這 3 個 5 階幻方的平方和滿足勾股弦幻方組的關係:

$$S_A^2 + S_B^2 = S_C^2,\ \text{即}\ 504^2 + 672^2 = 840^2 = 254016 + 451584 = 705600,$$

3 個子幻方的 25 個元素之和分別等於 $504 \times 5 = 2520$, $672 \times 5 = 3360$, $840 \times 5 = 4200$, 他們也滿足勾股弦數組的性質, 即:

$$2520^2 + 3360^2 = 4200^2 = 6350400 + 11289600 = 17640000.$$

第三種方法: LL 法

在富蘭克林誕辰 310 周年 (1706～2016) 之際, 李學數教授提議設計一個「紀念富蘭克林誕辰 310 周年幻方」, 來紀念這位身兼多職的著名科學家, 待刊。

富蘭克林幻方是迄今爲止奇妙性質最多的幻方,《有趣的數論》一書 (潘承彪譯, 北大出版社出版) 稱爲「最神奇的幻方」而享譽國際, 開「曲線幻方」研究之先河, 深受幻方愛好者所崇敬。

在這裏, 我們用 LL 法設計一組 (3 個) 幻方其幻和之和等於 2112 的勾股弦幻方組來等待「勾股弦幻方組」三種構造方法 96 周年的到來, 2112 是一個回文數, 頗有意義。3 個幻方如下圖 6.3 之 A、B、C:

$A =$

			528
175	351	2	528
3	176	349	528
350	1	177	528
528	528	528	528

$B =$

				704
4	347	346	7	704
344	9	10	341	704
11	342	343	8	704
345	6	5	348	704
704	704	704	704	704

$C =$

					880
15	23	796	19	27	880
794	17	30	13	26	880
28	16	24	792	20	880
22	795	18	31	14	880
21	29	12	25	793	880
880	880	880	880	880	880

圖 6.3

在上面 3 個幻方中, $528 + 704 + 880 = 2112$.

幻方的階數: $3^2 + 4^2 = 5^2 = 25$;

幻和的平方和: $S_A^2 + S_B^2 = S_C^2$ 即:

$$528^2 + 704^2 = 880^2 = 278784 + 495616 = 774400.$$

七、結語

勾股弦幻方組的問世給幻方家族增添了新成員, 增加了活力, 豐富了幻方的研究內容。在構造勾股弦幻方組中, 我們應用了多種方法 [7, 8, 9, 10], 例如: 洛書法、方陣定位法、直接書寫法、分層法、平方幻方法、同值平方幻方法等。有興趣的讀者不妨解剖一下各個幻方, 希望得到更好的結果。此文僅僅是引玉之磚, 但願經過幻友的努力增加更多的新品種, 例如勾股弦幻圓、勾股弦幻立方體、勾股弦幻球, 等等。

幻方遠景展望

俗話說: 人生不滿百, 常懷千歲憂。

到了 2112 年, 要想造出新幻方, 就更加輕鬆。由現在的「舉手」之勞, 就變成了「開口」之勞, 只要對電腦「說」出要求, 一切由「高智能電腦」來完成, 哪裡還用得著「撥打算盤珠子呢!」

不過, 即便是到了 3000 年, 也有電腦難以解決的幻方問題。就現在的電腦而言, 僅僅是解決了「$k=1$、2 次冪和幻方」的構造問題。也有人用電腦搜索的方法得到了連作者自己也「不會構造」的高次冪和幻方。對於 $k>20$ 的冪和幻方尚未出現。即便解決了 $k>20$、$k>10000$ 的冪和幻方問題, 那在數字海洋裏也不過是滄海一粟而已。並且, 目前的電腦對於雙重幻方尚無能爲力, 如果給雙重幻方再加上一個冪和幻方的條件 — 即:「k 次冪和積幻方」($k=1,2,3\ldots$) , 更是「太平洋裏撈針」了。

這就是幻方研究能歷經幾千年而長興不衰的魅力, 並且是一個永無止境的課題!

参考資料

1. Royal Vale Heath, *Mathemagic — Magic, Puzzles, Games with Numbers*, Dover, 1953.
2. Emanuel Emanouilidis, More magic squares, *Journal of Recreational Mathematics* 27 (3), 179-180, 1995.
3. Emanuel Emanouilidis, Construction of Pythagorean magic squares, *The Mathematical Gazette*, 89(514), 99-101, Mar. 2005.
4. *Sherlock Holmes in Babylon*, Edited by Marlow Anderson, Victor Katz, and Robin Wilson, Mathematical Association of America, 2004.
5. 梁宗巨。《世界數學史簡編》。遼寧人民出版社。1980。
6. 李學數。《數學與數學家的故事》。上海科技出版社。2015。
7. 梁彩麗、梁培基。偶數階幻方的快速構作。數學傳播季刊, 20(4), 88-92, 1996。
8. 梁培基、張航輔、張俠輔。幻方的一種構作方法。昆明《雲南大學學報》。1989 年四期。
9. 梁培基、顧同新。平方幻方與雙重幻方的構造。數學傳播季刊, 13(3), 65-69, 1989。
10. 梁培基。優化幻方的構作。數學傳播季刊, 40(3), 65-77, 2016。

—本文作者梁培基任職中國河南省封丘縣科協, 李學數爲美國聖荷西大學退休榮譽教授—