數學傳播　42卷3期, pp. 66-73

Fibonacci 與 Padovan 的對話 (下): F−P卷積恆等式

陳建燁

壹、前言

在「Fibonacci 與 Padovan 的對話 (上)」一文中, 有 $F_n = h_{n-1}(\alpha,\beta)$ 與 $P_n = h_{n+2}(a,b,c)$, 亦即可將 Fibonacci 數列和 Padovan 數列視爲完全齊次對稱多項式的特殊情形, 於是有可能運用完全齊次對稱多項式的已知性質, 來得到 Fibonacci 數列和 Padovan 數列的性質。

兩數列 $\langle a_n\rangle$ 和 $\langle b_n\rangle$ 的「卷積」(convolution) 形如 $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\cdot b_{n-i}$, 亦即兩數列對應項相乘再相加, 保持下標總和爲 n。在「完全齊次對稱多項式 (起)」(參考資料 [1]) 一文中, 有「自由分解重組恆等式」, 其中的

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdot+k_m=k\\ k_1,k_2,\ldots,k_m\geq 0}}[h_{k_1}(a_1,a_2,\ldots,a_{i_1})\cdot h_{k_2}(a_{i_1+1},a_{i_1+2},\ldots,a_{i_2})\cdots h_{k_m}(a_{i_{m-1}+1},a_{i_{m-1}+2},\ldots,a_{i_m})]$$

是卷積的一種推廣形式, 參考資料 [1] 證明了可將此式的變數合併,「重組」成相對簡單的形式 $h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)$。

本文的目的在求出卷積 $\sum\limits_{i=0}^{n} F_i\cdot P_{n-i}$ 的表達式, 首先先將 F_n 與 P_n 改成完全齊次對稱多項式 $h_{n-1}(\alpha,\beta)$ 與 $h_{n+2}(a,b,c)$, 接著利用自由分解重組恆等式, 將 F_n 與 P_n 的卷積化成 $h_k(\alpha,\beta,a,b,c)$ 的型態, 運用代數變形, 得到初步結果:

$$\sum_{k=0}^{n} F_{k+1}\cdot P_{n-k-2} = F_{n+3} - P_{n+2}.$$

再經由下標的調整, 得到形式更爲對稱的結果:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i\cdot P_{n-i} = F_{n+3} - P_{n+3}.$$

。

貳、本文

一、定義、記號與已知公式

1. 自由分解重組恆等式: (參考資料 [1])

$$\begin{aligned}&h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)\\ &=\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdot+k_m=k\\ k_1,k_2,\ldots,k_m\geq 0}}[h_{k_1}(a_1,a_2,\ldots,a_{i_1})\cdot h_{k_2}(a_{i_1+1},a_{i_1+2},\ldots,a_{i_2})\cdots h_{k_m}(a_{i_{m-1}+1},a_{i_{m-1}+2},\ldots,a_{i_m})]\end{aligned}$$

其中 $a_{i_m}=a_n$。(其中將變數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 分成 m 組, 第一組為 $a_1,a_2,\ldots,a_{i_1}$, 第二組為 $a_{i_1+1},a_{i_1+2},\ldots,a_{i_2}$, $\ldots$, 第 m 組為 $a_{i_{m-1}+1},a_{i_{m-1}+2},\ldots,a_{i_m}$)

例:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i+j=2\\ i,j\geq 0}}h_i(a,b)\cdot h_j(c,d)&=h_2(a,b)\cdot h_0(c,d)+h_1(a,b)\cdot h_1(c,d)+h_0(a,b)\cdot h_2(c,d)\\ &=(a^2+ab+b^2)\cdot 1+(a+b)(c+d)+1\cdot(c^2+cd+d^2)\\ &=a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd\\ &=h_2(a,b,c,d)\end{aligned}$$

說明: 此式將下標總和為 2 的各個完全齊次對稱多項式先相乘再相加, 所得的式子為 $h_2(a,b,c,d)$, 將變數 a,b 與 c,d 合併在一起。

例:

$$\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geq 0}}h_i(a_1,a_2)\cdot h_j(a_3,a_4,a_5)=h_n(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$$

取 $a_1=\alpha$, $a_2=\beta$, $a_3=a$, $a_4=b$, $a_5=c$, 得

$$h_n(\alpha,\beta,a,b,c)=\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geq 0}}h_i(\alpha,\beta)\cdot h_j(a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}h_i(\alpha,\beta)\cdot h_{n-i}(a,b,c).$$

2. $\boldsymbol{h-L}$ 轉換公式: $h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=L_{k+n-1}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ (參考資料 [2])

例: 當 $n=5$ 時, 得 $h_k(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=L_{k+4}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$,

取 $a_1=\alpha$, $a_2=\beta$, $a_3=a$, $a_4=b$, $a_5=c$, 得 $h_k(\alpha,\beta,a,b,c)=L_{k+4}(\alpha,\beta,a,b,c)$ 。

二、主要工作

(一) F−P 卷積恆等式: $\sum\limits_{k=0}^{n}F_{k+1}\cdot P_{n-k-2}=F_{n+3}-P_{n+2}$

設 $x^2-x-1=0$ 的兩根爲 α 與 β, 且 $x^3-x-1=0$ 的三根爲 a,b,c。

1.
$$\sum_{k=0}^{n} F_{k+1}\cdot P_{n-k-2}=\sum_{k=0}^{n} h_k(\alpha,\beta)\cdot h_{n-k}(a,b,c)=h_n(\alpha,\beta,a,b,c)$$
(自由分解重組恆等式, 參見本篇文章第 67 頁)

2. $h_n(\alpha,\beta,a,b,c)$
$$\begin{aligned}
&= L_{n+4}(\alpha,\beta,a,b,c) \quad (\text{由 } h-L \text{ 轉換公式, 參見本篇文章第 67 頁})\\
&= \frac{\alpha^{n+4}}{(\alpha-\beta)(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)}+\frac{\beta^{n+4}}{(\beta-\alpha)(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)}\\
&\quad +\frac{a^{n+4}}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+4}}{(b-\alpha)(b-\beta)(b-a)(b-c)}\\
&\quad +\frac{c^{n+4}}{(c-\alpha)(c-\beta)(c-a)(c-b)}
\end{aligned}$$

3. $L_{n+4}(\alpha,\beta,a,b,c)$ 的前兩項之和:
$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^{n+4}}{(\alpha-\beta)(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)}+\frac{\beta^{n+4}}{(\beta-\alpha)(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)}\\
&= \frac{\alpha^{n+4}}{(\alpha-\beta)(\alpha^3-\alpha-1)}+\frac{\beta^{n+4}}{(\beta-\alpha)(\beta^3-\beta-1)} \qquad (\text{註}1)\\
&= \frac{\alpha^{n+4}}{(\alpha-\beta)\cdot\alpha}+\frac{\beta^{n+4}}{(\beta-\alpha)\cdot\beta} \qquad (\text{註}2)\\
&= \frac{\alpha^{n+3}}{\alpha-\beta}+\frac{\beta^{n+3}}{\beta-\alpha}\\
&= \frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{\alpha-\beta}\\
&= F_{n+3}
\end{aligned}$$

註1: $\because x^3-x-1=(x-a)(x-b)(x-c)\Rightarrow(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)=\alpha^3-\alpha-1$。

同理, 有 $(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)=\beta^3-\beta-1$。

註2: $\because x^2-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)\Rightarrow\alpha^2-\alpha-1=0\Rightarrow\alpha^2=\alpha+1\Rightarrow\alpha^3=\alpha^2+\alpha=(\alpha+1)+\alpha=2\alpha+1\Rightarrow\alpha^3-\alpha-1=(2\alpha+1)-\alpha-1=\alpha$。

4.

$$\begin{aligned}
\frac{a^{n+4}}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-b)(a-c)} &= \frac{a^{n+4}}{(a^2-a-1)(a-b)(a-c)} && (\text{註1})\\
&= \frac{a^{n+4}}{a^2(1-a)(a-b)(a-c)} && (\text{註2})\\
&= \frac{a^{n+2}}{(1-a)(a-b)(a-c)}\\
&= -\frac{1}{a-1}\cdot\frac{a^{n+2}}{(a-b)(a-c)}\\
&= -(a+1+\frac{1}{a})\cdot\frac{a^{n+2}}{(a-b)(a-c)} && (\text{註3})\\
&= -\frac{a^{n+3}+a^{n+2}+a^{n+1}}{(a-b)(a-c)}
\end{aligned}$$

同理可證 $\dfrac{b^{n+4}}{(b-\alpha)(b-\beta)(b-a)(b-c)} = -\dfrac{b^{n+3}+b^{n+2}+b^{n+1}}{(b-a)(b-c)}$

與 $\dfrac{c^{n+4}}{(c-\alpha)(c-\beta)(c-a)(c-b)} = -\dfrac{c^{n+3}+c^{n+2}+c^{n+1}}{(c-a)(c-b)}$

註1: $\because\ x^2-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)\Rightarrow(a-\alpha)(a-\beta)=a^2-a-1.$

註2: $\because\ x^3-x-1=(x-a)(x-b)(x-c)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a^3-a-1=0\\
&\Rightarrow -a-1=-a^3\\
&\Rightarrow a^2-a-1=a^2-a^3=a^2(1-a).
\end{aligned}$$

註3: $\because\ x^3-x-1=(x-a)(x-b)(x-c)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a^3-a-1=0\\
&\Rightarrow a^3-1=a\\
&\Rightarrow (a-1)(a^2+a+1)=a\\
&\Rightarrow \frac{1}{a-1}=\frac{a^2+a+1}{a}=a+1+\frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

5. 由 4, L_{n+4} 的後三項之和:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^{n+4}}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+4}}{(b-\alpha)(b-\beta)(b-a)(b-c)}\\
&\quad+\frac{c^{n+4}}{(c-\alpha)(c-\beta)(c-a)(c-b)}\\
&=-\frac{a^{n+3}+a^{n+2}+a^{n+1}}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^{n+3}+b^{n+2}+b^{n+1}}{(b-a)(b-c)}-\frac{c^{n+3}+c^{n+2}+c^{n+1}}{(c-a)(c-b)}\\
&=-\left[\frac{a^{n+3}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+3}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n+3}}{(c-a)(c-b)}\right]\\
&\quad-\left[\frac{a^{n+2}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+2}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n+2}}{(c-a)(c-b)}\right]\\
&\quad-\left[\frac{a^{n+1}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+1}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n+1}}{(c-a)(c-b)}\right]\\
&=-L_{n+3}(a,b,c)-L_{n+2}(a,b,c)-L_{n+1}(a,b,c)\\
&=-h_{n+1}(a,b,c)-h_{n}(a,b,c)-h_{n-1}(a,b,c) \qquad (\text{用 } h-L \text{ 轉換公式})\\
&=-(P_{n-1}+P_{n-2}+P_{n-3})\\
&=-(P_{n}+P_{n-1})\\
&=-P_{n+2}
\end{aligned}$$

6. 由 1, 2, 3, 4, 5, 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}F_{k+1}\cdot P_{n-k-2}=h_n(\alpha,\beta,a,b,c)\\
&=\frac{\alpha^{n+4}}{(\alpha-\beta)(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)}+\frac{\beta^{n+4}}{(\beta-\alpha)(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)}\\
&\quad+\frac{a^{n+4}}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+4}}{(b-\alpha)(b-\beta)(b-a)(b-c)}\\
&\quad+\frac{c^{n+4}}{(c-\alpha)(c-\beta)(c-a)(c-b)}\\
&=F_{n+3}-P_{n+2}
\end{aligned}$$

所以有

$$\sum_{k=0}^{n}F_{k+1}\cdot P_{n-k-2}=F_{n+3}-P_{n+2} \tag{1}$$

至此, 已將 Fibonacci 數列與 Padovan 數列的卷積, 用兩數列相減來表示。

(二) 更進一步的結果: $\sum_{i=0}^{n} F_i \cdot P_{n-i} = F_{n+3} - P_{n+3}$

就 $\sum_{k=0}^{n} F_{k+1} \cdot P_{n-k-2} = F_{n+3} - P_{n+2}$ 而言, 形式已算簡潔, 但仍有可以改進的空間:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} F_{k+1} \cdot P_{n-k-2} &= \sum_{k+1=1}^{n+1} F_{k+1} \cdot P_{n-1-(k+1)} \\
&= \sum_{k+1=0}^{n+1} F_{k+1} \cdot P_{n-1-(k+1)} \qquad (\because\ F_0 = F_2 - F_1 = 1 - 1 = 0) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} F_i \cdot P_{n-1-i} \qquad (\text{令 } k+1 = i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} F_i \cdot P_{(n-1)-i} + F_n \cdot P_{(n-1)-n} + F_{n+1} \cdot P_{(n-1)-(n+1)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} F_i \cdot P_{(n-1)-i} + F_n \cdot P_{-1} + F_{n+1} \cdot P_{-2} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} F_i \cdot P_{(n-1)-i} + F_{n+1} \qquad (\because\ P_{-1} = 0 \text{ 且 } P_{-2} = 1)
\end{aligned}
$$

由

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} F_{k+1} \cdot P_{n-k-2} = F_{n+3} - P_{n+2} \\
\Rightarrow &\sum_{i=0}^{n-1} F_i \cdot P_{(n-1)-i} + F_{n+1} = F_{n+3} - P_{n+2} \\
\Rightarrow &\sum_{i=0}^{n-1} F_i \cdot P_{n-1-i} = F_{n+3} - P_{n+2} - F_{n+1} = F_{n+2} - P_{n+2}
\end{aligned}
$$

將 n 代換成 $n+1$, 得

$$
\sum_{i=0}^{(n+1)-1} F_i \cdot P_{(n+1)-1-i} = F_{(n+1)+2} - P_{(n+1)+2} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} F_i \cdot P_{n-i} = F_{n+3} - P_{n+3} \qquad (2)
$$

至此, 得到一個形式更對稱美觀的 $F-P$ 卷積恆等式。

三、相關文獻比較

在探索工作告一段落之後, 作相關文獻搜尋, 得知 Capponi, A., Farina, A., Pilotto, C.

在 Expressing stochastic filters via number sequences 一文 (參考資料 [3]) 中, 有如下的性質:

令 $\gamma_n = d_{n-3} + \sum\limits_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0, i\neq\{0,1\}}} f_{i-3}\cdot d_j$, 其中 d_n 代表 Padovan 數列, 則有 $\gamma_n = f_n$。

以本文的記號而言, 此結果相當於

$$F_n = P_{n-3} + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0, i\neq\{0,1\}}} F_{i-3}\cdot P_j \tag{3}$$

也呈現了 F$-$P 卷積的一種表達式。

那麼, 式子 (3) 和本文所得的式子 (2) 的關係爲何?

筆者對 (3) 式研究如下:

$$\begin{aligned}
\text{由}\quad & F_n = P_{n-3} + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0, i\neq\{0,1\}}} F_{i-3}\cdot P_j \\
\Rightarrow\ & F_n = P_n - P_{n-2} + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0, i\neq\{0,1\}}} F_{i-3}\cdot P_j \quad (\because\ P_n = P_{n-2}+P_{n-3}) \\
\Rightarrow\ & F_n = P_n - P_{n-2} + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0, i\neq\{0,1,2\}}} F_{i-3}\cdot P_j + F_{-1}\cdot P_{n-2} \quad (\text{最右項爲 } i=2, j=n-2) \\
\Rightarrow\ & F_n = P_n + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0, i\neq\{0,1,2\}}} F_{i-3}\cdot P_j \quad (\because\ F_{-1} = F_1 - F_0 = 1-0 = 1) \\
\Rightarrow\ & F_n - P_n = \sum_{\substack{(i-3)+j=n-3 \\ i-3\geq -3, j\geq 0, i-3\neq\{-3,-2,-1\}}} F_{i-3}\cdot P_j \\
\Rightarrow\ & F_n - P_n = \sum_{\substack{k+j=n-3 \\ k\geq -3, j\geq 0, k\neq\{-3,-2,-1\}}} F_k\cdot P_j = \sum_{\substack{k+j=n-3 \\ k\geq 0, j\geq 0}} F_k\cdot P_j \quad (\text{令 } i-3=k)
\end{aligned}$$

將 n 用 $n+3$ 代入, 得

$$F_{n+3} - P_{n+3} = \sum_{\substack{k+j=n \\ k\geq 0, j\geq 0}} F_k\cdot P_j = \sum_{k=0}^{n} F_k\cdot P_{n-k}$$

至此, 證明了 (3) 式其實和 (2) 式是等價的, 但就形式而言, (2) 式更爲對稱。

參、結語

文章題爲「Fibonacci 與 Padovan 的對話」, 對話所用的「語言」是「完全齊次對稱多項式」, 所得的結果爲 $\sum\limits_{i=0}^{n} F_i\cdot P_{n-i} = F_{n+3} - P_{n+3}$。相對地, 參考資料 [3] 所用的語言爲「生成

函數」, 所得的性質爲

$$F_n = P_{n-3} + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0, i\neq\{0,1\}}} F_{i-3}\cdot P_j.$$

在「Fibonacci 與 Padovan 的對話(上)(下)」這兩篇文章中, 筆者提出並證明了「F−P 卷積恆等式」: $\sum\limits_{i=0}^{n} F_i\cdot P_{n-i} = F_{n+3} - P_{n+3}$; 而在相關文獻比較中, 筆者證明了參考資料 [3] 的

$$F_n = P_{n-3} + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0, i\neq\{0,1\}}} F_{i-3}\cdot P_j.$$

可改寫爲本文的

$$\sum_{i=0}^{n} F_i\cdot P_{n-i} = F_{n+3} - P_{n+3}.$$

注意到

$$F_n = P_{n-3} + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0, i\neq\{0,1\}}} F_{i-3}\cdot P_j$$

之中的 $i\neq\{0,1\}$ 以及數列下標的 $i-3$, 在式子的形式與結構上, 都有可以改進之處, 筆者將之推進了一步。

最後, 就筆者的認知,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i\cdot P_{n-i} = F_{n+3} - P_{n+3}$$

此一恆等式的提出, 以及用「完全齊次對稱多項式」加以證明的手法, 皆爲本人的原創性結果, 尚祈讀者諸君不吝予以批評指教。

參考資料

1. 陳建燁。完全齊次對稱多項式(起): 自由分解重組恆等式。高中數學學科中心電子報第 113 期, 2016 年 8 月。
2. 陳建燁。推廣的 Vandermonde 行列式 (最右行升次型)。高中數學學科中心電子報第 114 期, p.6,11,12,14, 2016年9月。
3. Capponi, A., Farina, A., and Pilotto, C., Expressing stochastic filters via number sequences, *Singal Processing*, 90(7), 2124-2132, 2010.

—本文作者任教台北市立第一女子高級中學—