數學傳播 42卷3期, pp. 59-65

任兩數差都不在同一組的分組問題

張進安

先看一個假設性的科幻問題：

來訪的外星人傳送了 7 個容量足夠大的安全保管箱, 並通知另有 1000 顆編有序號的微型炸彈也會隨機陸續傳送到地球。這些炸彈一傳到地球就會啟動, 地球人必須在下一顆微型炸彈傳送到前, 將它放入某一個保管箱中。如果兩個不在保管箱中的炸彈都已啟動就會立刻引爆; 但是必須遵守一個嚴格的規則：『同一個保管箱中的任兩顆炸彈序號的差, 不能也在該保管箱中。』否則也會引爆所有的炸彈。如果這 1000 顆微型炸彈都能安全的投入保管箱, 他們才願意和聰明的地球人建立友好關係。

前幾顆炸彈的出現當然不是問題, 隨著每個箱中的炸彈愈多, 再投入的限制就愈多, 也許有人會想到二分法, 有計畫地先把後一半 501 到 1000 等 500 顆炸彈放入同一個保管箱, 因爲這 500 顆炸彈的序號差分別是 1 到 499, 所以分到同一箱是安全的, 所以第一箱就解決了一半的問題。但是前一半 1 到 500 再也不能投入第一箱了, 所以第一箱就必須封存起來。依此方法第二箱是 251 到 500, 第三箱是 126 到 250, $\cdots$ 愈到後面的箱子能裝的炸彈數量愈來愈少, 不用精算就覺得箱子不太夠, 我們必須想一個更有效的方法, 這時候能拯救地球的, 大概要靠數學家和電腦工程師了。

爲解決這個問題, 我們先訂一個初步的研究計畫：

> 把正整數從 1 到 m 依『同組中任兩數的差都不在該組』的規則逐一分入 n 組, 務必使 n 最小; 或固定 n 而使 m 達到最大, 這樣的 n 和 m 有什麼數學關係?

資訊工程的朋友可以把這個問題寫成電腦遊戲來讓多數人參與：

把編有 1, 2, 3 $\cdots$ 序號的球, 逐一投入也編有序號的盒子, 如果投入的球和該盒中已有的球序號差也在該盒中, 就算 game over。每當使用的盒數已投入最大的球數, 就算過了一關, 並出現下一個盒子, 得以繼續遊戲。

我們很容易分析前幾球：

1. 1 號球當然投入 1 號盒中, 可以記爲 $B_1=\{1\}$。

2. 因爲 $2-1=1$, 所以 2 號求不能投入 1 號盒中, 只能投入 2 號盒, 記爲 $B_1=\{1\}$, $B_2=\{2\}$。所以只有 1 個盒子時, 只能投入 1 個球, 這樣就算過了第一關。
3. 考慮 3 號球, 因爲 $3-1=2$, $3-2=1$, 無論投入 1 號盒或 2 號盒都不會 game over, 但對 4 號球的處理卻產生不同的影響。如果 $B_1=\{1,3\}$, $B_2=\{2\}$, 4 號球無論投入哪一盒都將 game over; 所以必須在 $B_1=\{1\}$, $B_2=\{2,3\}$ 的情況下, 4 號球才能投入 1 號盒, 而成爲 $B_1=\{1,4\}$, $B_2=\{2,3\}$。
4. 考慮 5 號球時, 因爲 $1+4=5$, $2+3=5$, 我們也將發現, 無論投入 1 號或 2 號盒, 遊戲都會 game over。所以 5 號球一定要投入 3 號盒, 且確定 2 個盒子最多只能投入 4 個球。

如果問 m 個球最少要用多少個盒子, 這顯然是多對一的函數, 表達起來不太明確; 就不如定義 $f(n)=$『n個盒子可以投入球數的上限』$=m$, 而且第 $n+1$ 盒的第一個球也確定就是第 $m+1$ 號球。稍有經驗的人大概也能估計到, $f(n)$ 應該是個幾何級數的函數。

從上面分析前 5 球的過程可以確定 $f(1)=1$, $f(2)=4$。當 $n=3$ 時經過多次嘗試操作, 至少有下列三種分組的方式:

- 甲 $B_1=\{1,4,7,10,13\}$, $B_2=\{2,3,11,12\}$, $B_3=\{5,6,8,9\}$ 。
- 乙 $B_1=\{1,4,10,13\}$, $B_2=\{2,3,7,11,12\}$, $B_3=\{5,6,8,9\}$ 。
- 丙 $B_1=\{1,4,10,13\}$, $B_2=\{2,3,11,12\}$, $B_3=\{5,6,7,8,9\}$ 。

無論哪一種分法, 都明顯表示 14 號球必須投入 B_4, 也就是說 $f(3)=13$ 似乎是成立的。

以下我們用高中生很熟悉的數學歸納法來建立 $f(n)$ 的函數:

已知: $f(1)=1$, $f(2)=4$, 設 $f(k)=m$

即 存在一種分組:

$$\begin{aligned} B_1&=\{1,\ldots\}\\ B_2&=\{2,\ldots\}\\ B_3&=\{5,\ldots\}\\ &\vdots\\ B_k&=\{k_1,k_2,k_3,\ldots\} \end{aligned}$$

且最大數 m 存在某 B_i 中。

對每一 $B_i=\{i_1,i_2,\ldots,i_t\}$ 中的任意兩數 x,y 必須確保 x 和 y 的差必不屬於 B_i

及對每一 B_i 必存在有 i_u, i_v 使得

$i_u+i_v=m+1$, 這才表示每一個盒子都不能再投入第 $m+1$ 球。

則當 $n = k+1$ 時,
令 $B'_{k+1} = \{m+1, m+2, \ldots, 2m, 2m+1\}$ 再將每一個 B_1 到 B_k 擴充爲 $B'_i = B_i \cup B''_i$,
其中 $B_i = \{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$,
$B''_i = \{i_1+2m+1, i_2+2m+1, \ldots, i_t+2m+1\}$
即將 $m+1$, $m+2$, $\ldots, 2m, 2m+1$ 全部投入第 $k+1$ 盒, 且對 $2m+2$ 到 $3m+1$ 的 x 號球, 投入 $x-(2m+1)$ 所在的那一盒, 或者說將原 B_i 除了原有的數之外每一個數均再加上 $(2m+1)$, 擴充爲兩倍, 所以這 $k+1$ 盒可以投入的最大數爲 $3m+1$。
即 $f(k+1) = 3m+1$。
以 $k=3$ 時的丙種解爲實例來說明：

$$\text{丙}\ B_1 = \{1, 4, 10, 13\},$$
$$B_2 = \{2, 3, 11, 12\},$$
$$B_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}。$$

則 $k=4$ 時, 因爲 $m=13$, 所以 $2m+1=27$, $3m+1=40$ 則

$$B_4 = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\}。$$
$$B_1 = \{1, 4, 10, 13, 28, 31, 37, 40\},$$
$$B_2 = \{2, 3, 11, 12, 29, 30, 38, 39\},$$
$$B_3 = \{5, 6, 7, 8, 9, 32, 33, 34, 35, 36\}。$$

現在我們必須檢查每一 B_i 中的任兩數差, 是否不在該集合中; 及每一 B_i 中是否必存在兩數和爲 $3m+2$。

1. 因爲 $B_{k+1} = \{m+1, m+2, \ldots, 2m, 2m+1\}$
   所以 $\forall\ x, y \in B_{k+1}$ 則 $1 \le |x-y| \le m$
   所以 $\forall\ x, y \in B_{k+1}$ 則 $|x-y| \notin B_{k+1}$
2. $\forall\ 1 \le i \le k$, 因爲 $B'_i = B_i \cup B''_i$
   $= \{i_1, i_2, \ldots, i_t\} \cup \{i_1+2m+1, i_2+2m+1, \ldots, i_t+2m+1\}$
   可以簡單的區分爲小數部分和大數部分
   所以自 B'_i 中任取 x, y, 只有三種情形：

   甲. x, y 都來自小數部分, 則 $|x-y| \notin B_i$ 已是 $n=k$ 時已檢驗過的條件, 且 $|x-y| \le m-1$, 所以 $|x-y| \notin B_{k+1}$。

   乙. x, y 都來自大數部分 , 則設 $x = i_d + 2m + 1$, $y = i_e + 2m + 1$
   則 $|x-y| = |i_d - i_e| \notin B_i$, 且 $|x-y| \le m-1$, 所以 $|x-y| \notin B''_i$。

   丙. 若 x 來自小數部分, y 來自大數部分, 設 $x = i_d$, $y = i_e + 2m + 1$

則 $|x-y|=y-x=2m+1\pm(i_d-i_e)$
若 $i_d<i_e$, 則 $|x-y|=2m+1+(i_e-i_d)$ 將與 (i_e-i_d) 同組 $\notin B_i$
若 $i_d>i_e$, 則 $1\le i_d-i_e\le m-1$
所以 $1-m\le i_e-i_d\le -1$
所以 $2m+1+(1-m)\le(2m+1+i_e)-i_d\le -1+2m+1$
所以 $m+2\le y-x\le 2m$
所以 $y-x\in B_{k+1}\notin B'_i$
所以 $\forall\, x,y\in B'_i$, 則 $|x-y|\notin B'_i$。

3. $\forall\ 1\le i\le k$ 任一 B'_i 中, 因爲 $B'_i=B_i\cup B''_i$, 則存在 $x,y\in B_i$ 使得 $x+y=m+1$。
所以存在 $x\in B_i$, $y\in B''_i$, 使得 $x+y=m+1+2m+1=3m+2$
且在 B_{k+1} 中, 明顯存在 $x=m+1$, $y=2m+1$ 使得 $x+y=3m+2$。

所以表示當 $n=k+1$ 時, 投球的上限是 $3m+1$, 根據數學歸納法原理, 我們得到一個遞推的函數關係：
$f(k+1)=3m+1=3f(k)+1$, 加上 $f(1)=1$, 可以整理出 $f(n)$ 的一般項公式

$$\begin{aligned}
f(n)&=3f(n-1)+1\\
&=3(3f(n-2)+1)+1\\
&=3^2f(n-2)+3+1\\
&=3^2(3f(n-3)+1)+3+1\\
&=3^3f(n-3)+3^2+3+1\\
&\ \vdots\\
&=3^{n-1}f(1)+3^{n-2}+\cdots+3^2+3+1\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}3^i\\
&=\frac{1}{2}(3^n-1)
\end{aligned}$$

到這裡, 我們可以對這個『任兩數差不在同一組』的問題, 得到一個初步的結論：

n 個盒子最多可以投入 $\dfrac{1}{2}(3^n-1)$ 個球, 且第 $n+1$ 盒的第一球爲 $\dfrac{1}{2}(3^n+1)$。

如果注意到 $f(4)=\dfrac{1}{2}(3^4-1)=40$, 即 4 個盒子最多可以投入 40 個球, 這恰和西元 1624 年法國數學家梅齊里亞克 (Claude Gaspard Bachet de Méziriac, 1581~1638) 提出四個砝碼就能秤出 1 到 40 磅等所有整數磅物品的問題相同, 四個砝碼上限秤 40 磅和分四群的上限 40, 除非問題同構, 否則不可能如此巧合。我們要做的只是如何找到或解釋他們

同構的理由罷了。梅齊里亞克的問題, 後來由英國數學家珀西 · 亞歷山大 · 麥克馬洪 (Percy Aiexander MacMahon, 1854～1929) 推廣到一般情形:『若允許天平兩邊放砝碼, 每一種砝碼只有一個, 則 1, 3, 9, 27, 81, ..., 3^n, ... 是最有效的砝碼組合。而對任意待測秤重量正整數 n, 只要將 n 表為三進制, 再將係數 2 以 $3-1$ 取代, 即為所需砝碼的唯一選擇, 但係數為負值時該砝碼與被秤物體同一邊。』[1]

這個結論顯示: 1 個砝碼只能秤 1 磅, 2 個砝碼最多能秤 $1+3=4$ 磅, 3 個砝碼最多能秤 $1+3+9=13$ 磅, 4 個砝碼最多能秤 $1+3+9+27=40$ 磅, n 個砝碼最多可秤 $1+3+9+27+\cdots+3^{n-1}=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$, 正和我們剛得到的公式完全一樣。

以三進位的砝碼組合, 也可用排列組合的方法來證明。每一顆砝碼可選擇放左邊 (設為 1), 放右邊 (設為 -1), 或放棄不用 (設為 0), 所以 n 顆砝碼有 3^n 種選擇, 扣除全放棄 1 種, 並考慮左右對稱的重複, 所以 $f(n)=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$ 是正確的。另一種解法也可假設 k 個砝碼最多能秤到 m, 則下一個砝碼應直接跳到 $2m+1$, 因為 $(2m+1)-m=m+1$, 恰是下一個可秤出的連續整數, 所以當這 $k+1$ 顆砝碼全部置於同一側時, 就可以秤出 $m+2m+1=3m+1$ 這就和前面用到的數學歸納法, 不只過程一樣, 連結果和公式都一樣了。

現在我們回頭來看外星人的7個安全箱是否足夠。如果 $n=7$, $f(7)=\dfrac{1}{2}(3^7-1)=1093$, 所以外星人還是滿厚道的, 不只問題是可以達成的, 並且沒有用極限數來為難地球人。只是我們雖然知道問題有解, 可以從第 1 顆炸彈逐一放入編好號的安全箱中; 也有從 k 到 $k+1$ 箱的具體推廣方法, 事先列出 7 個箱子所要投入的全部號碼。但是炸彈是隨機出現, 光是比對近千個數字找到正確的箱子, 恐怕也是一件大工程, 這是遞推公式不好用的地方, 好比要求費氏 (Fibonacci) 數列第 100 項, 如果沒有生成函數, 就必須從 $F_1, F_2, \ldots$ 求到 F_{98}, F_{99}, 才能算出 F_{100}。如果我們能有一種方法, 直接從炸彈編號的序號, 分析出應直接投入的箱子, 就不怕炸彈序號是隨機出現了, 例如第一顆出現 398 號炸彈能不能直接決定投入哪一箱呢?

前面提到珀西 · 亞歷山大 · 麥克馬洪對任意待測重量正整數 n 的處理方法, 是把 n 表為三進制, 再將係數 2 以 -1 取代, 使每一個正整數 n 表為 $n=\sum_{i=1}^{k} a_i 3^{i-1}$, 其中 $a_i \in \{-1,0,1\}$, 來選擇並放置砝碼, 現在既然整數分組和最小砝碼的問題同構, 我們也希望從 n 的三進制的表達, 來研究直接分組的方法。

先用三個砝碼秤 1 到 13 來分析, 將 1 到 13 以 -1、0、1 為係數表為三進制:
$1=1$, $2=3-1$, $3=3$, $4=1+3$, $5=9-1-3$, $6=9-3$, $7=1+9-3$, $8=9-1$, $9=9$, $10=1+9$, $11=3+9-1$, $12=3+9$, $13=1+3+9$
再依每個數等號右邊最小的正數來分群:

[1]註：趙文敏教授編著, 寓數學於遊戲第二輯, 頁 42～43, 九章出版社。

$B_1: 1=1,\ 4=1+3,\ 7=1+9-3,\ 10=1+9,\ 13=1+3+9$, ($3^0$ 是最小的正項)

$B_2: 2=3-1,\ 3=3,\ 11=3+9-1,\ 12=3+9$, ($3^1$ 是最小的正項)

$B_3: 5=9-3-1,\ 6=9-3,\ 8=9-1,\ 9=9$, ($3^2$ 是最小的正項)

正好是原問題甲組的解, 我們還要更完整的證明:

對任意正整數 a,b (設 $a>b$), 設 a,b 的三進制分別爲 $a=\sum_{i=1}a_i3^{i-1}$, $b=\sum_{i=1}b_i3^{i-1}$, 其中 $a_i,b_i\in\{-1,0,1\}$ 則 a_i,b_i 中至少各有一個 1。設 a 和 b 同屬於 B_k 那一組, 則 $a_k=1$ 且 $b_k=1$。且 $a=\sum_{i=1}^{k-1}a_i3^{i-1}+3^{k-1}+\sum_{i=k+1}a_i3^{i-1}$ 其中 $\forall\, 1\le i\le k-1$, $a_i\in\{-1,0\}$, $b=\sum_{i=1}^{k-1}b_i3^{i-1}+3^{k-1}+\sum_{i=k+1}b_i3^{i-1}$ 其中 $\forall\, 1\le i\le k-1$, $b_i\in\{-1,0\}$, 令 $c=a-b=\sum_{i=1}(a_i-b_i)3^{i-1}=\sum_{i=1}c_i3^{i-1}=\sum_{i=1}^{k-1}c_i3^{i-1}+\sum_{i=k+1}c_i3^i$ 其中在 $1\le i\le k-1$ 時, $c_i\in\{-1,0,1\}$, 在 $i\ge k+1$ 時, $c_i\in\{-2,-1,0,1,2\}$, 則 3^{k-1} 項係數 $=0$ 變成無法跨越的鴻溝。首先考慮我們將一正整數 n 表爲三進制時, 係由冪次最低的係數先決定。係數 -2 和 2 要改寫成 -1 或 1, 都只會影響同冪次及更高冪次, 而不再改變已確定的較低冪次的係數。所以我們分成兩段來討論：

在 $i\le k-1$ 這邊, 若存在最小的 i, 使 $c_i=1$, 則 $a-b$ 在 B_i 那組, 不在 B_k。若 $\forall\, i\le k$, $c_i\in\{-1,0\}$;

再考慮 $i\ge k+1$ 這一邊, 我們由最低次方的 $c_i=-2$ 及 $c_i=2$, 往冪次高的方向整理：

若 $c_{i+1}=-2$, 因爲 $(-2)=(1-3)$, 所以 $(-2)3^i=(1-3)3^i=3^i-3^{i+1}$ 則 $c_{i+1}=1$, 則 $a-b$ 在 B_{i+1} 那組, 因爲 $i\ge k+1$ 所以 $a-b$ 不在 B_k中;

若 $c_{i+1}=2$, 因爲 $2=(3-1)$, 所以 $(3-1)3^i=3^{i+1}-3^i$, 所以 $c_i=-1$, 則 $a-b$ 在冪次更高的 B_{i+1} 那組, 自然不在 B_k 這組。

由上述分析討論得證, 依冪次最小的正係數 1 來分組, 可以保證同一組中任兩數的差都不在同組中。

最後我們可以把連續正整數分組的問題做一個完整的陳述：

> 將 1、2、3、$\cdots$、m 等連續正整數分成 n 組, 使每組中任兩個數的差都不在該組內, 其 m 值的上限爲 $f(n)=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$。且分組的方法爲：將 1、2、3、$\cdots$、m 等連續正整數, 以 -1、0、1 爲係數表爲三進制, 並以 3^0、3^1、3^2、$\cdots$、3^{n-1} 的最小正項爲分組依據, 即可得到一種分組法, 但此分組法非唯一解。

現在我們可以直接解決外星人的第一顆編號 398 的炸彈了。

$$\text{因爲}\quad 398=3^5+3^4+2\times3^3+2\times3^2+2$$
$$=-1+3-3^2-3^4-3^5+3^6$$

因爲最小的正項是 3^1, 所以 398 號炸彈, 就應該放入編號爲 2 的安全箱了!

結語

龍騰文化事業公司 2005 年 10 月出版的『數學新天地』, 有許志農教授主編的問題集: 將 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 這十三個數字分成三群, 使每群中的任兩個數字差都不在該群內。

這個題目簡單明瞭, 連國中生都可以動手做了。若將題目改爲『將一組同花色的撲克牌 $A \sim K$ 分成三堆, 使每堆中的任兩張牌的點數差都不在該堆內。』甚至可以當家庭的休閒益智遊戲了。初看這個題目, 只直覺可能不是唯一解, 等實際動手做, 才發現許多值得討論及推廣的問題。該『數學新天地』提供高中數學教師許多專業上的進修, 不知道許教授提出此問題時, 是否早已有完整的答案, 或許也有不少高中老師曾經解出這個問題。筆者當年解出問題後, 陸續加以推廣, 直到找到以三進制的最小正項爲分組依據, 才算有所突破, 其他進位制似乎沒有這種功能, 自己覺得是很難得的經驗, 只是表達過程略嫌複雜, 當年忙於教學無暇整理, 退休後特別記錄下來, 供有興趣的同好參考。因爲分組的方法不唯一, 但願還有先進提出其他解法和證明。

尾聲

在解題的嘗試過程中會有一疑問, 如果問題的限制改爲: 使每組中的任兩數和都不在該組內, 是否有不同的發展。稍一分析就會發現, 若任兩數是指相異兩數, 的確可以增加很多種解法, 但我沒能發現規律。其中的差異在於: 若 $b = 2a$ 則 $b - a = a$ 所以 a、b 不能在差的限制中同組, 卻可以在和的限制中同組。但若不限制相異兩數, 限制兩數和就和限制兩數差完全一樣了[2]。

同一組中任兩數和或差不再在同一組的要求, 類似生物學的避免近親繁殖, 是否可應用於生物研究的配對組合, 或統計的抽樣理論, 或資訊的資料存取處理等等 ..., 就更希望有人能更深入的探討了。

—本文作者爲高雄市中正高中退休教師—

[2]註 : 參考民國 73 年 12 月出版的數學傳播季刊第八卷第四期 64-66, 有王湘君老師翻譯自 Staley J. Bezuszka & Margaret J. Kenney : Chaiienges for Enriching the Curriculum :Arithmetic and Number Theory, Math Teacher, April 1983, 250-252. 算術和數論中的「難題」, 第 7 題, 就是以兩數和不在同一組來研究, 文中只推算到分三組時最多到 23, 分四組時最多到 66, 並沒有證明也沒有發展出一般公式。看來問題真的不簡單。