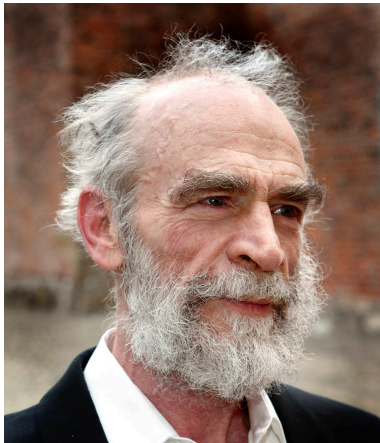


# Mikhail Gromov (下)

## 2009 年 Abel 獎得主接受歐洲數學學會訪談記錄

翻譯：張清輝、李宣北



Knut Falch/Scanpix 攝

Mikhail Gromov 是挪威科學人文學院頒發的 Abel 獎 2009 年得主。五月十八日領獎之前 Gromov 在奧斯陸接受 Martin Raussen (任教丹麥 Aalborg University) 和 Christian Skau (任教 Norwegian University of Science and Technology) 的訪問。訪談內容刊登在歐洲數學學會 (EMS) 2009 年九月份的 Newsletter, 本刊取得相關機構<sup>1</sup> 及人士<sup>2</sup> 的授權, 翻譯<sup>3</sup> 成中文與讀者分享。

### 生物數學

聽說你近來對生物數學很感興趣, 請談談涉及其中的情形以及如何將你在數學上與幾何上深刻的見解運用在生物問題上?

我可以說明自己如何接觸生物數學。我還在俄羅斯的時候, 大家都為 René Thom (1923~2002, 法國數學家, 研究拓樸、奇異點理論, 是 *Catastrophe* 理論的奠基者, 1958 菲爾茲獎得主) 將數學應用到生物的想法雀躍不已。我後來的動機則是由數學的角度出發, 從雙曲群開始, 我發現雙曲馬可夫分割 (hyperbolic Markov partitions) 與細胞分裂的過程大致類似, 於是我翻閱文獻也與人討論, 知道有所謂的 Lindenmayer 系統 (*Aristid Lindenmayer*, 1925~1989, 匈牙利生物學家)。許多生物學家認為這些系統代表一個很好的、用替代及細胞分裂的模式來描述植物生長的方法。基於此, 我們在 Bures 的 IHES(高等科學研究所) 辦了一個

<sup>1</sup>歐洲數學學會 (EMS)、挪威科學人文學院 (The Norwegian Academy of Science and Letters)。

<sup>2</sup>Mikhail Gromov 教授、Martin Raussen 教授、Christian Skau 教授。

<sup>3</sup>文中括弧內細明斜體字為譯者所加, 非原文所有。— 譯者識

特別針對生物學裡模式成形 (pattern formation) 的會議, 因此激起了我的興趣想要多知道些生物學。很快地, 我就瞭解由於基因工程以及 PCR (polymerase chain reaction 聚合連鎖反應) 的發現, 分子生物學在 1980 年代有巨幅的進展。PCR 實際上就是數學程序 (mathematical procedures) 在活體細胞上的應用, 數學家很有可能發明 PCR, 不過沒有, 但數學家應該能夠發明 PCR。這是二十世紀重大的發明之一, 完全改變了分子生物學。我著手瞭解這些數學程序, 開始認識到它們導向奇妙的數學問題, 但是很難明確說出到底是什麼, 我還不能具體陳述。當然, 有些特定的演算法用在特別的領域如序列 (sequencing), 但是這不是新的數學; 是原有的數學應用在這個領域。我認為那裡應該有我們不知道、待發現的數學。它將作為一個框架, 就像微分方程為古典力學提供一個框架。這個框架應該是頗為抽象而且形式的 (formal), 不但內嵌我們對生物的基本認識, 也許還能累積現在未知的成果。我一直在思考這些, 不過還沒有答案。

請說明 PCR 這個名詞。

就是聚合連鎖反應。可以這樣來看：在一個鼠輩猖獗的星球上, 老鼠們看起來沒有差別。實驗室裡也有老鼠, 外觀一模一樣, 卻不同種。好了, 假如有一隻雌鼠溜出實驗室, 一年後想知道它是否仍然存活。但面對億萬隻老鼠, 總不能一一檢驗, 怎麼辦? 這裡有個想法——放出數以百萬計的公鼠, 萬一那隻開溜的雌鼠還在, 應該會有實驗室品種的鼠群出現, 等待一段時間之後, 它們的數量就會增加到好幾百萬, 於是取樣檢驗是否有這個品種的老鼠。這就是聚合連鎖反應的作用, 不過不是用老鼠而是 DNA。面對上百萬不同種類的 DNA, 想要知道其中是否有特定的 DNA, 一個辦法是藉由置入由這 DNA 作用而冪次倍增加的分子證實。如果有, 經過幾個循環將會增加到數百萬之多。這個讓人拍案叫絕的想法極簡單而有效。生物中一個基本的現象就是放大, 是生物學特有的。數學應該對生物學家有用, 目前還做不到, 但我相信可以做到, 將會影響基因工程以及辨認基因功能等問題的研究, 不過還沒有發展出來, 與別的數學也會大為不同。

## 數學與科學之間的互動

在你的印象中, 你或其他數學家的工作, 生物學家認可嗎? 感激嗎?

我什麼都還沒做, 只是和生物學家交流。不過, 我想當中許多人很滿意和我以及其他數學家的對話, 不是因為我們知道些什麼, 而是因為我們問了許多問題。有時候他們不能回答, 但是這些問題讓他們思考。大致就是這樣, 不過在我看來也不是微不足道。像這樣, 數學家作個很好的傾聽者, 對他們是有幫助的。

數學家在科學上有成就的非常少, 其中最顯著的事例就發生在挪威, 19 世紀中葉, 數學家 Guldberg (*Cato M. Guldberg, 1836~1902*) 和化學家 Waage (*Peter Waage, 1833~1900*) 合作發明了化學動力學 (chemical kinetics)。我不知道後來還有沒有數學家在實驗科學上達到

這種程度的貢獻，由這個例子看來可能性不是沒有，不過要通過與實驗科學家的緊密合作，而且是在特殊的情形之下。類似的事情也許可能在生物學發生，但是不容易。

因為對化學感興趣而知道 Guldberg 和 Waage?

是的。這是化學以及分子生物學的基本方程式，是其中事物的基礎。數學家可以在科學上有所貢獻，但不是那麼容易，不可能預先規劃，必須親身參與，在極為希有的情形下，意想不到的事發生了，為科學帶來強勁的衝擊。

在與 Abel 獎相關的活動中，我們很驚訝的發現 Abel 系列演講中的科學演講，主題是電腦繪圖 (computer graphics)。據說電腦繪圖，或電腦視覺 (computer vision)，尤其是形狀分析 (shape analysis) 得益於你的發明：Gromov - Hausdorff 距離，是否可以說明這個觀念從何而來，如何應用？

影像比對的癥結在於如何比對。早期電腦視覺的工作，是基於將兩個影像比對之後，強調兩者相異的部分，這太令人詫異，對幾何學家來說簡直不敢相信，因為完全違反了眼睛運作的模式。其實，眼睛對影像如何運作的探討上溯 Poincaré (*Henri Poincaré, 1854~1912, 法國數學家、理論物理學家、工程師、科學哲學家，是通達上述領域的大學問家*)，在他有名的著作《科學與假設 (Science and Hypothesis)》中，思考人如何由自身的經驗來建構歐氏幾何，他以幾乎數學的論證說明如果我們的眼睛不能移動是不可能建構出歐氏幾何的。所以實際上你重建——也就是我們腦海裡記錄視覺訊息的方式，是根據眼睛的移動而不只是眼睛所見。粗略的說，眼睛做的是搬動影像而不是在腦中增加影像，它必須把影像歸納到正確的類別中，大致就像黎曼幾何中以小的彎曲變形和比對，在 Hausdorff 收斂或任何方式的收斂下做的分類。

對於讀過 Poincaré 著作的數學家，這很明顯。但是對於從事電腦科學，接受線性分析那些不同訓練的人，則是完全不明顯。看來他們後來將幾何的想法引入。其實自從對視覺感興趣，我去聽了 Sapiro (*Guillermo Sapiro, 電腦科學家、電機工程師，在影像處理上有顯著貢獻*) 好幾次的演講，他長時間以來一直思索如何分析影像。

看來調和科學與數學的機制不夠。

我完全同意。何止不夠，說「不夠」還太客氣了，簡直接近零。這兩個社群由於種種技術上的原因變得極其疏離，絕少交流。Courant Institute 則是一個令人高興的例外。在那裡，我們還有許多人彼此互動，結果就是數學家愛上科學。Courant 的這些年輕人真的讓人振奮，因為其它任何地方看不到這樣的應用數學家。另一方面，他們對純數學整體有相當的認識，知道可以從哪裡借用想法加以應用。一般來說，應用數學家與純數學家是涇渭分明的兩個群體，有點彼此看不順眼，很荒謬，應該改變才是，因為我們有相同的目標，只是從不同的邊來瞭解世界。

要改善這種情形，你有什麼想法？

沒有。不過我認為不論哪個學科發生這種問題，唯一的建議就是必須從檢視問題著手。對這個問題，我知道得不多只有零星的例子。我們應該看看在哪裡沒問題，又在哪裡發生問題，嘗試以新的方式來組織安排。不過做法必須和緩，不能強迫數學家作他們不情願的事。顯然的作法是設計良好的、結合數學與科學的教育。事實上，在巴黎有個為非生物人開的很好的生物入門課，由 François Taddei 主持，對象是年輕的數學人與物理人。他非常有影響力，充滿熱忱與動力。我去聽了幾堂課，很引人入勝。他過去在高等師範學校 (École Normale Supérieure) 教數學家 and 物理學家們生物，成功地將生物的概念讓人人可以理解，我認為這是初步該做的。必須要有這類特別的，不在任何制式課程中，非形式化的教育。只有具備足夠熱忱與足夠知識的人才能勝任將這些知識灌輸給年輕人。在教育體制內設計這樣的系統，相當困難，而且任何讓這個系統定於一尊的作法都是危險的，反而可能讓它無法發揮預期的功效。將數學強加於非數學家只會讓人不舒服。

剛剛的談話中你提到在 Courant Institute 的情形，不過你在巴黎近郊 Bures-sur-Yvette 的高等研究所 (IHES) 時間更長，請說明這個機構在你的研究工作以及生活中的角色？

那是個了不起的地方。還沒去之前，我已經知道這個傳奇的地方，因為 Grothendieck 在那裡 (Alexander Grothendieck, 1928~2014, 德國出生法國數學家，是近代代數幾何的建立者，二十世紀最偉大的數學家之一，1966 菲爾茲獎得主)，他在數學裡就像神祇一般。我在 Stony Brook 的時候認識了 Dennis Sullivan (1941~，美國數學家，研究代數拓樸、幾何拓樸、動力系統)，後來又在 IHES 碰面，從與他交談學到許多數學。我認為自己能到 IHES，得力於他的引介，因為他喜歡我的工作，我們互動頻繁。Dennis 和許多人互動，他有一種奇妙的能力，能介入任何想法 — 加以吸收，讓它進一步發展。另外一位在那裡的大師是 René Thom，不過除了數學，他已經跨入哲學領域。還有 Pierre Deligne，從 Pierre 那裡學到的東西多半都是我正需要的；好幾次我問他問題，得到奇妙的答案。他可以把你腦袋裡的想法轉變到另一個方向。

基本上，這個機構營造出的整體氛圍非常特殊。除了研究以及與人討論之外，幾乎完全自由 — 一個獨特的地方。回想起來，我最好的回憶是在那裡擔任第一年訪問學人的時候，真是自由自在。當我成為正式成員，就有些義務，不多、但有。能在那裡訪問半年放鬆一下，是很理想的。不過成為永久成員也不壞。

你最好的工作是在 Bures 作的？

是的，我想是在 35 到 39 歲之間，是我研究能量最豐沛的時期。

## 電腦之於數學家及數學

顯然，電腦的使用大大改變了數學家的日常生活。大家用電腦與人交流，幾乎每個人都使用電腦工具編寫論文，不過也有人以電腦作為研究的主要設備。你的經驗如何？用電腦嗎？

沒有，很遺憾，我不擅長只用來打論文，而且是最近才學會的。我確信有些數學，特別是與生物有關的數學將來無法與電腦分割。當想法實際上必須與電腦實驗結合，將是不同的數學。我們必須學會不用真正瞭解每個數據的意義，只掌握大原則來運用大量的數據。當然這些已經發生了，但不夠快。對生物學，時間的因素很重要，因為要找到對治疾病的方法，或者至少對人類的種種疾病有所瞭解，愈快愈好。數學家通常不受時間制約，沒有解決問題的急迫感。對於生物學的迫切需要，數學家可以加速它的進程，電腦絕對是其中不可或缺的部分。我認為電腦將以這樣的方式在目前以及未來扮演關鍵的角色。

所以，電腦終究將改變做數學的方式，在 50 年之內？

我認為 50 年之內電腦將有根本的改變，電腦程式發展得很快，我也認為數學家在這方面可能有極大的貢獻。果真如此，50 年之內電腦會非常不一樣。事實上，一直以來沒有人預測出電腦的發展。只消看看 30 年前 Isaac Asimov (1920~1992, 俄國出生美國著名科普作家) 根據 70 年代的機器人和電腦，想像出的 21 世紀時它們的樣貌。我們可能無法想像 50 年後會發生什麼，只能說跟現在很不一樣；科技正以高速突飛猛晉。

你怎麼看量子計算 (quantum computing)？

我不是能說上什麼的專家，應該問物理學家，不過，他們之間看法也很分歧。印象中實驗物理學家相信做得到，而理論物理學家則認為：「不行，不行，做不到的。」這是我大致的印象，但不是我的看法，因為這兩方面我都不瞭解。

## 研究數學的方式

一直以來大家公認你在致力研究的每一個題材都能引進影響深遠的原創觀點。對於如何做數學，特別是針對問題如何下手，是否有一套基本的策略？

我能說的只有：必須全力以赴。這就是我們做的，努力，再努力；思考，再思考，沒有別的竅門。一般來說想做一個問題，那麼就像數學家們從以前就知道的，必須在思（自己思索）與學（從他人那裡學習）之間取得平衡。每個人都必須根據自己的能力找到適度的平衡，因人而異，沒有人人適用的建議。

你覺得自己更偏向解決問題還是建立理論？請用這兩個詞來形容自己。

要看當時的情形，有時你只想解決一個問題。當然隨著年齡增長，變得愈來愈傾向理論。一

部分因為智慧增長，不過也可以說是因為精力不比從前，就看你怎麼看了。

關於做數學的方式，你是否念茲在茲地思考數學？

是的，除非有私事干擾讓我無法思考。如果一切順當，而且沒有其它的事要做，我會將自己沈浸在數學，或者別的學科例如生物學當中，不過是以數學的方式。

每天花多少時間作數學？

不比從前多，年輕的時候，我可以整天持續工作，有時候從早上 9 點到晚上 11 點，沒有事能讓我分心。當然現在不能再這樣了，每天只能工作 5、6 小時不感到疲倦。

年輕的時候精力比較充沛，但現在你更有智慧，對不？

你可以說隨著年紀的增長多了歷練與智慧，但是精力也隨著年歲衰減，這是必須接受的事。是否更有智慧，倒也未必，不過精力顯然比以前差。

John von Neumann (1903~1954, 匈牙利出生美國數學家、物理學家、電腦科學家，大學問家) 曾經說過在 30 歲之前做出最重要的數學。當他 30 歲的時候，又加上：年紀大了更有智慧。你認為自己最好的數學是 30 歲之前完成的嗎？

我只能談我自己的情形，我覺得自己最好的工作是在 30 到 40 歲之間。剛開始的時候我沒有任何前景，做問題不加揀擇，有什麼做什麼，隨著學習知道更多的東西，我不停地改變自己的態度。現在如果重新開始，我會投入完全不一樣的事，或錯或對，我無法斷定。另一方面，我必須說現在我思考的每一件事，都是 40 年前已經想過的，這些想法在心中長期醞釀。也許有人在晚年創造出嶄新的東西，但是基本上某些感覺是早年就開始發展了。就像語言的能力，我們 3 歲學說話，這不表示 3 歲和 30 歲有同樣的表達能力，道理是一樣的。

我們很驚訝你如此謙虛，貶抑自己的成就，也許你的想法單純自然像你說的，不過從這些想法要得到結果，多少需要些與眾不同的聰明才智，不是嗎？

不是我特別謙虛，我也不認為自己是個白癡。做數學的時候，通常不會想到自己。一位朋友抱怨每當他想到一個好點子，得意於自己的聰明，興奮得接下來無法工作。所以很自然的，我盡量不去想這些。

你前面提到一直以來工作得非常投入，你曾經因為透支精力而情緒低落嗎？

沒有。有時候外界不愉快的事讓我分心，當然也有時候工作得很累，很高興有人打岔暫時停下工作。其它時候，就是工作、工作，像個上癮的人，所以能休息一下是蠻好的。



Mikhail Gromov 教授與挪威 Harald 國王和 Sonja 皇后會面, Erlend Aas/Scanpix 攝

## Abel 與 Abel 獎

你曾抱怨，數學界只消化了你的研究中比較技術、次要的細節，而不是背後恢宏的想法和視野。得到 Abel 獎你認為情況會改變嗎？

首先，這是半開玩笑的抱怨。在有些工作中，我的想法沒辦法跟其它想法一樣比較成功的發展，我因而有點灰心。沒有發展下去的原因見仁見智，可能是想法本身不夠好，也可能是沒有受到重視，到底為什麼並不清楚。我希望自己的主張能往前推進，不過事與願違，這是我的抱怨，或者說我的抱怨來自於此，與 Abel 獎毫不相干。

一般來說，對於「獎」你有什麼看法？Abel 獎呢？

客觀地說，我們不需要頒獎給已經卓然有成的數學家，需要的是對各個階段年輕人的鼓勵，我們必須在這方面付出更多努力。另一方面，能得到 Abel 獎是莫大的榮幸。我很開心，而且可能因為這個獎提升一般大眾對數學界整體的正面觀感。這或許是我自圓其說，當然，因為我喜歡我的工作受到朋友們的認可欣賞，還有我喜歡這個獎。但從大眾科學的角度，更重要的課題是投入更多更大的努力，籌措經費，教育以及啟迪年輕人擁抱數學。今天稍早訪問 Oslo 這裡的中學，所見到的以及那些年輕孩子們，讓我留下深刻的印象，我希望在世界各地都能有這樣的活動。數學家當然不是那麼不食人間煙火，不恃不求，不把得獎放在心上，但是長遠來看，打造數學未來的不會是各種獎項。

回到 Abel，他是你仰慕的數學家嗎？

絕對是。我前面說過，引領數學從可以看到、即刻體驗的層面，走向更有深度、有根本結構這個轉變的主要人物，即使不是他，他也是其中之一。

Abel 有一篇關於方程理論的文章，在他過世之後才發表，後來成為 Galois 理論。他在前言中有段話很有意思，大致是：「一個看似束手無策的難題，困難只是看似如此，因為我們沒有問對問題，只有正確的提問才能解決問題。」

正是如此。他改變了我們問問題的視角。我對數學史知道得不多，但很明顯的，是 Abel 的工作和他考量空間、函數的方式，改變了數學。數學結構裡對稱的觀念很多來自他的工作，不過我的歷史知識不夠，不能指出發生的確切時間。到現在數學依然循著這些觀念發展，先是 Galois 理論，繼之以 Lie (*Sophus Lie, 1842~1899, 挪威數學家，創建連續對稱理論並應用到幾何與微分方程*) 所發展的 Lie 群理論，到了近代則推進到更高的層次，特別是 Grothendieck 的工作，這些發展一直持續下去，方興未艾。我們必須通透所有這些發展，瞭解它們將我們帶往何處，才能知道下階段何去何從。這是我們現在作的所有數學的基礎。

## 數學的未來

在對數學史回顧之後，讓我們對數學未來的走向稍做推測，如何？你曾將數學的整體建構比做 Hilbert 樹，以不同領域之間接近的程度作為它們的度量結構。從 Kurt Gödel (1906~1978, 奧地利出生美國邏輯學家、數學家、哲學家) 的工作知道，這棵樹有些部分我們永遠無法達到。另一方面有些部分我們可以理解，卻又不知道這部分到底有多大。你認為我們對 Hilbert 樹已經有相當程度的瞭解嗎？人類的心智能夠進一步擴大所能掌握的部分，還是有些地方是我們永遠無法瞭解的秘境？

事實上，我也正在思考這些。我沒有答案，但有個如何著手的大綱。說來話長，有一些基本的運算可以讓我們察覺樹的結構，如果將這些運算列表，它們顯然可以引領我們到達樹的某些部分。這些運算不是公設，與公設大相逕庭。但是最終不可能靠徒手來審視得到的結果，必須用電腦——得出某些結論但不知道中間的過程。這樣做電腦的計算量太過龐大，必須將作法形式化 (formalize) 找出計算的一些策略。這是目前我想得到的，但我沒有答案。有些間接的跡象顯示這樣做是可能的，不過這些跡象本質上比較生物，而不是數學的。

如果從現在看未來的 50 年，100 年……

50 年和 100 年差別很大。未來 50 年如何，我們心中多少有譜，還是繼續現在的方向。不過地球的基本資源將在 50 年內消耗殆盡，之後如何我們無法預測。水、空氣、土壤，稀有金屬，更不要說石油都快匱乏。所有的資源基本上都將在 50 年內走到盡頭。接下來如何？令人膽戰心驚。如果能找到解決的方法，也許可以安然度過，不然很快的所有一切都會結束。



數學也許可以幫忙解決這個問題，如果不行，將來恐怕也不會有任何數學了。

你很悲觀？

我不知道，看你做什麼。如果我們繼續盲目地向未來前進，百年內將有大災難，而 50 年已經進入決定性的關鍵時期，50 只是個估計，也許 40 也許 70，不過問題必定會發生。如果我們對這些問題嚴陣以待，設法解決，就太好了。我認為我們有解決問題的潛力，但是這個潛力一定要用出來，就是教育，上帝不會幫我們解決，大家一定要有理念從現在就開始準備。必須教育兩個世代的人；教師的教育現在就必須開始，然後他們可以教育新一代，這樣就會有足夠的人力，有能力面對上述的困境。我確信這是個有效的作法，如果不成，將是災難。簡單的計算就知道這是個幕次的進程，以這樣的幅度走下去，最終將爆炸毀滅。比方說，沒有土地，全球各處的地力都在衰竭中，這件事宣傳得不夠，更不要說水資源。這不是無法克服的問題，但是解決之道需要社會、智識各個層面的努力，範圍之廣，前所未見。

## 未來的教育體系

教育顯然是個關鍵因素。早先你曾表示憂心，有天賦的青年心性才智沒有得到有效充分的發展，有沒有任何改變教育讓它更能適才揚性的想法？

還是那句話，必須下功夫研究，沒有絕對的方法。看看像 Abel 這樣兩百年前的古人，現在再也沒有 Abel 們了。另一方面，受過教育的人，數目大幅成長，但是像 Abel 這樣的人在哪裡？這表示教育的方式不恰當，表示他們被毀了，教育摧毀了這些潛在的天才——沒有這樣的人才了！也就是說教育在培養這些人上沒有發揮它的功能。關鍵在於必須適才適性，不同的秉賦，給予不同的教育，現在不是這樣。比起一、二百年前甚至五百年前從文藝復興以來，儘管人口多得多，我們卻沒有比那時更偉大的人物，問題可能出在教育。這也許還不是教育最嚴重的問題，許多人相信很奇怪的事，因此做出非常奇怪的決定，你們也許知道，在英國有些大學有由政府資助的同種療法 (homeopathy) 的師資群，大受學生的歡迎。這是任何人都能夠學的無意義的東西。真遺憾。

你指出 Abel 的成就如今沒有人或是很少有人能夠企及，是不是在我們的教育體系中，設計不夠周延，對於資賦特別優異的人，可能是因為他們的想法奇特，離常規很遠，以致於沒有照顧到他們？

教育牽涉的問題不是那麼顯然。有些動物實驗指出訓練動物的方式並不是我們以為的，就像物理裡有隱藏的機制，大腦學習的機制與我們從日常經驗得出的觀點大為不同，後者可能是完全扭曲的。因此，我們也會扭曲有些孩子潛在的特殊能力。

教育應該有兩個相反的目標：首先，教導人們融入他們所處的社會；另一方面，給予自由

任由他們盡情發展。這是兩個相反、永遠衝突的目的，造成某些人在適應社會的過程中受到壓抑。目標不同引起的衝突是難免的，但在各個階段的教育中我們必須在兩者中求取平衡，雖然不容易。

有些有趣的實驗觀察黑猩猩與 bonobo 猿在哪些情形下能夠學習，或是如何訓練鸚鵡說話。怎麼做呢？關鍵在不能讓它看到訓練它的人。在鸚鵡與人之間放一面鏡子，人躲在鏡子後面，鸚鵡看到的是鳥——它是與鳥說話，如果看到的是人，就學不好了。這事一點都不簡單，面對教師，也就是一個權威，鸚鵡就不受教。過去累積的種種證據顯示，我們無法對教與學的問題做單純的決定。如果你要學生「做這，做那」一定無效。沒有顯而易見的解答，只有深度剖析目前確實知道的情形，以及研究各種可能，才能得出解決之道，我認為這些答案將出乎意料。我們不知道什麼是小孩子有能力學的，什麼是學不來的，因為我們沒辦法進行在道德上無瑕疵，同時又能提供許多資訊的實驗。這是非常不容易的議題，很少人做過，有動物實驗的結果，針對人的很少。

讓我們回到數學和數學教育。許多人似乎在高中畢業之後就和數學分道揚鑣，但身為數學家，我們知道數學無所不在，也許是隱而不顯：它是科技的載具，也是人類文化的支柱，強調嚴謹與有條理的思考。如何讓社會理解並且欣賞數學的這兩種角色；如何讓決策者體認到數學須要支持，你有沒有什麼想法？

這是很難的問題，因為我們必須將數學的想法傳達給離數學很遠的一批人——在社會上做決策的人。我們思考的方式與他們運作的方式大不相同。

我想也許數學界可以從教育出發，例如為兒童打造好的數學資源，現在有網路，我們可以嘗試用網路來呈現數學資源。事實上，法國就有人這麼做，正在為幼童設計小規模的課外活動，我們應該嘗試進行大規模的類似的活動：有一些大的激發全方位創意的中心，不僅聚焦數學，還包括科學、藝術以及任何能提升年輕人創作的活動。在這些發展之後，數學家對社會也許會有些影響，但不是之前，處在象牙塔裡的我們能說什麼？我們太安於象牙塔裡的生活，但是我們也真的沒辦法說上什麼，因為我們對世界的瞭解不夠透徹。我們必須走出來，不過不容易。

你提到讀了 Rademacher 和 Toeplitz 寫的「數與形 (Numbers and Figures)」引發你對數學的興趣，我們還想到 Courant 和 Robbins 的「數學是什麼 (What is Mathematics)?」我們是不是應該鼓勵對數學有興趣的中學生看這類的書？

是，我們還要有更多這樣的書。現在已經有一些不錯的書，Martin Gardner (1914~2010, 美國通俗數學和科學作家) 的書，Yakov Perelman (1882~1942, 蘇聯科普作家) (「數學可以有興趣 (Mathematics can be fun)」), Yaglom (Isaak Yaglom, 1921~1988, 蘇聯數學家、通俗數學作家) 與他人合著的書，這些書都非常出色。別的數學家可以加入書寫的行列並且與網路結合，尤其是將內容視覺化。

單單寫一頁有趣的數學相對來說是容易的，這是應該做的事，讓數學中許多不同的主題容易親近。數學社群應該走出去，在網路上搭起這樣的結構，這是相對簡單的事。下一個階段就比較複雜；寫一本書並不簡單。數學界應該鼓勵大家做這件事，這是值得推崇的事。數學家常把「不過是些庸俗的東西，不夠嚴謹」掛在嘴邊，但這是不對的，要寫出一本廣受歡迎的書非常困難，必須有通透深入的瞭解，才能以最淺顯的方式呈現出來，事實上能勝任的數學家極少。

這樣可以讓更多年輕人學習數學。

可以吸引更多年輕人。進一步讓政治人物更容易感受到這個情況，因為這樣做比起我們自己閉門造車能引起更多人的興趣。

## 詩

你說過自己喜愛詩，什麼樣的詩？

自然，大多數我知道的都是俄羅斯的——二十世紀初期所謂的銀色年代的俄國詩作。可能有些詩人是你們不曾聽過的，我猜想他們的作品無法翻譯。西方熟知阿卡瑪托娃 (Akhmatova) (*Anna Akhmatova, 1889~1966*)，但她不是最偉大的詩人。三位最偉大的詩人是：茨維塔耶娃 (Tsvetaeva) (也是女詩人) (*Marina Tsvetaeva, 1892~1932*)，布洛克 (Blok) (*Alexander Blok, 1880~1921*) 和曼德斯坦姆 (Mandelstam) (*Osip Mandelstam, 1891~1938*)。

普希金 (Pushkin) (*Alexander Pushkin, 1799~1837*) 呢？

普希金的問題在於他的詩是學校上課教的，令我十分反感。不過四十年之後我重新發現了普希金，覺得他簡直好極了——在我把學校教的那套忘得一乾二淨之後。

那麼現代詩還有英詩呢？

我是念了些英詩，知道某些作品，但不夠多。不容易，即便是俄羅斯現代詩，比方說，Brodsky (*Joseph Brodsky, 1940~1996*)，我發覺要接受新的風格很難，要能理解一個詩人並不簡單。有些英詩我看了也很欣賞，有些容易理解，有些有俄文翻譯。愛倫坡 (*Edgar Allen Poe, 1809~1849*) 的詩很出色，他的作品有種簡潔的況味，但是許多其他英國詩人在風格上與俄羅斯相去太遠。我對法國詩作略有所知，像是 François Villon (*1431~1463*)，我能欣賞法文原作。不過現代詩對我而言太難了。

我們代表挪威、丹麥以及歐洲數學學會謝謝你，訪談就此結束。