數學傳播 42卷3期, pp. 14-24

介紹愛因斯坦 1915 年 11 月 18日的水星論文

張海潮

1915/1916 年愛因斯坦有兩個偉大的發現。第一個發現是他以廣義相對論計算出水星近日點的進動值, 解決了法國天文學家 Le Verrier 在 1859 年 9 月 12 日提出水星近日點因爲一些尚未淸楚的作用, 每一百年要多移動 38 弧秒。另一個發現就是利用廣義相對論計算光線經過太陽時的偏折角度是 1.7 弧秒。

本文將探討愛氏的第一個發現, 即水星近日點的運動, 至於第二個發現, 請參考作者在數學傳播 42 卷 2 期發表的「愛因斯坦的曲率公式和光經過太陽的偏折角度」。

根據克卜勒 (1571∼1630) 的行星三大定律和牛頓 (1642∼1727) 的數理分析, 在萬有引力之下, 行星繞日的軌道是一橢圓, 太陽位居一焦點。以水星爲例, 水星繞日軌道是一個離心率爲 0.206 的橢圓, 近日點距太陽 46,001,200 公里, 遠日點距太陽 69,816,900 公里, 半長軸爲 57,909,100 公里, 繞太陽一圈需時 88 天。[1]

但實際的狀況是, 水星繞日的軌道並不是一個靜態的橢圓, 它的近日點會在空間中緩緩的滑動 (稱爲進動), 進動的原因大部份來自其他星體對水星的引力。1859 年法國天文學家 Le Verrier 發現水星近日點的進動值, 在 100 年中, 比單由牛頓力學計算出的理論值還多出 38 弧秒 (一弧秒是 1 度的 3600 分之 1)。1882 年又由加拿大天文學家 Simon Newcomb 重新測定, 將 38 弧秒修正爲 43 弧秒。[2]

多出來的 43 弧秒到底是怎麼回事? 大家都知道, 愛因斯坦 (1879∼1955) 的廣義相對論認爲質量 (例如太陽) 將導致空間的彎曲。當天文學家以牛頓力學計算水星近日點的進動時, 他們假設空間是平直的, 並沒有考慮到廣義相對論所持空間本身已然彎曲。若在網路上輸入水星近日點進動, 可以看到單單由其他行星重力牽扯, 在 100 年中引起水星近日點進動的角度是 531.63 ± 0.69 弧秒, 比觀測少了 43 弧秒。這就好像單車騎士在地面繞圈圈, 本來應該一分鐘繞一圈, 但是來自於騎士本人對單車的過當操控, 增加了 531.63 ± 0.69 弧秒的轉動, 又有因爲

[1] 離心率即 c/a, 此處 $a = 57909100$, $c = 57909100 - 46001200$.

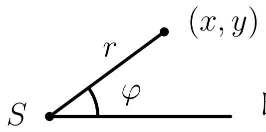
[2] 見 (`https://kknews.cc`) 這多出來的 43 弧秒一直困擾天文學家, 直到愛因斯坦以廣義相對論解釋。

地面的凹凸, 而貢獻了額外的 43 弧秒。43 弧秒的解決歸功於愛因斯坦在 1915 年首次以廣義相對論說明並計算出這額外的 43 弧秒[3] 愛氏的計算基本上是比較了以廣義相對論描述水星運動的方程式和植基牛頓理論的方程式, 並將此二者的差異計算出來, 我們將在下面討論愛氏的計算。

本文共分三節：第一節是重現以牛頓方程式得到行星繞日軌道的過程。第二節是利用 Euler-Lagrange 方程式來得到廣義相對論的行星運動方程, 並在附錄中解釋 Lagrangian 方法的意義。第三節比較牛頓與愛因斯坦方程來得到多出的 43 弧秒。

一、行星繞日的牛頓方程式

對平面運動而言, (單位質量 m) 動能是 $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2$, 式中 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, 或 $\frac{1}{2}\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}$。如圖, 太陽位在原點,

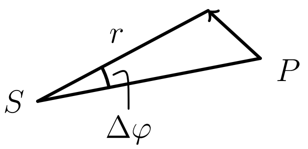


圖一

以極坐標 r, φ 表示, 動能 $= \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$, 位能 $= -\frac{GM}{r}$, 式中 G 是萬有引力常數, M 是太陽的質量, 因此有能量守恆, 總能量 $E =$ 動能$+$ 位能

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 2V = 2E. \tag{1}$$

源自向心力的面積律或角動量守恆給出 $r^2\dot{\varphi} = h$, 如圖, 單位時間掃過的面積爲 $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi \sim \frac{1}{2}h$。[4]



圖二

---

[3] 1. 此一計算, 愛氏發表於《普魯士科學院會議報告》1915 年, 47 期, 831-839 頁。報告當天是 1915 年 11 月 18 日, 標題爲《用廣義相對論解釋水星近日點運動》, 中譯請見紀念愛因斯坦文集, 凡異出版社, 以下簡稱水星論文。
2. 愛氏接著發表《廣義相對論的基礎》德國《物理學雜誌》(Annalen der Physik), 49 卷, 769-822。愛氏在此文中重新計算光經過太陽的偏析角度是 1.7 弧秒, 並重申他已計算了水星近日點在 100 年的進動值是 43 弧秒, 中譯請見紀念愛因斯坦文集, 凡異出版社。

[4] 圖二爲行星 P 在單位時間 Δt(如一秒) 掃過的面積, 近似值爲 $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$。如果橢圓軌道的半長軸、半短軸分別爲 a, b, 此一近似值即 $\pi ab\,/\,T$, T 爲行星繞日之週期。
方程式 (1) 若以守恆量 $h = r^2\dot{\varphi}$ 代入得 $\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = 2E$, $U(r) = \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} - \frac{GM}{r}$ 稱爲 effective potential。其最小值發生在 $r = \frac{h^2}{GM}$。因此 $E \geq U\left(\frac{h^2}{GM}\right) = -\frac{1}{2}\frac{G^2M^2}{h^2}$ 或 $2E + \frac{G^2M^2}{h^2} \geq 0$。我們假設 $h \neq 0$(如 $h = 0$, $\varphi =$ 常數, 代表直線運動, 行星墜向太陽)

由 (1)

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2+\frac{2V}{\dot{\varphi}^2}=\frac{2E}{\dot{\varphi}^2},$$

再由面積律 $r^2\dot{\varphi}=h$ 得 $\dot{\varphi}^2=h^2/r^4$。因此

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2+\frac{2Vr^4}{h^2}=\frac{2Er^4}{h^2},\quad V=-\frac{GM}{r}\quad \text{代入}$$

得出

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2-\frac{2GMr^3}{h^2}=\frac{2Er^4}{h^2},\quad \text{式中 } E,h \text{ 爲常數}$$

令 $u=\dfrac{1}{r}$ 得

$$\begin{aligned}
\left(-u^{-2}\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{u^2}-\frac{2GM}{u^3h^2}&=\frac{2E}{u^4h^2},\\
u^{-4}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{u^2}-\frac{2GM}{u^3h^2}&=\frac{2E}{u^4h^2},\\
\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-\frac{2GM}{h^2}u&=\frac{2E}{h^2},\\
\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2&=\frac{2E}{h^2}+\frac{2GM}{h^2}u-u^2\\
&=-\left(u^2-\frac{2GM}{h^2}u-\frac{2E}{h^2}\right)\quad (\text{註}5). \qquad (2)
\end{aligned}$$

我們有兩個方法解 (2), 其一是將 (2) 對 φ 微分得

$$2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)=-2u\frac{du}{d\varphi}+\frac{2GM}{h^2}\frac{du}{d\varphi},$$

或

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}=-u+\frac{GM}{h^2},$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(u-\frac{GM}{h^2}\right)+\left(u-\frac{GM}{h^2}\right)=0,$$

解出

$$u-\frac{GM}{h^2}=D\cos(\varphi-\varphi_0),(D\ \text{待定}),$$

整理後得

$$u=\frac{GM}{h^2}\left[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)\right]. \qquad (3)$$

[5]等號右邊之判別式 $\frac{G^2M^2}{h^4}+\frac{2E}{h^2}=\frac{2Eh^2+G^2M^2}{h^4}\geq 0$, 故有實根。(見註4)

式中

$$e = \frac{Dh^2}{GM},$$

此解爲一錐線, 離心率爲 e。將此解代回 (2)式, 得

$$e^2 = 1 + \frac{2Eh^2}{G^2M^2}, \quad 及 \quad D^2 = \frac{2E}{h^2} + \frac{G^2M^2}{h^4} \quad (註6).$$

注意到因

$$2E + \frac{G^2M^2}{h^2} \geq 0 \quad (見註4),$$

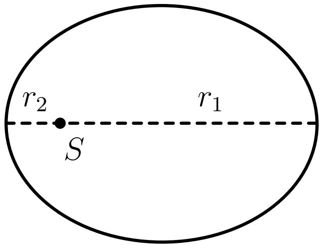
所以

$$\frac{2Eh^2}{G^2M^2} \geq -1,$$

亦即

$$e^2 = 1 + \frac{2Eh^2}{G^2M^2} \geq 0.$$

至於另一解法, 暫時先關心 $E < 0$, 即 $e < 1$ 的情形。此時 (3) 之解是橢圓, 由於 $u = \dfrac{1}{r}$, 所以 (2) 式之右邊有兩個根 $u_1 = \dfrac{1}{r_1}$, $u_2 = \dfrac{1}{r_2}$, 分別代表遠日點和近日點, 如圖三, 此時 $\dfrac{du}{d\varphi} = 0$



圖三

所以 $\dfrac{du}{d\varphi} = \sqrt{-(u-u_2)(u-u_1)}$, 可以利用分離變數來求下式的積分

$$\int \frac{du}{\sqrt{(u_2-u)(u-u_1)}} = \varphi. \tag{4}$$

我們將在第三節將 (4) 式與廣義相對論方程式比較。

[6] (3) 之解出, 主要是靠兩個守恆量, E 和 $r^2\dot{\varphi} = h$。一方面可以將 $\frac{dr}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}$, 併爲 $\frac{dr}{d\varphi}$, 另一方面亦可將方程中的 $\dot{\varphi}$ 以 $h\,/\,r^2$ 表示。最後再以 $u = \frac{1}{r}$ 代入, 解 u。讀者不妨將 (3) 之解代入 (2) 式驗算。

二

當只有太陽位於坐標原點時, 一個最簡單且滿足愛因斯坦場方程式的度規解是 1915 年底由 Schwarzschild 提出的, 它的球坐標表示如下[7]

$$c^2d\tau^2 = c^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \quad (5)$$

式中, 太陽位居原點, G是萬有引力常數, M是太陽的質量, $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ 是直角坐標。注意到, 如果 $M=0$, 上述的解就回到

$$c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

此即所謂的 Minkowski flat metric.

Schwarzschild metric 的特徵是

(1) 它是球對稱的, 與時間無關, 並且只有在 dt^2 和 dr^2 前有非常數的係數。

(2) 它在 $r\to\infty$ 時, 回到 Minkowski flat metric。

(3) 雖然 $r=0$ 是奇異點, 但在 $r>0$ 時, 滿足真空的愛因斯坦場方程式 $R_{\mu\nu}=0$。

在上述三個條件下, Schwarzschild 解是唯一的。

廣義相對論要求在四維時空中, 根據質 (能) 分佈, 找出滿足愛因斯坦方程式的度規

$$c^2d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,$$

並以測地線方程組描寫質點的運動。以下我們將以 Lagrangian $L=\dfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ 方法來得到水星的測地線方程式。注意到在 (4) Schwarzschild metric 的情形, 只有前兩項係數與 r 有關。(請參閱附錄)

現在, 假定水星在 $\theta=\pi/2$ 的平面上運動, 取 Lagrangian L,

$$2L = c^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2,$$

仿愛氏水星論文, 令 $\alpha=\dfrac{2GM}{c^2}$, 則

$$2L = c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2,$$

---

[7] 1915 年 Schwarzschild (1873∼1916) 讀了愛因斯坦的水星論文之後, 在同一年的十二月二十二日寫了一封信給愛因斯坦, 提出一個度規, 滿足真空的場方程式 : $R_{ij}=0$。愛氏的論文採取的是他自己湊出的近似解, 而非 Schwarzschild 的準確解。(見本文參考資料 4) 緊接著在 1916 年發表的《廣義相對論的基礎》, 愛氏在文末有下面的註:
For the calculation I refer to the original papers: A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss,. 1915, p.831; K. Schwarzschild, ibid., 1916, p.189.
愛氏引的第一篇即水星論文 (並見註3), 第二篇即 Schwarzschild 著名的工作"On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory"。愛氏場方程式是 $R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$。Schwarzschild 度規在原點之外滿足 $R_{\mu\nu}=0, T_{\mu\nu}=0, R=R^\mu_\mu=0$。

此處 $\dfrac{dt}{d\tau} = \dot{t}$, $\dfrac{dr}{d\tau} = \dot{r}$, $\dfrac{d\varphi}{d\tau} = \dot{\varphi}$, t 和 φ 均未出現在係數中, 所以 $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 = \dfrac{\partial L}{\partial \varphi}$, 由 Euler-Lagrange 方程得 $\dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0$。於是

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\dot{t} = c^2 k, \tag{6}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi} = h; \tag{7}$$

k, h 是守恆量, h 類似第一節中的角動量守恆, 下面會看到 k 和能量守恆有關。因爲質點運動的自然參數是 τ (proper time), 將 (5) Schwarzschild metric, 兩邊同除以 $d\tau^2$, 得到 $\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$c^2 = c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2,$$

或

$$1 = \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{1}{c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\dot{r}^2 - \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{c^2}.$$

將 (6) 代入,

$$1-\frac{\alpha}{r} = k^2 - \frac{1}{c^2}\dot{r}^2 - \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)r^2\dot{\varphi}^2$$

整理後,

$$k^2 - 1 = \frac{1}{c^2}\dot{r}^2 + \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r},$$

仿愛氏水星論文, 令 $ds = cd\tau$, 再改寫爲

$$\frac{1}{2}\left(k^2-1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \frac{\alpha}{2r};$$

注意: 此式右邊代表相對論的動能與位能之和。式中 $-\dfrac{\alpha}{2r} = -\dfrac{GM}{rc^2}$。

對照水星論文, 愛氏用 A 表

$$\frac{1}{2}\left(k^2-1\right), \tag{8}$$

而用 B 表

$$r^2\frac{d\varphi}{ds}\left(=\frac{h}{c}\right), \tag{9}$$

用 α 表 $\dfrac{2GM}{c^2}$。

所以在水星論文中

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \frac{\alpha}{2r}.$$

現以“$\prime$”代表對 $s=cd\tau$ 的微分, 上式兩邊同除 $\frac{1}{2}\varphi'^2$, 得

$$\frac{2A}{\varphi'^2}=\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)r^2-\frac{\alpha}{r\varphi'^2}.$$

由 (9), $\varphi'=\frac{B}{r^2}$ 代入得

$$\frac{2A}{B^2}r^4=\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)r^2-\frac{\alpha r^3}{B^2}.$$

令 $u=\frac{1}{r}$,

$$\frac{2A}{B^2u^4}=\left(-u^{-2}\frac{du}{d\varphi}\right)^2+(1-\alpha u)\frac{1}{u^2}-\frac{\alpha}{B^2}\frac{1}{u^3},$$

或

$$\frac{2A}{B^2}=\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2(1-\alpha u)-\frac{\alpha}{B^2}u.$$

整理後得

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\frac{2A}{B^2}+\frac{\alpha}{B^2}u-u^2+\alpha u^3, \tag{10}$$

式中 $\alpha=\frac{2GM}{c^2}$, 此即水星論文的第 (11) 式, 愛氏在水星論文用 x 表 $\frac{1}{r}$。

三

回顧在第一節中的牛頓方程式 (2)

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\frac{2E}{h^2}+\frac{2GM}{h^2}u-u^2,$$

和第二節中的廣義相對論方程式 (10)

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\frac{2A}{B^2}+\frac{\alpha}{B^2}u-u^2+\alpha u^3.$$

此二式極爲相似, A 是動能和位能之和, B 是角動量的大小。現在的任務是如何求 $u=u(\varphi)$? 注意到 (10) 式比 (2) 式多了一個三次方項 αu^3, 此項使

$$\int du\Big/\sqrt{\frac{2A}{B^2}+\frac{\alpha}{B^2}u-u^2+\alpha u^3} \tag{11}$$

變得困難。愛氏的方法是將 (2) 式中之 $\dfrac{2E}{h^2}+\dfrac{2GM}{h^2}u-u^2$ 看成 $-\left(u-\dfrac{1}{r_1}\right)\left(u-\dfrac{1}{r_2}\right)$, 並將 $\dfrac{2A}{B^2}+\dfrac{\alpha}{B^2}u-u^2+\alpha u^3$ 當成是 $\alpha\left(u-\dfrac{1}{r_3}\right)\left(u-\dfrac{1}{r_2}\right)\left(u-\dfrac{1}{r_1}\right)$。式中之 r_1, r_2 即水星遠日點和近日點到太陽的距離 (圖三)。

令 $\dfrac{1}{r_i}=\alpha_i$ 則

$$\frac{2A}{B^2}+\frac{\alpha}{B^2}u-u^2+\alpha u^3=\alpha\left(u-\alpha_1\right)\left(u-\alpha_2\right)\left(u-\alpha_3\right),$$

而 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\dfrac{1}{\alpha}$。

$$\begin{aligned}\text{上式}&=\alpha\left(u-\alpha_1\right)\left(u-\alpha_2\right)\left(u-\frac{1}{\alpha}+\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\right)\\&=\left(u-\alpha_1\right)\left(u-\alpha_2\right)\left(\alpha u-1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right)\\&=\left(u-\alpha_1\right)\left(u-\alpha_2\right)\left(\alpha u-1\right)\left(1+\frac{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha u-1}\right).\end{aligned}$$

因 αu 及 $\alpha(\alpha_1+\alpha_2)$ 甚小[8] 故上式

$$\approx\left(u-\alpha_1\right)\left(u-\alpha_2\right)\left(\alpha u-1\right)\left(1-\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right).$$

而 (11) 式中被積分者變成

$$\frac{1}{\sqrt{\left(u-\alpha_1\right)\left(u-\alpha_2\right)\left(\alpha u-1\right)\left(1-\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right)}}\approx\frac{\left(1+\frac{1}{2}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right)\left(1+\frac{1}{2}\alpha u\right)}{\sqrt{\left(u-\alpha_1\right)\left(\alpha_2-u\right)}},\tag{12}$$

式中 $\alpha_i=\frac{1}{r_i}$, r_1 是遠日點, r_2 是近日點。愛氏要計算

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\left(1+\frac{1}{2}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right)\left(1+\frac{1}{2}\alpha u\right)}{\sqrt{\left(u-\alpha_1\right)\left(\alpha_2-u\right)}}du=\Delta\varphi.\tag{13}$$

[8]1. 首先, 注意到 (10) $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\frac{2A}{B^2}+\frac{\alpha}{B^2}u-u^2+\alpha u^3$ 各符號的單位是 u (長度$^{-1}$), A(無單位), B(長度), α(長度), 整個式子的單位是長度$^{-2}$。

2. (10) 式, (11) 式 $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$ 恆正, $=\frac{2A}{B}+\cdots+\alpha u^3=\alpha\left(u-\alpha_1\right)\left(u-\alpha_2\right)\left(u-\alpha_3\right)$, $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$, u 的範圍必需在 α_1,α_2 之間。

3. $\alpha=\frac{2GM}{c^2}$, 若將重力常數 $G=6.672\times10^{-11}$ 公尺^{3}公斤$^{-1}$秒$^{-2}$、太陽質量 $=2\times10^{30}$ 公斤、光速 $=3\times10^8$ 公尺/秒代入, 得 $\alpha=2\times6.672\times10^{-11}\times2\times10^{30}\,/\,9\times10^{16}$ 公尺 $\approx3\times10^3$ 公尺 $=3$ 公里。

在 (12) 式中, 與 1 比較, $\alpha(\alpha_1+\alpha_2)=3\times\left(\dfrac{1}{69816900}+\dfrac{1}{46001200}\right)$。而 $\alpha u, u$ 介於積分上下限 α_1,α_2 之間, 所以 αu 也很小。這一個近似式 (12) 及 (13) 是愛氏水星論文計算之本, 在水星論文中愛氏直接給出答案 $\pi\left(1+\dfrac{3}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right)$, 沒有計算過程。本文提供仔細的計算, 供讀者參考。

若與第一節 (4) 式比較, (13) 式中, 當 $\alpha=0$ 時, 此積分的答案應爲 π。愛氏認爲當 $\alpha=\dfrac{2GM}{c^2}$ 時, (13) 式之積分應爲 $\pi+\delta\varphi$, 此一 $\delta\varphi$ 即水星在經過半個週期, 近日點之進動角度。

以下計算

$$\left(1+\frac{1}{2}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right)\int\frac{1+\frac{1}{2}\alpha u}{\sqrt{(u-\alpha_1)(\alpha_2-u)}}du, \tag{14}$$

$$(u-\alpha_1)(\alpha_2-u)=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)^2}{4}-\left(u-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2.$$

令 $z=u-\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, 則 $u=\alpha_1$, $z=\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$; $u=\alpha_2$, $z=\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$, $dz=du$。

$$\text{積分式}=dz\left(1+\frac{\alpha}{2}z+\frac{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)}{4}\right)\Big/\sqrt{\frac{(\alpha_2-\alpha_1)^2}{4}-z^2}.$$

不定積分, 分成兩項, $1+\frac{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)}{4}\Big/\sqrt{\frac{(\alpha_2-\alpha_1)^2}{4}-z^2}$ 和 $\frac{\alpha}{2}z\Big/\sqrt{\frac{(\alpha_2-\alpha_1)^2}{4}-z^2}$

第一項,

$$\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{4}-z^2}}=\sin^{-1}\frac{z}{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}=\sin^{-1}\frac{2z}{\alpha_2-\alpha_1}$$

代回 (14),

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{2}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right)\left[1+\frac{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)}{4}\right]\sin^{-1}\frac{2z}{\alpha_2-\alpha_1}\Bigg|_{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}\\
&=\left(1+\frac{1}{2}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right)\left[1+\frac{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)}{4}\right]\left(\sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(-1)\right)\\
&=\left(1+\frac{1}{2}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right)\left[1+\frac{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)}{4}\right]\cdot\pi.
\end{aligned}$$

第二項計算 $\displaystyle\int\frac{\frac{\alpha}{2}zdz}{\sqrt{\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{4}-z^2}}$, 下限是 $\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$, 上限是 $\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$, 這相當於求定積分 $\displaystyle\int_{-m}^{m}\frac{ydy}{\sqrt{m^2-y^2}}$, 被積分者乃一奇函數, 由對稱性, 答案顯然是 0。因此, 愛氏所得是

$$\left[1+\frac{1}{2}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right]\left[1+\frac{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)}{4}\right]\pi\approx\left(1+\frac{3}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right)\pi,$$

此爲半個週期 44 天之量, 先將其 2 倍再扣掉 2π, 則一個週期之進動量爲 $\dfrac{3}{2}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\pi$。現

$\alpha_1 = \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1}{a(1+e)}$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{a(1-e)}$, a 是軌道半長軸, e 是離心率。

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{2}{a(1-e^2)}.$$

一個週期 T 之進動量爲 $\dfrac{3\alpha}{a(1-e^2)}\pi$。利用克卜勒週期律 $\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{GM}{4\pi^2}$,

$$\frac{3\alpha}{a(1-e^2)}\pi = \frac{3a^2\alpha\pi}{a^3(1-e^2)} = \frac{3a^2\alpha 4\pi^2}{GMT^2(1-e^2)}\pi.$$

將 $\alpha = \dfrac{2GM}{c^2}$ 代入,

$$\text{原式} = 24\pi^3\frac{a^2}{T^2c^2(1-e^2)},$$

此爲水星論文之 (14) 式。

再乘以 $\dfrac{100\text{年}}{T\text{年}}$。先將 $24\pi^3\dfrac{a^2}{T^2c^2(1-e^2)}$ 中 $a = 57909100$ 公里, $T = 88 \times 86400$秒, $c = 3 \times 10^5$ 公里/秒, $e = 0.206$ 代入, 然後再乘以 $\dfrac{100}{T} = \dfrac{100 \times 365}{88}$ (代表 100 年累積的進動)。最後再乘以 $\dfrac{180}{\pi} \times 3600$ 化爲弧秒, 因此得到 $42.7 \approx 43$ 弧秒。

附錄

愛因斯坦可能是第一位引進 pseudo-Riemannian Manifold 的「幾何學家」。原來, Riemannian manifold 是指一個流形 M, 配備了一個對稱正定的二階度規張量, 亦即 $\sum g_{ij}dx^i dx^j$, (g_{ij}) 是正定的。在廣義相對論中, 四維流形 M 配備的是一個要求行列式 $\det(g_{ij}) \neq 0$ 的二階對稱張量, 但是 (g_{ij}) 在對角線化時, 具 $+---$ 的記號。

一個最簡單的情形就是 Minkowski 的四維平直時空 $\mathbb{R}^4$, 配備了 $c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ 的度規張量, 代表無重力亦即狹義相對論的情形。

其次是 Schwarzschild metric:

$$c^2d\tau^2 = c^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

式中 $m = GM\,/\,c^2$。(見本文第二節)

此度規在原點是一個奇異點, 在原點之外, 滿足 Ricci 張量 $R_{ij} = 0$, 亦即真空中的愛因斯坦場方程式。在一個具度規張量 $\sum g_{ij}dx^i dx^j$ 的流形上, 我們定測地線如下。

定義 1. 一條參數曲線 $\omega(s)=(x^i(s))$ 如果滿足

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0,$$

就稱爲一條測地線。

式中 $\Gamma^i_{jk}=\dfrac{1}{2}g^{i\ell}(g_{\ell j,k}+g_{\ell k,j}-g_{jk,\ell})$ 稱爲此度規的 Christoffel 記號。(注意, 如果一個足碼上下同時出現, 代表求和, 例如 $g_{ij}dx^idx^j$ 代表 $\sum_{ij}g_{ij}dx^idx^j$, (g^{ij}) 是 (g_{ij})的反矩陣, 而 $g_{\ell j,k}$代表 $g_{\ell j}$ 對 x^k 的偏微分)

通常, 若要從給定的 $g_{ij}dx^idx^j$ 來寫下測地線方程, 計算量很大, 但是可以另闢蹊徑如下: 定 $L=\dfrac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ ($\dot{x}^i$ 是指參數曲線 $(x^i(s))$ 對 s 的微分), 而求 L 的 Euler-Lagrange 方程式:

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}-\frac{\partial L}{\partial x^i}=0,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

可以驗證, 此一方程組等價於測地線方程組 (參考 J. Foster, J. D. Nightingale 所著 *A Short Course in General Relativity*, 2^{nd} ed. pp.62∼63)

利用 L 及 Euler-Lagrange 方程的好處是

(1) 不必先計算 Γ^k_{ij},

(2) 如果有一個坐標 x^i 未出現在 L 中, 則 $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}\right)=0$, 因此 $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}$ 就是一個守恆量, 守恆量越多, 求解測地線方程就越容易。

本文中所引水星論文, 求解運動方程的方式正是從兩個守恆量 A,B 出發, 來簡化變數之間的關係 (見第二節 (10) 式)

參考資料

1. 愛因斯坦水星論文(見本文註3)。
2. 愛因斯坦 《廣義相對論的基礎》(見本文註3)。
3. J. Foster and J. D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity.* 2^{nd} ed. 1995 Springer-Verlag, N.Y.Inc.
4. Einstein's Paper "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from General Relativity Theory" Anatoli Andrei Vankov IPPE, Obninsk, Russia; Bethany College, KS, USA.

—本文作者爲台大數學系退休教授—