

數學中『神奇』的大統一理論 ——朗蘭茲綱領

邵紅能

數學家一直想要找尋質數的規律。質數就像是數論的原子元素，是演算法研究的基礎。它們的數量是無限的，但它們的分佈卻似乎是隨機地散落在數位中。爲了找到質數中的規律，比如它們出現的頻率，數學家必須將它們與其他事物聯繫起來。準確說來，質數就像一個密碼，當你找到正確的閱讀金鑰時，它就變成了令人愉悅的資訊。質數看起來非常隨機，但通過朗蘭茲綱領，就會發現它們有著一個非常複雜的結構，能夠與各種其他事物聯繫起來。

2018年3月20日，挪威科學與文學院宣佈，『2018年度的阿貝爾 (Abel) 獎』授予普林斯頓高等研究院的羅伯特·朗蘭茲 (Robert Langlands)，以表彰他提出了連接表示論和數論的極具遠見的綱領。他所提出來的『朗蘭茲綱領』試圖構建數學中的大統一理論，這是一代代數學家所追求的目標。

羅伯特·朗蘭茲，加拿大數學家，普林斯頓高等研究院的榮譽退休教授、加拿大皇家學會會員、倫敦皇家學會會員。其在非交換調和分析、自守形式理論和數論的跨學科領域進行深入研究，得出把它們統一在一起的朗蘭茲綱領，並首先證明 $GL(2)$ 的情形，這個綱領推廣了阿貝爾類體論、赫克 (Hecke) 理論、自守函數論以及可約群的表示理論等。朗蘭茲榮獲美國數學會科爾獎、美國國家科學院首屆數學獎以及沃爾夫獎、邵逸夫獎數學科學獎、阿貝爾獎等衆多國際大獎。

朗蘭茲 1936年10月6日出生於加拿大不列顛哥倫比亞的新威斯敏斯特。1953年，進入英屬哥倫比亞大學學習，1957年，獲學士學位，1958年，獲碩士學位。隨後，他赴美在耶魯大學學習，1960年獲博士學位，同年被任命爲講師。後來，在普林斯頓工作。朗蘭茲所提出的朗蘭茲綱領探討的是現代數學中的兩大支柱『數論與調和分析』之間的深層聯繫。數論研究的數位之間的演算法關係，被認爲是『最純』的數學領域；調和分析是數學的一個重要分支，研究及擴展富氏極數及富氏變換。之前，這兩個領域被認爲是毫無關聯的，而它們之間的聯繫其實有著深遠的影響，被數學家用來解答與質數性質有關的問題。同時，朗蘭茲綱領提出了數論中的伽羅瓦 (Galois) 表示與分析中的自守型之間的一個關係網。

1. 高深莫測的『朗蘭茲綱領』

有一個與質數結構相關的問題是：『哪些質數能用兩個質數的平方和表示。』在17世紀，數論學家發現，所有能用兩個整數的平方和表示的質數都有一個共同性質，當它們除以4時，餘1。這一發現揭示了質數的一種隱藏結構。到了18世紀末期，數學家高斯 (Gauss) 對這一奇妙的關聯進行了概括，它的『互反律』用公式將那些等於兩個整數的平方和的質數，與除以4餘1這個特徵聯繫了起來。在朗蘭茲的信中，他在高斯發現的互反律基礎上，提出了更廣泛的延伸。高斯的定律適用於指數不高於2的二次方程。但朗蘭茲認為，在三次、四次等高階方程中產生的質數，應該與調和分析成互反關係。朗蘭茲綱領就將多項式方程的質數值與分析和幾何學中研究的微分方程的譜相聯繫到一起，並認為這兩者之間應該存在互反關係。因此，我們應該能通過瞭解哪些數字出現在相應的光譜中，來表示哪些質數出現在特定的情況中。

1967年，朗蘭茲首次闡述了這一構想，當時年僅30歲的朗蘭茲在一封寫給著名數學家安德列·韋伊 (André Weil) 的信中提到了這一計畫，這是一個思考數學的全新方式。在這封17頁長的信中，他謙和的寫道：「如果您願意把它看作是純粹的推測，我會很感激；如果不願意，我相信您身邊就有一個廢紙簍。」從那時起，一代又一代的數學家開始接受並擴展了他的構想。現在，朗蘭茲綱領所涵蓋的領域非常多，因此通常被認為是數學界的『大統一理論』。就數學史而言，這可以說是革命性的。

1979年，朗蘭茲發展了一項雄心勃勃的革命性理論，將數學中的兩大分支數論和群論之間建立了新的聯繫。通過一系列的推測和分析，發現了與涉及整數的公式有關的不可思議的對稱性，並以此提出『朗蘭茲綱領』。朗蘭茲知道，證明自己理論立基的假設這項任務需要幾代人的共同努力，而證明『基本引理』將是證明這項假設的合理跳板。他和同事以及學生雖然能夠證明這一基本定理的特殊情況，但證明普通情況所面臨的挑戰卻大大超出他的預想。這項難度極高的工作整整歷時30年才由數學家吳寶珠 (Ngô Bảo Châu) 證明完成。

朗蘭茲綱領是當今數學領域非常活躍的研究方向，它聯繫了三種來源各異的數學物件：伽羅瓦表示 (算術物件)、自守表示 (分析物件) 和代數簇的各種上同調理論 (幾何物件)，使得相應的三種不變數 [阿廷 (Artin) L 函數、自守 L 函數、哈斯-威爾 (Hasse-Weil) L 函數] 相匹配。這三大領域的結合為數論問題提供了有力的杠杆，懷爾斯 (Wiles)、泰勒 (Taylor) 等證明的谷山-志村 (Taniyama-Shimura) 猜想便是一個範例。朗蘭茲綱領的核心問題是函子性 (functoriality) 猜想，蘊含了很多著名的猜想，如阿廷猜想、拉馬努金 (Ramanujan) 猜想、佐藤-塔特 (Misaki-Tate) 猜想等。其中，跡公式是研究朗蘭茲綱領的一個重要工具。可見，研究朗蘭茲綱領的團隊需要數論、代數群、李群表示論和代數幾何專長的研究人員。

如今，研究朗蘭茲綱領的數學家正試圖證明這種關係以及其他許多相關的猜想。與此同時，他們正在用朗蘭茲型的聯繫來解決那些本看似遙不可及的問題。其中最著名的成果是數學家安

德魯·懷爾斯在20世紀90年代初對費馬大定理的證明。懷爾斯的證明部分取決於朗蘭茲早在幾十年前就預言過的數論和分析之間的關係。1996年，懷爾斯和羅伯特·朗蘭茲分享了10萬美元的沃爾夫獎。朗蘭茲提出的朗蘭茲綱領，是一個使數學各領域之間證明統一化的猜想，而懷爾斯通過對谷山-志村猜想的證明，將橢圓曲線和模形式統一了起來，這個成功為朗蘭茲綱領注入了生命力，一個領域中的問題可以通過並行領域中的對應問題來解決，這是一個可能使數學進入又一個解決難題的黃金時期的突破性工作。

另外，越南數學家吳寶珠試圖用公式表述一項有關基本引理的精巧證法，終於在2009年證明了其正確性，全世界的數學家終於可以鬆一口氣。在這一領域，數學家過去30年的工作就是本著這樣一種原則進行研究，即基本引理是正確的並且將在未來的某一天得到證明。談到未來，吳寶珠說：「我只是證明了綱領的基本引理，不是整個綱領。我們的下一個目標是整個朗蘭茲綱領，基本引理只是它的基礎，是其中一座小山峰。爬過這座山峰後，現在可以瞭望朗蘭茲綱領了。前面是一座大山，我們的問題是如何爬上去。其中一件事是朗蘭茲回來了，他將為我們指示解決整個綱領的新路線。我認為，整個綱領也許需要我一生的時間。」

事實上，朗蘭茲綱領是數學中一系列影響深遠的構想，聯繫數論、代數幾何與約化群表示理論。這些年來，朗蘭茲綱領已取得巨大的擴展。然而，當拋開那些為實現朗蘭茲的構想而建立的複雜系統時，會發現激勵這個龐大構想最初動力的仍是最基本的數學問題。理解方程中出現質數的性質，基本上就等同於對算術世界的基本分類。

2. 朗蘭茲，摘取數學巨獎『阿貝爾獎』

為什麼朗蘭茲綱領是數學的大一統理論？朗蘭茲綱領是一個很廣闊的問題，有許多數學專家工作于此。朗蘭茲綱領的思想已經滲透到許多數學領域中，所以，有人鑽研數論，或調和分析，或幾何，或數學物理研究不同的物件，但是發現了相似的現象。朗蘭茲憑藉其數學才華與遠見卓識，看到了數學世界中的很大一部分內容能夠以一種完全意想不到的方式聯繫在一起。他告訴人們，代數中的基本物件跟分析中同樣基本的物件牢牢地栓在一起。一方面，存在著決定數和代數方程如何運作的基本數學事實；另一方面，又存在著決定函數和微分方程性質的基本事實。因此，朗蘭茲提出的這兩類物件之間的關係提供了統一數學的原則，這是有深遠意義的。

日前，挪威科學與文學院宣佈『2018 年度的阿貝爾獎』授予朗蘭茲。何謂阿貝爾獎？阿貝爾獎是一項挪威設立的數學界大獎。每年頒發一次。2001 年，為了紀念 2002 年挪威著名數學家尼爾斯·亨利克·阿貝爾二百周年誕辰，挪威政府宣佈將開始頒發此種獎金。自 2003 年起，一個由五名數學家院士組成的委員會負責宣佈獲獎人。獎金的數額大致同諾貝爾獎相近。設立此獎的一個原因也是因為諾貝爾獎沒有數學獎項。2001 年，挪威政府撥款 2 億挪威克朗作為啟動資金。擴大數學的影響，吸引年輕人從事數學研究則是設立阿貝爾獎的主要目的。2003 年

3 月 23 日，第一個獲獎人名宣佈，六月獎金第一次正式頒發。

翻開近世數學的教科書和專門著作，阿貝爾這個名字是屢見不鮮的：「阿貝爾積分、阿貝爾函數、阿貝爾積分方程、阿貝爾群、阿貝爾級數、阿貝爾部分和公式、阿貝爾基本定理、阿貝爾極限定理、阿貝爾可和性等等。」很少幾個數學家能使自己的名字同近世數學中這麼多的概念和定理聯繫在一起。16 歲那年，他遇到了一個能賞識其才能的老師霍姆伯 (Holmboe) 介紹他閱讀牛頓 (Newton)、歐拉 (Euler)、拉格朗日 (Lagrange)、高斯的著作。大師們不同凡響的創造性方法和成果，一下子開闊了阿貝爾的視野，把他的精神提升到一個嶄新的境界，他很快被推進到當時數學研究的前沿陣地。後來他感慨地在筆記中寫下這樣的話：「要想在數學上取得進展，就應該閱讀大師的而不是他們的門徒的著作」。阿貝爾在五次方程和橢圓函數研究方面遠遠的走在當時研究水準的前面，但因學術始終無法得到承認而貧病交加，27 歲不到就染上肺結核去世。法國數學家埃爾米特 (Hermite) 曾感歎地說：「阿貝爾所留下的思想，可供數學家們工作 150 年。」

近年來，阿貝爾獎獲獎者分別是：2013 年，比利時數學家德利涅 (Deligne)，以嘉獎其對代數幾何的開創性貢獻及其對『數論』、『表示論』及相關領域的『變革性』影響。2014 年，俄羅斯數學家雅科夫·西奈 (Yakov G. Sinai)，以表彰其在動力系統、遍歷性理論以及數學物理學方面所作出的卓越貢獻。2015 年，美國數學家約翰·納什 (John Nash) 和路易斯·尼倫伯格 (Louis Nirenberg)，以表彰他們在非線性偏微分方程方面所作出的卓越貢獻。2016 年，英國數學家安德魯·懷爾斯，以表彰他在證明費馬大定理方面所作出的卓越貢獻。2017 年，法國數學家伊夫·梅耶爾 (Yves Meyer)，以表彰他在小波分析理論發展方面做出的重要貢獻。2018 年，加拿大數學家羅伯特·朗蘭茲，以表彰他提出了連接表示論和數論的極具遠見的綱領。

數學打開了一扇門，讓我們瞭解如何打破傳統的壁壘，如何在追求真理的過程中充分發揮想像力。無窮理論的創立人格奧爾格·康托爾 (Georg Cantor) 說：「數學的精義在於蘊藏其中的自由。」數學教我們大膽分析現實，研究事實，並以事實為指引義無反顧地朝前邁進。數學把我們從教條與偏見中解放出來，並幫助我們培養創新突破的能力。正因為這些，數學才得以代代相傳，延續至今。如前所述，在 1967 給數學家安德列·韋伊的信中，數學家朗蘭茲提出一個著名的猜想，現稱為朗蘭茲互反猜想。這個猜想後演變成朗蘭茲綱領，在過去幾十年對數學的發展產生了極大的影響。

自提出以來，朗蘭茲綱領的影響近年來與日俱增，與它有關的每一個新的進展都被看作是重要的成果。特別是，自從 1990 年以來，有 3 位數學家的工作因為部分解決了朗蘭茲綱領中的猜想，從而獲得了菲爾茲獎，這足以看出朗蘭茲綱領的重要性。第一位因為研究朗蘭茲綱領而獲得菲爾茲獎的數學家是烏克蘭數學家弗拉基米爾·德林費爾德 (Vladimir Drinfeld)。由於他在朗蘭茲綱領和量子群這兩個領域取得了決定性的突破並促進了一大批研究的進展，他於

1990 年獲得菲爾茲獎。第二位因為研究朗蘭茲綱領而獲得菲爾茲獎的數學家是洛朗·拉佛閣 (Laurent Lafforgue)。他在朗蘭茲綱領研究方面取得了巨大的進展，他證明了與函數體情形相應的整體朗蘭茲綱領，於 2002 年獲得了菲爾茲獎。拉佛閣所證明的相應的整體朗蘭茲綱領，對更抽象的所謂函數體而非通常的數體情形提供了這樣一種完全的理解。第三位因為研究朗蘭茲綱領而獲得菲爾茲獎的數學家是之前提及的越南數學家吳寶珠。『通過引入新的代數-幾何學方法，吳寶珠證明了朗蘭茲綱領自守形式中的基本引理』，該成果於 2009 年被美國《時代》週刊列為年度十大科學發現之一。2010 年 8 月 19 日，在印度海德拉巴市召開的第 26 屆國際數學家大會上，吳寶珠因證明朗蘭茲綱領的基本引理獲得國際數學界大獎『菲爾茲獎』。

代數、幾何、數論、分析與量子物理等領域的研究內容乍一看似乎相去甚遠，但是朗蘭茲綱領卻在這些不同的數學分支之間建立起千絲萬縷的聯繫。如果我們把這些分支看成數學這個秘密世界中的一塊塊大陸，朗蘭茲綱領就是功能強大的運輸工具，可以讓我們在各個大陸之間暫態往返。

3. 一座美麗的橋樑，溝通數學核心分支

在數學中，被稱為『綱領』的成果屈指可數，出名的僅有愛爾蘭根 (Erlanger) 綱領、希爾伯特 (Hilbert) 綱領和朗蘭茲綱領這三個。愛爾蘭根綱領和希爾伯特綱領是 19 世紀末至 20 世紀初的產物，它們在數學史上都產生了重要的作用，影響了數學相關領域很長的時間。而朗蘭茲綱領，它誕生於 20 世紀 60 年代，它的誕生已經引領了數學發展 40 餘年，並且仍將繼續引領著數學的發展。

其實，我們認識數學基本上都是從整數開始的，然後是簡單的幾何與多項式方程。一個最古老的數學分支：數論，就是研究整數的。整數中間有無窮的魅力、奧秘和神奇，始終吸引著最富智慧的數學家和業餘愛好者。著名的問題包括哥德巴赫 (Goldbach) 猜想、孿生素數猜想、費馬 (Fermat) 大定理等。幾何，同樣是最古老的數學分支。古希臘人對直線、圓周以及圓錐曲線的研究到後來發展成為代數幾何，這個分支專門研究多項式方程對應的圖形。過去一百多年來，代數幾何的發展非常迅速，大家輩出，在數學其他分支和數學物理中都有很深刻的應用。已獲菲爾茲獎的數學家中約三分之一的工作與代數幾何有關。然而，群論的產生只有一百多年，源於多項式方程的求根公式。人們很早就會解一元一次方程和一元二次方程，一元三次方程和四次方程的公式解在十六世紀被找到。一個重要的數學分支『群論』在探索方程的根式解的過程中誕生了。方程是否有根式解與相應的群是否可解為一回事。群論的誕生改變了數學的面貌，影響幾乎遍及整個數學，在物理和化學及材料科學中有很多的應用，是研究對稱的基本工具。

如之前所述，朗蘭茲綱領指出這三個相對獨立發展起來的數學分支：數論、代數幾何和群表示論，實際上是密切相關的，而連接這些數學分支的紐帶是一些特別的函數，被稱為 L -函數。

L -函數可以說是朗蘭茲綱領的中心研究物件。數學界著名的七個『千禧年大獎問題』中有兩個就是關於 L -函數的，分別是黎曼 (Riemann) 假設和 BSD 猜想。

朗蘭茲提出了怎樣對一般的簡約群的自守表示定義一些 L -函數，並猜測一般線性群自守表示的一些 L -函數跟來自數論的伽羅瓦群的一些表示的 L -函數是一樣的。這個猜想被朗蘭茲本人和其他數學家進一步拓展、細化，逐漸形成了一系列揭示數論、代數幾何、表示論等學科之間深刻聯繫的猜想。朗蘭茲綱領就是對這些猜想和相關問題的研究。

特別地，拉佛閣所證明的相應的整體朗蘭茲綱領，對更抽象的所謂函數體而非通常的數體情形提供了這樣一種完全的理解。我們可以將函數體設想為由多項式的商組成的集合，對這些多項式商可以像有理數那樣進行加、減、乘、除。拉佛閣對於任意給定的函數體建立了其伽羅瓦群表示和與該體相伴的自守型之間的精確聯繫。拉佛閣的研究是以 1990 年菲爾茲獎獲得者弗拉基米爾·德林費爾德的工作為基礎，後者在 20 世紀 70 年代證明了相應的朗蘭茲綱領的特殊情形。拉佛閣首先認識到德林費爾德的工作可以被推廣而為函數體情形的相應的朗蘭茲綱領提供一幅完整的圖像。在這一工作的過程中，拉佛閣還發現了一種將來可能被證明是十分重要的新的幾何構造，所有這些發展的影響正在波及整個數學。

朗蘭茲綱領是對現在數學諸多領域一種統一性的看法和普遍性的觀點，由一系列規模宏大的猜想所組成，其中有些猜想甚至還沒有形成明確的數學語言。朗蘭茲綱領還有很多的各種各樣的推廣，比如說幾何朗蘭茲綱領可能和物理關係更密切一點，還有 p -adic 的朗蘭茲綱領和數論的關係更加密切一點這裡還有很多的問題等等大家去探索。朗蘭茲綱領是數學中一系列影響深刻的構想，聯繫了數論、代數幾何以及群表示理論。依靠朗蘭茲綱領，數學家在一個領域不能解決的問題，可以在其他領域證明解決。而如果在另一個領域內仍然難以找到答案，那麼可以把問題再轉換到下一個數學領域中，直到它被解決為止。所以，朗蘭茲綱領是 21 世紀最大的數學難題，也是未來最有潛力的研究領域！

—本文作者任教中國上海市城市科技學校—

2017 全國技專院校「文以載數創作獎」作品選集

平行線 文 / 冬芯

我望向你 你望向我
過去的點滴仍清晰可見
我在你的左邊 你在我的右邊
我們努力讓彼此間的距離改變
卻還是只能往自己的那條路向前
沒有交叉點

我們不管走得多遠都沒有碰面的終點
你近在眼前 卻似在天邊
愛慕彼此的心就此擱淺
而淚水只能含在心裡面
模糊了視線

—本文作者就讀文藻外語大學英國語文科—

2017 全國技專院校「文以載數創作獎」作品選集

人生象限 文 / 蔡佩玲

人
並非因為青春 在只有時間價值的象限裡
消蝕 而 恐懼，
而是不了解該如何
去 越過 自己設定的軸線，
看到自己 一樣是站在世界中心的 原點
XY 軸 是你 能無限發展的廣度，
向上
是 Z 軸給你無限飛翔的高度
向下
則是予你扎根的深度。

—本文作者就讀中國科技大學室內設計系—