

# 透過動態的函數迭代系統觀察 莫必烏斯變換分類的不變圖形

林保平

## 一、莫必烏斯變換簡介

在幾何及複變分析中, 莫必烏斯變換 (Möbius transformation or linear fractional function) 是指形如  $w = M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $ad - bc \neq 0$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  的函數, 其中  $\mathbb{C}$  表示複數集合。

(1) 若  $c = 0$ , 由於  $ad - bc \neq 0$ , 故  $d \neq 0$ , 故  $M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$

故此時,  $M$  為平移 (translation)、放縮與旋轉 (dilation and rotation) 函數的合成。

(2) 若  $c \neq 0$ , 由於  $M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \left(b - \frac{ad}{c}\right) \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} = \left(-\frac{ad - bc}{c^2}\right) \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$

令  $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$ ,  $T_2(z) = \frac{1}{z}$ ,  $T_3(z) = -\frac{ad - bc}{c^2}z$ ,  $T_4(z) = z + \frac{a}{c}$ ,

則  $M(z) = T_4(T_3(T_2(T_1(z)))) = \frac{az + b}{cz + d}$ .

十分容易看出  $T_1$  及  $T_4$  是平移函數,  $T_2$  為複反轉 (complex inversion) 函數,  $T_3$  為放縮與旋轉函數。

由 (1), (2) 可知,  $M$  為一系列平移、放縮、旋轉及複反轉函數的合成。

莫必烏斯變換具有下列性質:

1. 莫必烏斯變換將圓或直線映射成圓或直線。
2. 莫必烏斯變換是保角映射 (conformal mapping)。
3. 非恆等的莫必烏斯變換, 最多有兩個固定點 (fixed point)。
4. 設  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  為相異點,  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$  亦為相異點, 則存在唯一的莫必烏斯變換  $T$ , 使得  $T(z_1) = w_1$ ,  $T(z_2) = w_2$ ,  $T(z_3) = w_3$ 。

5. 莫必烏斯變換具有對稱原理：若兩點為一圓或直線的對稱點，則莫必烏斯變換將點、圓或直線映射之後，其對稱性仍然成立。

### 莫必烏斯變換分類的判別

若將莫必烏斯變換的分子分母同除以  $\sqrt{ad-bc}$ ，我們得到的相同的變換，稱為規格化 (normalized) 的莫必烏斯變換，此時，其新係數  $a', b', c', d'$  具有  $a'd' - b'c' = 1$  之性質。

設  $w = M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad-bc=1$ ，並將莫必烏斯變換分類，設  $\Sigma = (a+d)^2$ ，我們有下列分類的結果，參閱 [https://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius\\_transformation](https://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius_transformation):

- (i) 若  $0 \leq \Sigma < 4$ ，則稱  $M$  為橢圓 (Elliptic) 莫必烏斯變換。
- (ii) 若  $\Sigma = 4$ ，稱  $M$  為拋物 (Parabolic) 莫必烏斯變換。
- (iii) 若  $4 < \Sigma < \infty$ ，稱  $M$  為雙曲 (Hyperbolic) 莫必烏斯變換。
- (iv) 若  $\Sigma \notin \mathbb{R}$ ，稱  $M$  為螺線 (Loxodromic) 莫必烏斯變換。

其實 Deaux (1945) 在其書中 (p.150)，就利用交比 (Cross ratio) 描述有兩固定點的莫必烏斯變換分類的判別。若  $A, B, C, D$  為複平面上代表複數  $a, b, c, d$  的點， $(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{C}$  稱為  $A, B, C, D$  的交比。設  $E, F$  為莫必烏斯變換  $M$  的固定點 (可以是無限大)，設變換  $M$  將  $G$  點映至  $H$  點 ( $E$  映至  $E$ ,  $F$  映至  $F$ )，令  $(EFGH)$  表示  $E, F, G, H$  四複數點的交比，稱為莫必烏斯的不變量 (invariant)，則

- (i) 若  $(EFGH) = 1$ ，則稱  $M$  為拋物莫必烏斯變換。
- (ii) 若  $(EFGH) \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ，則稱  $M$  為雙曲莫必烏斯變換，其中  $\mathbb{R}$  表示實數集合。
- (iii) 若  $(EFGH)$  為虛數且  $|(EFGH)| = 1$ ，則稱  $M$  為橢圓莫必烏斯變換。
- (iv) 若  $(EFGH)$  為虛數且  $|(EFGH)| \neq 1$ ，則稱  $M$  為螺線莫必烏斯變換。

### 莫必烏斯變換的固定點

設  $M$  為非恆等的莫必烏斯變換，令  $\frac{az+b}{cz+d} = z$ ，則  $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ ，其解稱為莫必烏斯變換的固定點 (Fixed Point)。

- (1) 若  $c \neq 0$ ，我們可以得到兩根

$$\alpha = \frac{(a-d) + \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}, \quad \beta = \frac{(a-d) - \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c},$$

故  $M$  有兩個有限的固定點  $\alpha, \beta$  (可能重合)。

(2) 若  $c = 0$ , 此時  $d \neq 0$ , 由於  $M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ , 因  $M(\infty) = \infty$ , 故  $M$  必有一個無限大固定點。但  $(d - a)z - b = 0$ , 亦即  $(d - a)z = b$ ,

(i) 若  $a \neq d$ , 則  $M$  另有一個有限的固定點  $z = \frac{b}{d - a}$ , 亦即  $M$  有兩個固定點  $\frac{b}{d - a}$  及  $\infty$ 。

(ii) 若  $a = d$ ,  $M$  只有一個無限大固定點  $\infty$  (或說有兩個重合的無限大固定點)。

因此從固定點來看, 除了恆等變換外, 莫必烏斯變換  $M$  有下列四類:

CASE I :  $M$  有兩個相異有限固定點。

CASE II :  $M$  有兩個重合的有限固定點。

CASE III :  $M$  有一個有限及一個無限的固定點。

CASE IV :  $M$  有兩個重合的無限固定點。

其實, 兩固定點的莫必烏斯變換的分類與共軸圓束 (coaxial pencil of circles) 有關。

### 共軸圓束

設  $A, B$  為平面上相異兩點, 通過  $A, B$  的所有的圓所成的圓束 (圓心都在  $AB$  線段的垂直平分線  $L$  上), 由於  $AB$  直線為這些圓的共同根軸 (radical axis), 稱這個圓束為過兩點的橢圓共軸圓束, 若將直線視為經過這兩點及無限遠點的圓, 則  $AB$  直線也在此圓束中 (圖 1 左圖)。  $AB$  直線的垂直平分線  $L$ , 就是  $A, B$  兩點的對稱軸, 其實,  $L$  就是使  $\overline{AX} = \overline{BX}$  成立的,  $X$  點的軌跡。

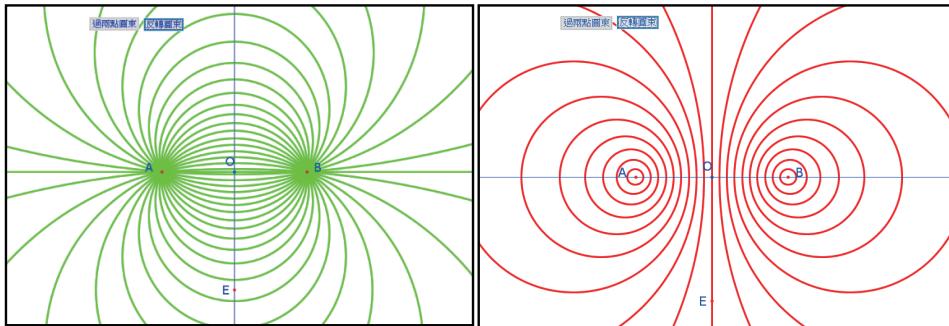


圖 1 左圖：橢圓共軸圓束, 右圖：雙曲共軸圓束

設  $k \in \mathbb{R}$ , 我們若考慮合於條件  $\overline{AX} = k\overline{BX}$  的  $X$  點所成的軌跡, 我們會發現, 它就是一個圓或直線 (證明參看 Pennisi et al., 1962, p.13, Ex.17 或 <https://math.stackexchange>).

com/questions/520469/apollonius-circle-its-radius-and-center), 稱為阿波羅尼斯圓 (Apollonius' circles), 而這個圓正好是使  $A, B$  兩點互成爲反轉點的反轉圓 (inversion circle)。若將點視爲半徑爲 0 的圓, 直線也視爲圓則合於所有實數值的阿波羅尼斯圓也會構成一個圓束, 稱爲  $A, B$  決定的雙曲共軸圓束 (圖 1 右圖),  $AB$  的垂直平分線是他們共同根軸, 它們的圓心都在  $\overleftrightarrow{AB}$  上 (但除了端點  $A, B$ , 不在  $\overline{AB}$  上), 且圓束內的相異圓都不相交。這個圓束的任一個圓 (非退化圓) 都稱爲  $A, B$  兩點的對稱圓。圖 2 左圖展示的是前述兩個圓束同時畫出的畫面, 可以看出其實兩個圓束中的圓互爲正交 (orthogonal)。圖 2 右圖展示兩個圓, 一爲以  $A, B$  兩點做出一個自由的反轉圓 (可代表反轉圓束中任意一個圓), 其圓心爲  $F$ ,  $X$  爲其圓上點, 移動  $X$  可改變圓的位置。另一爲過  $A, B$  的圓 (可代表過  $A, B$  兩點圓束中的任意一個圓), 其圓心爲  $G$ , 移動  $G$  可以改變此圓位置。圖 2 右圖中,  $I$  爲兩圓的交點, 由於  $A, B$  互爲圓  $F$  的反轉像, 故  $\overline{FI}^2 = \overline{FA} \cdot \overline{FB}$ , 故知  $\overleftrightarrow{FI}$  爲圓  $F$  的切線, 故  $\overline{FI} \perp \overline{GI}$ , 故  $\overleftrightarrow{GI}$  也爲圓  $F$  的切線, 故兩圓正交, 由此可知, 前述雙曲及橢圓圓束正交。圓束及其代表圓, 在數學算板中可透過選單簡單作出。

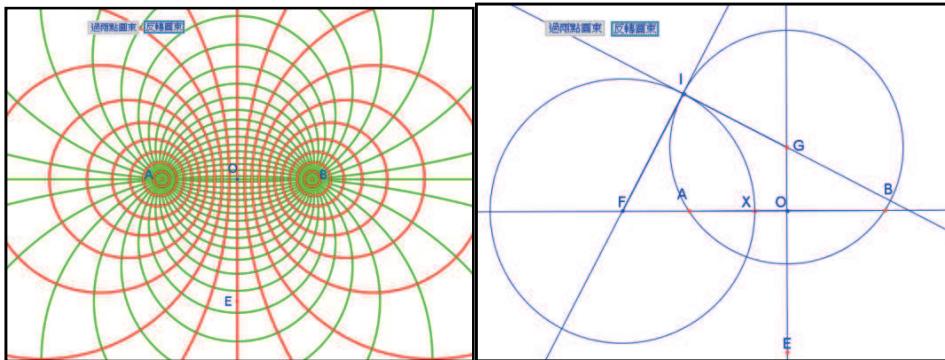


圖 2 左圖: 正交的雙曲及橢圓共軸圓束, 右圖: 圓束的代表圓

### 共軸圓束的特例

當複數函數值趨近無限大時, 我們常將無限大  $\infty$  視爲一個無限遠點, 將無限大點 (表示無限大的複數  $\infty$ ) 加入複數平面集合, 我們就可以得到一個延伸的複數平面 (Extended Complex Plane)  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 。此時  $\infty$  可以參與複數運算, 例如,  $z + \infty = \infty$ ,  $z/0 = \infty \dots$ , 但有些仍保留爲未定義, 例如  $\infty - \infty, \infty/\infty, \dots$ , 參閱 [https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann\\_sphere](https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sphere)。數學算板用  $\infty$  代表無限遠點, 可在選單中, 取得  $\infty$ 。 $\infty$  可以在畫面上任意移動, 選取它就表示選取了無限大點。

前述兩點決定的共軸圓束, 若有一點是延伸複數平面的無限大點  $\infty$  時, 我們可以很容易的看出圖 1 左圖的橢圓共軸圓束轉變成共點線束 (concurrent pencil of lines), 因這些圓若

都通過  $B = \infty$ , 這些圓就是延伸複數平面上的直線 (圖 3 左圖)。我們觀察圖 1 右圖的雙曲共軸圓束, 若  $B$  變成  $\infty$ , 這些圓就轉變成以  $A$  點為圓心的同心圓束 (concentric pencil of lines), 這些圓都是  $A$  與  $B = \infty$  的對稱圓, 亦即  $A, B = \infty$  的反轉圓 (圖 3 右圖)。

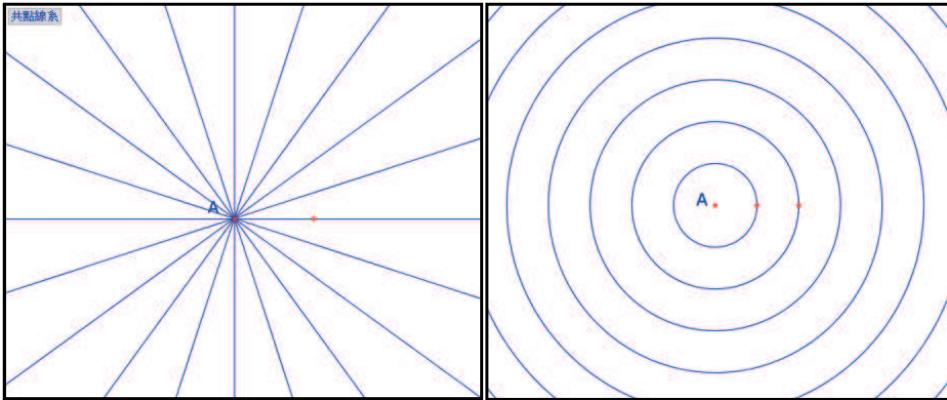


圖 3 左圖: 共點線束, 右圖: 同心圓束

若將圖 3 左右兩圖同時呈現 (圖 4 左圖), 我們可以看到共點線束與同心圓束依然正交。

若  $A, B$  原在直線  $M$  上, 我們沿著  $M$  直線, 讓  $B$  點趨近於  $A$ , 則圖 1 左圖的橢圓圓束轉變成「圓心在過  $A$  垂直於  $M$  的直線上且與  $M$  相切於  $A$  點」的共軸圓束, 其共同根軸就是  $M$ , 稱為拋物共軸圓束 (elliptic pencil of circles)。其圓心在這些相切圓的共同根軸  $L$  的垂直平分線上。同樣地觀察圖 1 右圖雙曲共軸圓束, 當  $B$  沿  $M$  趨近於  $A$  時, 此圓束轉變成「圓心在  $M$  的直線上且與過  $A$  垂直於  $M$  的直線相切於  $A$  點」的共軸圓束, 也是一組拋物共軸圓束, 但與前一組正交, 將這兩組圓束同時呈現如圖 4 右圖所示。

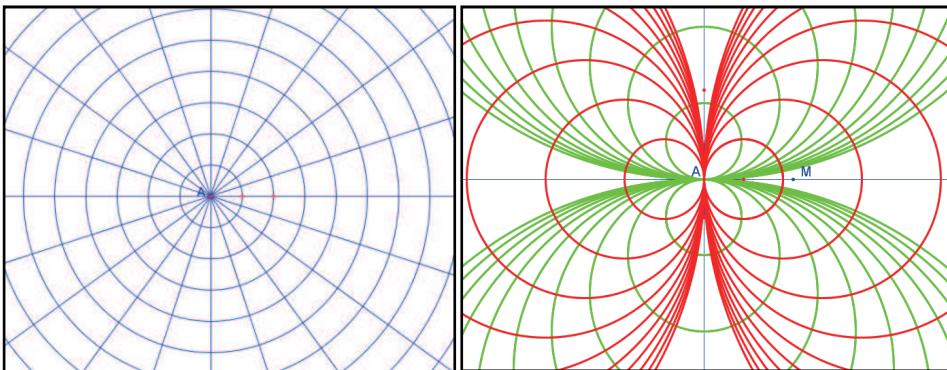


圖 4 左圖: 正交的共點線束與同心圓束, 右圖: 正交的拋物共軸圓束

在動態系統中，線束與圓束圖形加上箭頭（表示運行方向），可以用來表徵一個變換，例如同心圓束，可以用來表徵一個平面的旋轉變換，圓心就是旋轉中心，一個共點線束，可以表徵一個平面的放縮變換，其共同點就是放縮中心。平面上與一直線平行（含此直線）的直線所成的集合，稱為該直線的平行線束（parallel pencil of lines），與平移向量平行的平行線束，可以用來表徵一個平面的平移變換。

能將圓（含直線）變換成圓（含直線）的變換稱為圓變換（circular transformation），圓變換會保持對稱性，亦即將對稱點、對稱軸（或圓）變換成新對稱點、新對稱軸（或圓）。反轉變換、莫必烏斯變換都是圓變換。一個圓變換可以將共點線束、同心圓束、平行線束分別變換成橢圓共軸圓束、雙曲共軸圓束及拋物共軸圓束，反之亦然。由於共點直線通過點  $P$  及無窮遠點  $\infty$ ，因此變換之後就是通過兩點（ $P$  點及  $\infty$  的像）的橢圓共軸圓束；由於同心圓束都不相交，變換之後的圓也不相交，變換後就是雙曲共軸圓束；由於平行線都通過無窮遠點，變換之後就是相切於一點（與無窮遠點對應的點）的拋物共軸圓束。

### 數學算板中的莫必烏斯變換

數學算板（Mathboard）是使用 java 語言建立的動態多功能數學教學展示的工具（<http://mathboard.tw>）。在數學算板中，我們除了可以直接以輸入函數式的方式，得到莫必烏斯變換外，為取得此類函數的特殊性質，例如固定點、判別式等。我們也可採用四係數法及六點法輸入莫必烏斯變換。四係數法是先選取 4 個代表莫必烏斯變換係數的複數點或度量，然後設定函數，點的坐標表示複數的實部及虛部，度量可以是一個實數對（坐標）或一個實數，這樣得到的莫必烏斯變換用符號  $M[(az+b)/(cz+d)]$  表示。六點法是透過性質 4 來設定莫必烏斯變換。設  $w = M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad-bc \neq 0$ , 若  $M(z_1) = w_1$ ,  $M(z_2) = w_2$ ,  $M(z_3) = w_3$ ,  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ , 且若  $i \neq j$ , 則  $z_i \neq z_j$ ,  $w_i \neq w_j$ 。由於  $cwz - az + dw - b = 0$ ,

因此 
$$\begin{vmatrix} zw & z & w & 1 \\ z_1w_1 & z_1 & w_1 & 1 \\ z_2w_2 & z_2 & w_2 & 1 \\ z_3w_3 & z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
 為過  $(z_i, w_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  的方程式。由第一列的行列式展開，我們可以得到 Mobius 變換  $f$  的係數

$$a = \begin{vmatrix} z_1w_1 & w_1 & 1 \\ z_2w_2 & w_2 & 1 \\ z_3w_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} z_1w_1 & z_1 & w_1 \\ z_2w_2 & z_2 & w_2 \\ z_3w_3 & z_3 & w_3 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} z_1w_1 & z_1 & 1 \\ z_2w_2 & z_2 & 1 \\ z_3w_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

設複數平面上的點  $A, B, C, D, E, F$  坐標分別為  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ ，這樣得到的變換我們用  $M(ABC \rightarrow DEF)$  表示，稱為六點決定的莫必烏斯變換。在數學算板中，先標定莫必烏斯前三點  $A, B, C$ ，再標定莫必烏斯後三點  $D, E, F$  後，就可標定此莫必烏斯變換，分別標定的

目的是使前三點 (相異) 與後三點 (相異) 可以使用相同的點, 例如  $M(ABC \rightarrow ABD)$  表示以  $A, B$  兩點為固定點,  $C$  點對應至  $D$  點的莫必烏斯變換。若  $z_1, z_2, z_3$  或  $w_1, w_2, w_3$  中有一為  $\infty$ , 我們取點時, 取其代表物件  $\infty$ , 依然可以求出其係數 (Deaux 1945, p.127) 而得其變換。

數學算板中, 四係數或六點決定的莫必烏斯變換, 建立時, 都可取得其係數、固定點、及規格化後得到判別式  $(a + b)^2$  的值, 可用來判斷變換的類別 (若為  $M(EFG \rightarrow EFH)$  變換, 還可以同時求其交比  $(EFGH)$ )。在畫面上取一點, 透過迭代, 就可以觀察變換在不同的係數、不同判別式值或不同交比不變量的狀況下, 變換對該點迭代的圖形。

## 二、函數的迭代

將函數視為映射 (mapping), 重複地將函數作用在之前此函數作用的結果上, 稱為函數的迭代 (iteration)。設  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  為一個複變函數, 令  $f^0(z) = z, f^1(z) = f(z), f^k(z) = f(f^{(k-1)}(z)), k = 2, 3, \dots$ , 稱  $f^k$  為  $f$  的  $k$  次迭代函數。若函數是可逆的, 則定義  $f^{-k} = (f^{-1})^k$ 。設  $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ , 集合

$$O(z_0) = \{f^k(z_0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

稱為  $z_0$  的軌跡 (orbit)。雖然一點的函數軌跡是個離散的點集合, 它們通常是一個連續曲線的一部份, 例如平移函數  $f(z) = z + 1, O(z_0)$  內的點永遠是在通過  $z_0$  且與實軸平行的直線上。透過點的迭代軌跡, 我們可以觀察一個點在函數迭代作用下如何運行, 它的軌跡是否包含在一個大家熟知的曲線內。

不只是點, 若一個路徑曲線包含於函數  $f$  的定義域中, 我們也可以透過迭代來觀察曲線在函數迭代作用下的圖形, 圖 5 展示一個圓在螺線莫必烏斯變換作用下的迭代圖形 (相切現象是調整起始圓半徑的結果)。

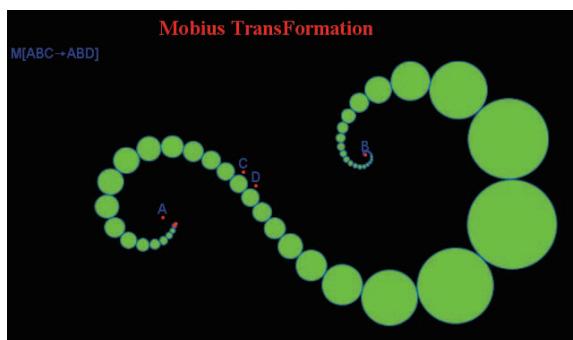


圖 5：螺線莫必烏斯變換將圓迭代而得的圖形

### 不變集合(invariant sets)

在函數迭代的作用下，我們還可以考慮函數的不變集合。若  $S$  為函數  $f$  定義域的部分集合，且  $f(S) \subset S$ ，則稱  $S$  為函數  $f$  的不變集合。一個函數最簡單的不變集合就是一個點所成集合，此點稱為固定點 (fixed point)。若令  $z = f(z)$ ，就可以求出函數  $f$  的固定點。

### 數學算板中的函數迭代系統

數學算板對解析的複變函數 (analytic complex function)，可建立了一個動態的迭代系統，只要先標定一個複變函數，再取一點 (或線段、圓、方形... 等簡單幾何物件)，決定迭代的次數後，就可觀察函數對此點迭代的軌跡，及點或幾何物件迭代運作的狀況。若此點為自由點或幾何物件，用滑鼠移動此點或物件，可以觀察此點或物件迭代的動態變化。若修改函數的定義，迭代的狀況也會隨之改變。也可以同時取若干個點，觀察這些點在相同的或不同的函數迭代作用下點的動作的狀況。圖 6 展示兩個不同函數，對三點  $A, B, C$  作用時的軌跡。 $A, B, C$  點的迭代次數都是 100。左圖中點的軌跡觀察得出來是包含在三個不相交的圓上。 $A$  點的軌跡選擇用箭頭展示迭代的下一個點，可以看出軌跡點是跳躍著前進但都在該圓上。右圖中，三點的軌跡十分離散，比較看不出來會構成三個圓，因為大部分的迭代點都集中在三圓的左交點附近，但移動  $A, B, C$  可以看出迭代點在此三圓上，右圖中的三圓是取其迭代的前三點另外做出來的。右圖的  $E$  點是  $D$  點的函數迭代點，移動  $D$  點到任意一迭代點，可以看到  $E$  會移動到函數的下一個迭代點。將  $D$  點移動至三圓上時， $E$  點都會出現在同一個圓上，由此可以看出這三圓都是函數的不變集合。若將  $D$  點移動至三圓的左或右交點時， $E$  點就會與  $D$  點重合，因為三圓的交點就是方程式  $z = \frac{z+2}{z-2}$  的解  $z = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ ，它是函數的固定點。若  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = \gamma$ ，則  $\gamma$  就是個吸引的固定點 (attractive fixed point)，當  $f^n(z_0)$  趨近於  $\gamma$  時，它也同時斥離另一個固定點，稱為斥離的固定點 (repulsive fixed point)。

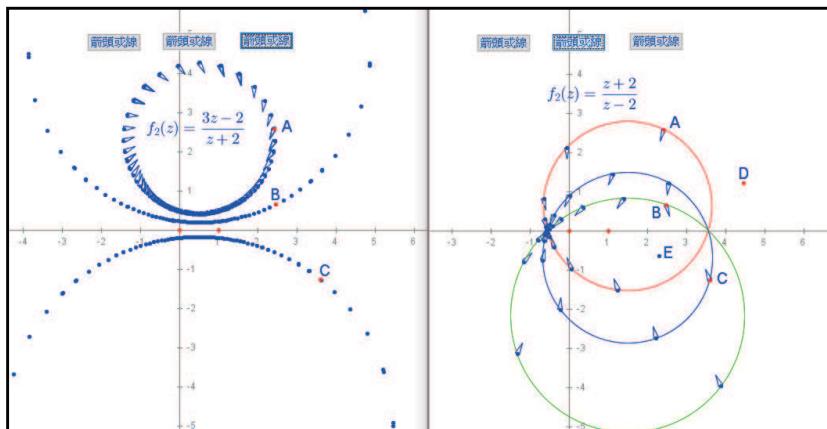


圖 6：兩函數  $\frac{3z-2}{z+2}$ ， $\frac{z+2}{z-2}$  的迭代圖形

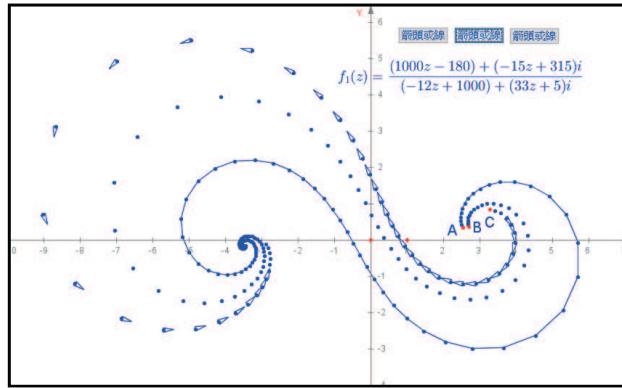


圖 7：函數  $f_1$  分別對 A、B、C 三點的迭代

圖 7 展示一個較複雜的函數  $f_1(z) = \frac{(1000 - 15i)z + (-180 + 315i)}{(-12 + 33i)z + (1000 + 5i)}$  對 A、B、C 三點的迭代軌跡。我們用箭頭、線段及點來呈現其軌跡。可以看出三點的軌跡分別是在三條螺線上，且其有兩個固定點，左側的是吸引的固定點，在 A、B、C 三點附近有一個斥離的固定點。我們分別對 A、B、C 做 500, 100, 50 次的迭代，可以看出 C 點由於取的點較少，最後一點與左邊的固定點尚有一段距離。A、B 的軌跡則看不出有太大的差異。由於這個動態系統的坐標軸單位點也可以改變，適當的調整可以使圖形展現較合適的狀況。

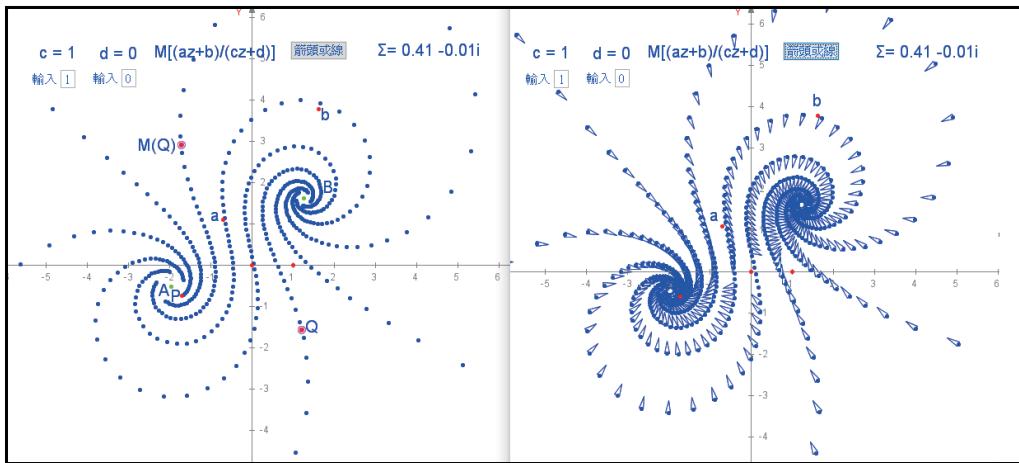


圖 8：函數  $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $c = 1, d = 0$ , 對 P 點的迭代圖形

圖 8 展示的是定出係數  $a, b, c, d$  後，標定莫必烏斯變換  $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ，取 P 點作迭代 500 次的圖形，左圖中， $a, b$  為坐標平面上的自由點，表示一個複數， $c, d$  是可輸入的實數，目前圖形  $c = 1, d = 0$ 。 $\Sigma$  表示判別式  $(a + d)^2$  的值。A、B 為此變換  $M$  的固定點（可由程式取得）。

用滑鼠移動  $a, b, P$  或輸入不同的數值  $c, d$ , 可改變整個圖形,  $A, B, \Sigma$  都會做相應的改變。左圖只展示  $P$  的迭代點, 光看本圖容易誤會認為這些點是依迭代的順序排列的, 其實不然, 右圖展示箭頭, 箭頭指向的點是下一個迭代點。在目前的數值下, 左圖形似一組螺線束, 若再取一點  $Q$ , 作  $M(Q)$ , 移動  $Q$  至左圖各點の間隙,  $M(Q)$  似乎補足這些空隙。螺線束圖形  $\{S \mid S \text{ 為包含 } z \text{ 點的螺線}, z \in \mathbb{C}\}$  就是變換  $M$  的不變圖形, 螺線束中任意螺線上的點會被變換  $M$  映射至此螺線上。

### 黎曼球面(Riemann Sphere) 及球平面變換 (Stereographical Projection)

考慮球面  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , 球面的北極  $N$  坐標為  $(0,0,1)$ , 用  $x + iy$  表示複數  $z \in \mathbb{C}_\infty$ 。定義  $SP : S^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  為

$$SP(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x}{1-z} + \frac{y}{1-z}i & i, z \neq 1 \\ \infty, & z = 1 \end{cases},$$

此時,  $SP$  為一對一映成的可逆函數, 稱為球平面投影變換, 此球面稱為黎曼球面。在數學算板中, 複數平面上的幾何物件可以投影至黎曼球面, 移動平面上的幾何物件, 球面上的對應物件會做相應的變化。因此我們可以觀察黎曼球面上幾何物件的動態變化。黎曼球面本身也是一個可以透過滑鼠做任意方向及角度旋轉的物件, 透過球面的旋轉, 我們可以看到, 球面上目前看不見(在背面)的物件。圖 9 展示黎曼球面。黎曼球面上, 我們可以看到無限大點的位置, 但在延伸的複數平面上, 無限大是一個想像的位置。

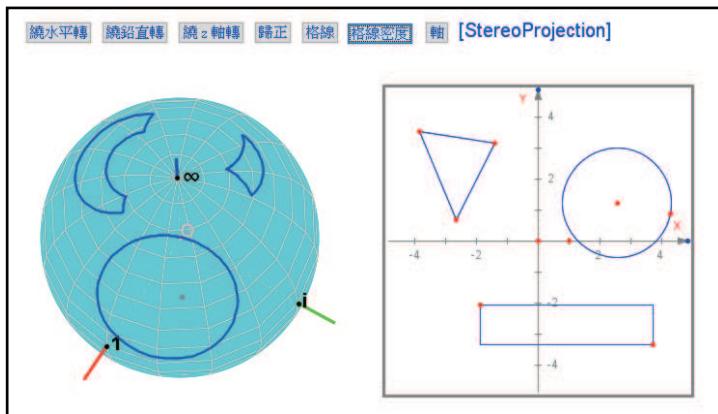


圖 9：球平面逆變換將複數平面上的圓、三角形及矩形映射至黎曼球面

本文的主要目的就是利用數學算板, 建立動態迭代的系統, 描述並觀察莫必烏斯變換在複數平面及黎曼球面上的動態迭代狀態, 觀察迭代所展示的圖形, 檢驗其分類的不變圖形。

### 三、透過動態迭代系統觀察莫必烏斯變換分類的不變圖形

設  $M$  為莫必烏斯變換, 我們透過固定點來觀察它的分類。

#### Case I: $M$ 有兩相異有限固定點 $A, B$

設  $A, B$  為莫必烏斯變換  $M(ABC \rightarrow ABD)$  的兩個固定點, 在數學算板上做出此莫必烏斯變換, 分別取得代表雙曲共軸圓束及橢圓共軸圓束的兩圓  $\alpha_1$  及  $\alpha_2$  (圖 10 左圖)。其中  $P$  表示複數平面上的任意一點,  $M(P)$  為其對應點,  $E$  為平面上另一點,  $E$  之後連串的点是變換  $M$  對  $E$  迭代 500 次的軌跡,  $\Sigma$  表示  $(a+d)^2$  的值,  $(ABCD)$  為  $ABCD$  的交比不變量。移動  $C, D$  可以得到不同的變換  $M$ , 移動  $P$  可以觀察目前變換對複數平面上任意一點作用後的位置, 移動  $P$  至  $A$  或  $B$ ,  $M(P) = A$  或  $B$ , 移動  $P$  至  $C$  時,  $M(P) = D$ , 移動  $P$  至 Orbit( $E$ ) 上的一點,  $M(P)$  都會是該點的下一個迭代點, 移動  $P$  至螺線の間隙。圖 10 右圖展示的是在  $A$  點附近另取四點所做的 500 迭代軌跡, 以展示變換對平面上的點的作用。圖中  $\Sigma = 3.96 - 0.05i \notin \mathbb{R}$ ,  $(ABCD) = 0.88 + 0.21i$ , 根據前述分類的描述,  $M$  為螺線莫必烏斯變換, 而此螺線束就是  $M$  的不變集合。

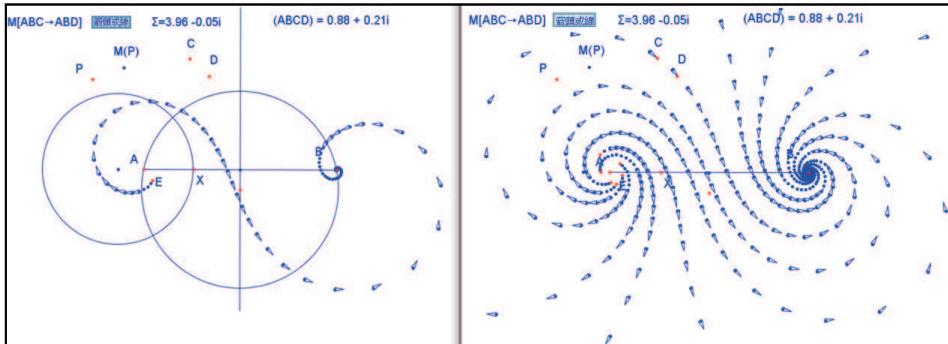


圖 10 左圖： $E$  點的迭代軌跡圖, 右圖：5 點的迭代軌跡圖

當  $C, D$  位置不同時, 螺線也會不同, 相當多樣, 移動  $C, D$  可以觀察其變化。圖 11 展示其他點位置不變, 只將  $D$  點由上而下移動的結果 (由左而右由上至下)。在觀察圖形變化時, 可以對照前述兩種判別式的數值。十分有趣的是圖 10 右圖與圖 11 倒數第二圖, 雖然迭代點的進行方向不同, 其最終的圖形相當相似, 然而前者是取 5 點的迭代圖形聯集, 後者卻只是一點  $E$  構成的迭代圖形。

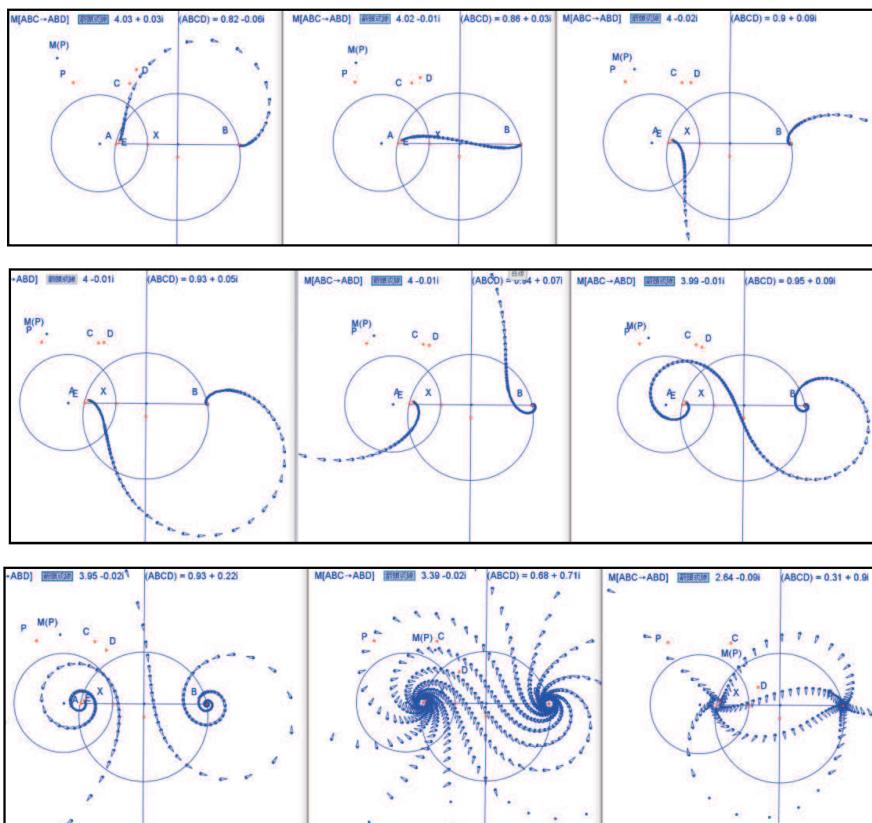


圖 11：展示只改變  $D$  點位置 (由上而下) 時,  $E$  點迭代所得的圖形

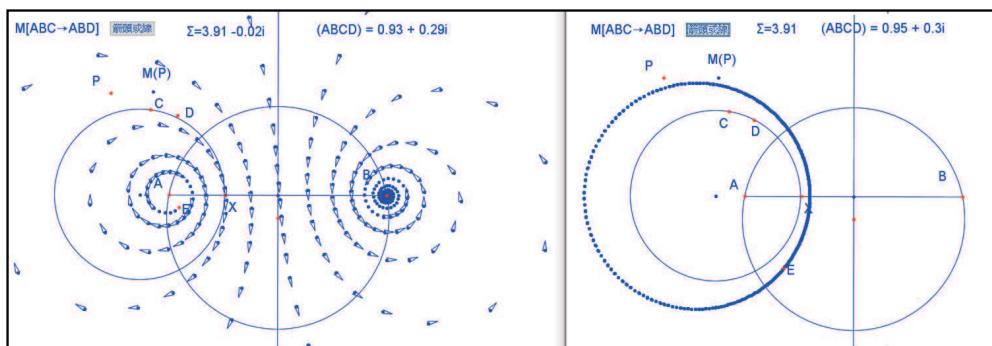


圖 12 左圖： $C, D$  接近圓  $\alpha_1$  時,  $E$  點的迭代圖形, 為螺線的一部份  
右圖： $C, D$  在圓  $\alpha_1$  上時,  $E$  點的迭代圖形, 為圓的部分呈現

圖 12 左圖展示  $CD$  接近  $\alpha_1$  圓周時的迭代圖形, 此時,  $E$  點的軌跡仍在一個螺線上。圖 12 右圖展示  $C, D$  在圓  $\alpha_1$  上時的迭代圖形, 可以看出  $E$  點的軌跡在一個圓上。

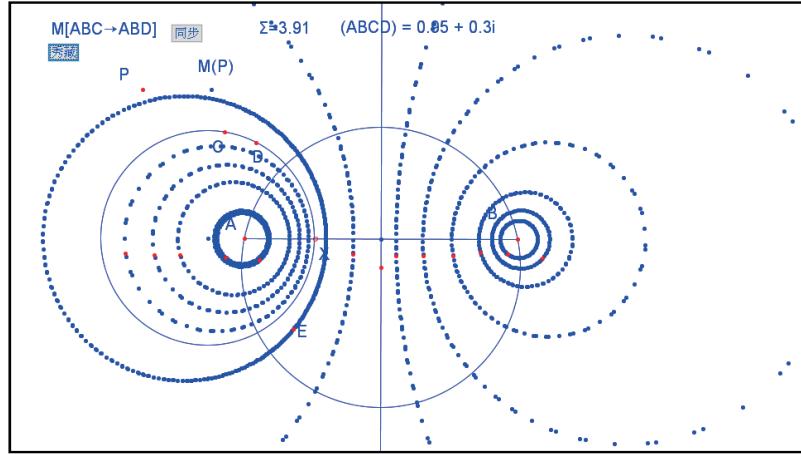


圖 13 :  $C, D$  在  $\alpha_1$  上時, 平面上多點的迭代圖形

圖 13 是在圖 12 右圖上再取若干點做迭代的結果。圖 13 的迭代圖形其實就是雙曲共軸圓束的部分呈現。在目前圖形狀況下  $\Sigma = 0.391$ ,  $(ABCD) = 0.95 + 0.3i$ , 根據前述莫必烏斯變換的分類, 此時的變換  $M$  稱為「橢圓」莫必烏斯變換 (由於交比取近似值,  $|(ABCD)| \approx 1$ ), 而  $A, B$  兩點決定的雙曲共軸圓束, 就是  $M$  的不變集合。

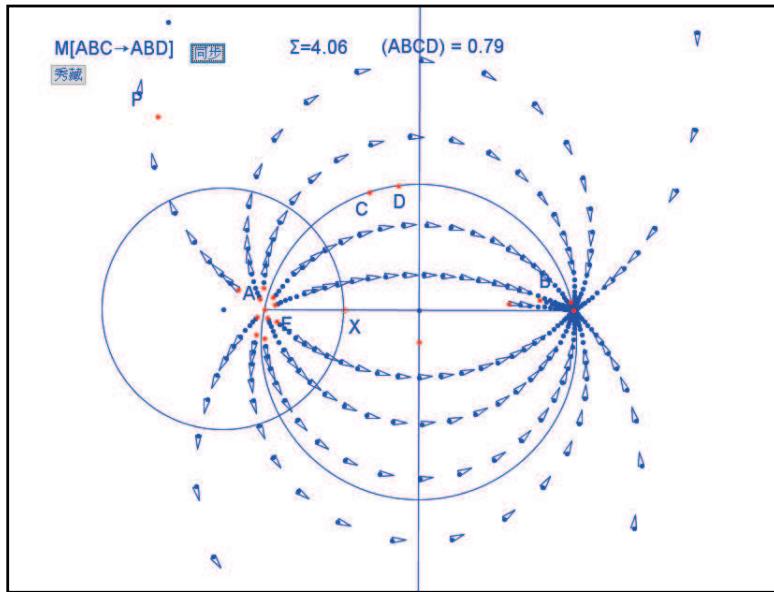


圖 14 :  $C, D$  在  $\alpha_2$  上時, 平面上多點的迭代圖形

圖 14 展示  $C, D$  兩點在圓  $\alpha_2$  上時的迭代圖形, 觀察圖形可知, 本圖其實是橢圓共軸圓束的部分呈現。在目前圖形狀況下  $\Sigma = 4.06$ ,  $(ABCD) = 0.79$ , 根據前述莫必烏斯變換的分類, 此時的函數  $M$  稱為「雙曲」莫必烏斯變換, 而  $A, B$  決定的橢圓共軸圓束就是  $M$  的不變集合。

Case II:  $M$  有兩固定點  $A$ 、 $B$ ，其中有一為無限大點

與前述兩點決定共軸圓束的討論類似，設  $A$  為有限定點， $B$  為無限點  $\infty$ 。圖 15 展示兩定點中， $B = \infty$  時的迭代圖形，其中圓  $\alpha_1$  為代表「 $A$  的同心圓束」中一個圓， $AG$  為代表「共  $A$  點線束」的一直線。左圖展示  $C$ 、 $D$  靠近圓  $\alpha_1$  時  $E$  點的迭代軌跡圖形，右圖展示  $C$ 、 $D$  在圓  $\alpha_1$  上時， $E$  點的迭代軌跡圖形。

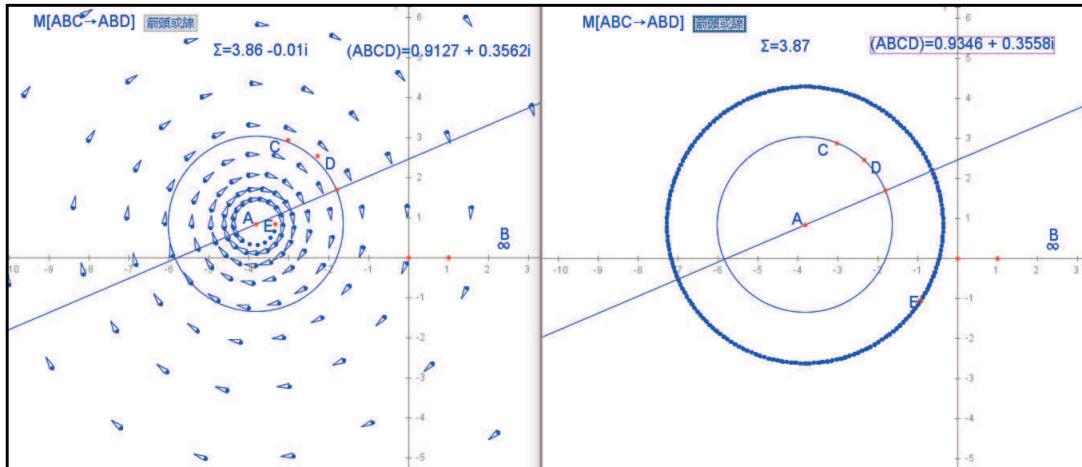


圖 15：  $B$  點為無限大點時， $E$  點的軌跡圖形，左圖  $C$ 、 $D$  接近圓周，右圖  $C$ 、 $D$  在圓上

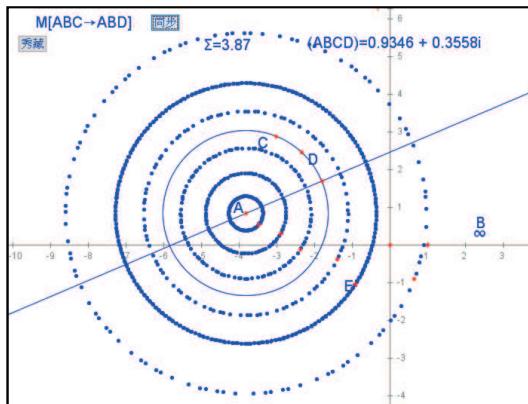


圖 16：  $C$ 、 $D$  在圓上時，平面上多點的迭代軌跡

圖 16 展示  $C$ 、 $D$  在圓上，且在平面上取多點時，這些點的迭代軌跡圖形。可以看出取多點時其軌跡為以  $A$  點為中心的同心圓。顯示此時  $M$  是一個以  $A$  點為中心的旋轉變換，由於，此時  $\Sigma = 3.87$ ， $(ABCD) = 0.9346 + 0.3558i$ ， $|(ABCD)| \cong 1$ ，根據前述的分類， $M$  是「橢圓」莫必烏斯變換，以  $A$  點為中心的同心圓束就是  $M$  的不變集合。圖 17 左圖展示  $C$ 、 $D$  在直線  $AG$  (過  $A$  及無限大點的圓  $\alpha_2$ ) 上時  $E$  點的軌跡圖，圖 17 右圖展示  $C$ 、 $D$  在  $AG$

直線上時，多點的迭代圖形。可以看出此時，軌跡應在共  $A$  點的直線上，也就是說此時， $M$  是一個放縮變換。由於，此時  $\Sigma = 4.07$ ,  $(ABCD) = 0.7638$ , 根據前述的分類， $M$  是「雙曲」莫必烏斯變換，而共  $A$  點的線束就是  $M$  的不變集合。

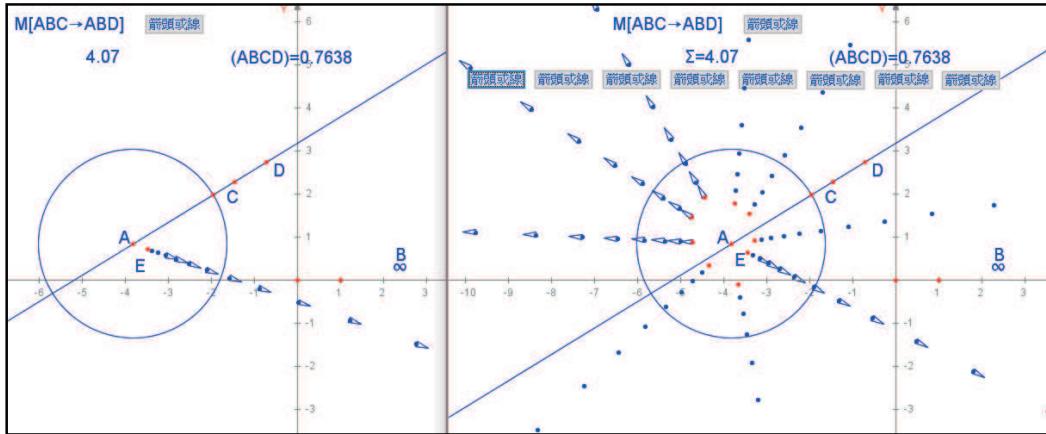


圖 17：C、D 在 AG 直線上時 E 點及多點的軌跡圖

### CASE III：M 有兩個有限固定點，但此兩點重合

圖 18 左圖展示  $A、B$  非常接近且  $C、D$  在圓  $\alpha_1$  上時， $E$  點迭代的圖形。圖 18 右圖展示此情況下多點的迭代圖形，此時  $\Sigma = 3.9996 \approx 4$ 。圖 19 左圖展示  $C、D$  在圓  $\alpha_2$  上，多點的迭代軌跡圖形，此時， $\Sigma = 4.0002 \approx 4$ 。圖 19 右圖展示  $A$  (重合點)、 $C、D$  決定的莫必烏斯變換多點的軌跡圖 (原理參看 Deaux 1945, p.150), 此時， $\Sigma = 4$ ,  $(AACD) = 1$ , 移動  $C、D$  (位置任意) 可以看出軌跡圖都在過  $A$  點與直線相切的拋物共軸圓束上 (實線圓是取軌跡圖中三點另外做出來的),  $M$  就是拋物莫必烏斯變換，這個拋物共軸圓束就是  $M$  的不變集合。

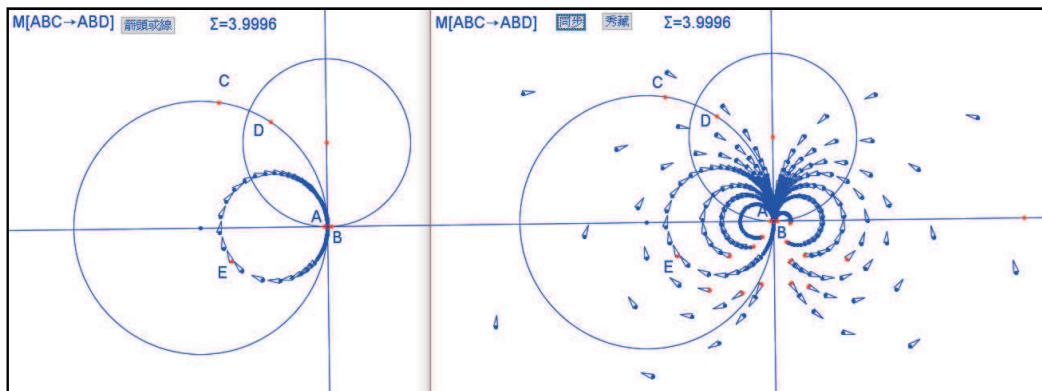


圖 18：兩固定點  $A、B$  非常接近時  $C、D$  在圓  $\alpha_1$  上， $E$  點 (左圖) 及多個點 (右圖) 的軌跡圖

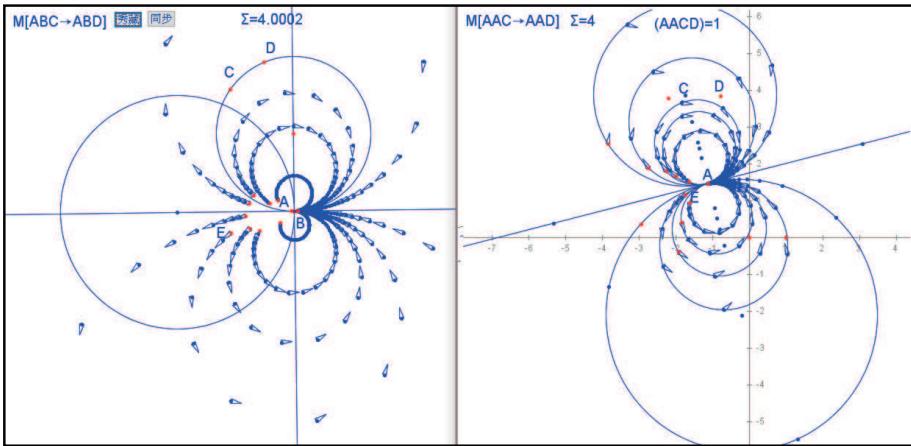


圖 19 左圖：兩固定點  $A$ 、 $B$  非常接近時  $C$ 、 $D$  在圓  $\alpha_2$  上時，多個點的迭代圖形  
 右圖： $A$  (重合點)、 $C$ 、 $D$  決定的拋物莫必烏斯變換多點的迭代圖形

CASE IV :  $M$  只有一個固定點  $\infty$

圖 20 展示一個固定點  $\infty$  時， $C$ 、 $D$  決定的莫必烏斯變換多點迭代的軌跡圖。可以看出，軌跡圖包含在平行於  $CD$  直線的線束上，此時  $\Sigma = 4$ ， $(AACD) = 1$ ，因此， $M$  是拋物莫必烏斯變換。可以看出其實這就是平移變換，平行於  $CD$  的線束就是  $M$  的不變集合。

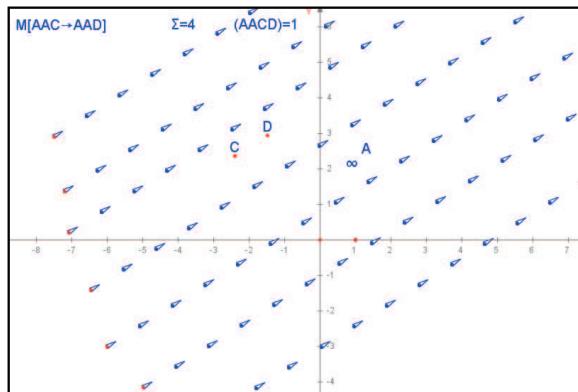


圖 20：無限遠點固定點與  $C$ 、 $D$  決定的拋物莫必烏斯變換的多點迭代圖形

設  $M$  為有兩固定點  $A, B$  的莫必烏斯變換， $C_1$  為過  $A, B$  的雙曲共軸圓束 (含同心圓束特例)， $C_2$  為  $A, B$  的橢圓共軸圓束 (含共點線束圓束特例)，設  $\alpha \in C_1$ ， $D$  為  $\alpha$  上任一點，若  $M$  映  $D$  至  $M(D)$ ，且  $M(D) \in \beta \in C_1$ ，則  $\alpha$  為  $A, B, D$  三點構成的圓， $\beta$  為  $A, B, M(D)$  三點構成的圓，由於莫必烏斯變換會將圓映至圓，因此圓  $\alpha$  上的點都會映至圓  $\beta$  上，故  $C_1$  中的圓都會被  $M$  映至  $C_1$  的圓上，故  $C_1$  為  $M$  的不變集合。同理可知， $C_2$  為  $M$  的不變集合。因此我們知道

(1)  $C_1, C_2$  為  $M$  的不變集合。

其實，由圖 12 及圖 13 我們也可以看出

(2) 若  $C_1$  中每個圓都是  $M$  的不變集合 (亦即  $C_1$  中每個圓都被映至本身)，則  $M$  為橢圓莫必烏斯變換。

(3) 若  $C_2$  中每個圓都是  $M$  的不變集合 (亦即  $C_2$  中每個圓都被映至本身)，則  $M$  為雙曲莫必烏斯變換。

#### 四、莫必烏斯變換不變圖形在複數平面及黎曼球面的相應圖形

由前述莫必烏斯變換不變圖形的分類討論，拋物共軸圓束與平行線束均為拋物莫必烏斯變換的不變圖形，橢圓共軸圓束與共點圓束均為「雙曲」莫必烏斯變換的不變圖形，而雙曲共軸圓束與同心圓束均為「橢圓」莫必烏斯變換的不變圖形。似乎每一類均有兩種外表不同的不變圖形，前面我們透過動態圖形，從退化來看他們是同類的，其實在黎曼球面上，我們可以輕易的看出他們是同一類的，「退化」的現象的產生是由於複數平面無法呈現無限大點。圖 21 展示複數平面上的平行線束 (左圖) 與拋物共軸圓束 (右圖) 及其透過球平面投影分別在黎曼球面上的對應圖形，可以看出在黎曼球面上他們都是過一點相切的圓束，前者切點為無限大點，後者為一有限點。

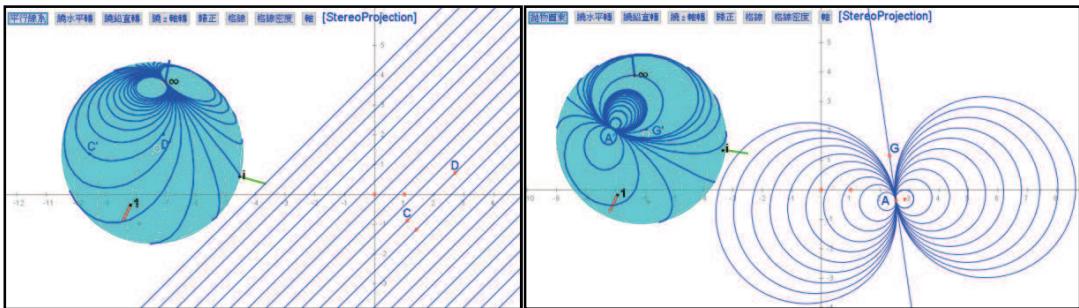


圖 21：平行線束與拋物共軸圓束在黎曼球面上的圖形

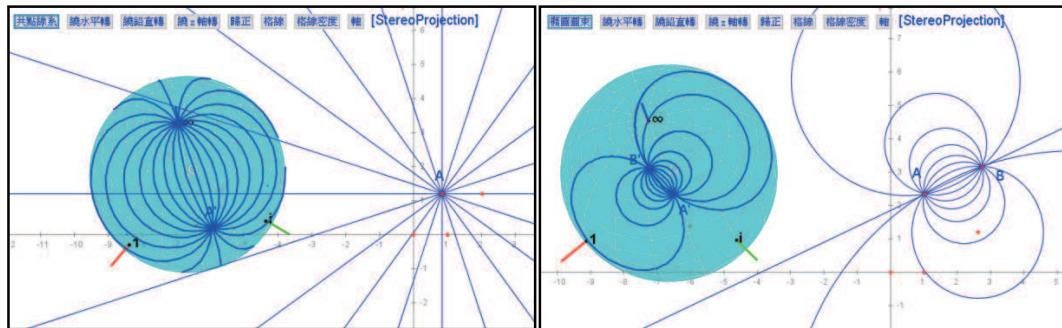


圖 22：共  $A$  點線束與橢圓共軸圓束在黎曼球面上的表徵

圖 22 展示共點線束與橢圓共軸圓束及其在黎曼球面上的相應圖形，在黎曼球面上他們都

是過兩點的圓束，前者通過一個有限點及一個無限大點，後者通過的兩點都是有限點。

同樣的，圖 23 展示同心圓束與雙曲共軸圓束及其在黎曼球面上的對應圖形，可以看出在黎曼球面上兩者都是由兩固定點形成的不相交的共軸圓束。

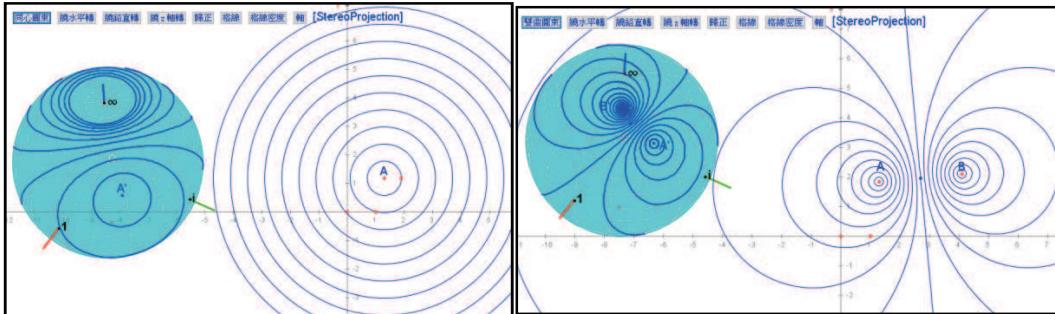


圖 23：同心圓束與雙曲共軸圓束在黎曼球面上的表徵

圖 21、22、23 中的線束與圓束都是取一些代表線和圓，在複數平面上我們取等距等角的處理，其在黎曼球面上的對應圖形外觀的親疏緊密程度是黎曼球面距離定義的結果。透過這些圖形，我們可以看到在黎曼球面上，無限大點與其他的點本質上無差異。

順便一提的是：黎曼球面上的圓束（或圓束部分集合的圖形）不只是與莫必烏斯變換的分類不變圖形有關，其實，莫必烏斯變換的定義域角繪圖 (Domain coloring) 在黎曼球面上也有類似的圖形產生，圖 24 展示函數  $f(z) = \frac{(z - \frac{3}{2})}{(z + \frac{3}{2}i)}$  定義域角繪圖及其等角線（左圖）與等高線（中圖）的圖形，右圖則為兩圖合併之展示，此時，其等角線與等高線也是正交的，但決定圖形的兩點並非函數的固定點，而是  $f$  函數使分子為零的零點 (zero) 及使分母為零的極點 (pole)。

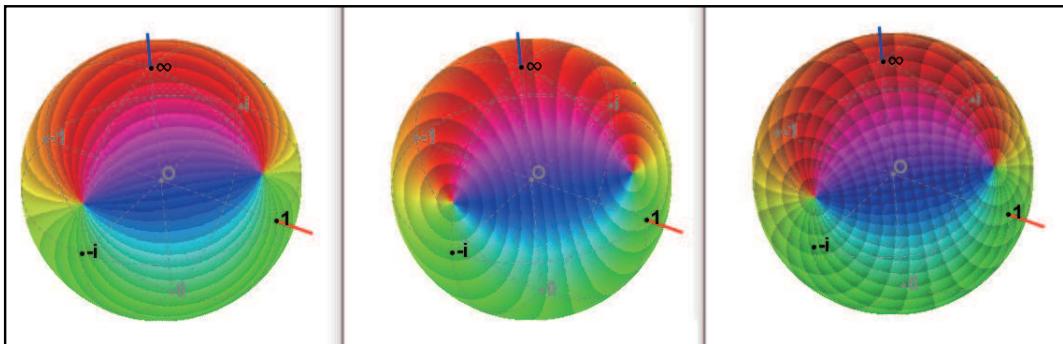


圖 24：定義域角繪圖的等角線與等高線也是兩點決定的圓束或部分

## 五、結語

本文首先簡單介紹莫必烏斯變換及其性質，並列出兩種分類的方法，再介紹共軸圓束及其特例，並透過數學算板的迭代功能，觀察莫必烏斯變換的分類及各分類的不變圖形，這些不變圖形其實就是共軸圓束及螺線集合，而共軸圓束的特例在黎曼球面上，其實都各從其類，都是球面上過兩點的圓束、不相交的圓束或切於一點的圓束。我們認為若在莫必烏斯變換或其他複變函數相關教學或研習時，使用動態迭代及圖形來探索其變化，並同時在複數平面及黎曼球面上展示，對該複變函數的理解應有相當的幫助。

## 六、後記

「數學算板測試版1.0.1」已置於網頁：<http://mathboard.tw> (or <http://mathboard.org>) 下載區，提供給有興趣的讀者下載測試，本文相關的部分可操作圖形程式網路版，也可以在該下載區取得連結。

## 參考資料

1. Deaux, Roland (1945). *Introduction to the Geometry of Complex Numbers*, translated by Howard Eves. F. Ungar Pub. Co., 1956.
2. Pennisi, Louis L., Gordon, Louis I and Lasher, Sim (1962). *Elements of Complex Variables*, 中央圖書供應社, Taiwan, Republic of China.

—本文作者為台北市立教育大學數資系退休副教授—