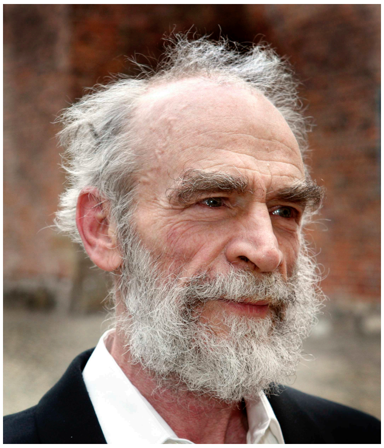
數學傳播　42卷2期, pp. 60-70

Mikhail Gromov (上)

2009 年 Abel 獎得主接受歐洲數學學會訪談記錄

翻譯：張清煇、李宣北



Knut Falch/Scanpix 攝

Mikhail Gromov 是挪威科學人文學院頒發的 Abel 獎 2009 年得主。五月十八日領獎之前 Gromov 在奧斯陸接受 Martin Raussen (任教丹麥 Aalborg University) 和 Christian Skau (任教 Norwegian University of Science and Technology) 的訪問。訪談內容刊登在歐洲數學學會 (EMS) 2009 年九月份的 Newsletter, 本刊取得相關機構[1] 及人士[2]的授權, 翻譯[3] 成中文與讀者分享。

俄羅斯的教育

首先, 恭喜你得到 2009 年的 Abel 獎, 我們先從你早年的生活與生涯談起; 你是二次世界大戰進入尾聲時, 在聖彼得堡 (當時叫列寧格勒) 東邊 245 公里的小鎮 Boksitogorsk 出生的?

我的母親是戰鬥部隊的隨軍醫生, 為了生產必須調到離前線稍遠的地方。

請談談你的背景, 早年的教育, 什麼人或事啓發了你對數學的興趣?

除了學校之外, 我第一次接觸到數學是母親爲我買的 Rademacher (*Hans Rademarcher, 1892∼1969, 德裔美國數學家*) 和 Toeplitz (*Otto Toeplitz, 1881∼1940, 德國數學家*) 寫的「數與形 (Numbers and Figures)」, 對我影響很大。雖然我對大部分的內容不甚了了, 仍然讀得津津有味, 直到現在我還是對任何讓我好奇, 但無法瞭解的神秘事物充滿了興趣。

[1]歐洲數學學會 (EMS)、挪威科學人文學院 (The Norwegian Academy of Science and Letters)。

[2]Mikhail Gromov 教授、Martin Raussen 教授、Christian Skau 教授。

[3]文中括弧內細明斜體字爲譯者所加, 非原文所有。— 譯者識

你在中學就曉得自己將來要念數學?

中學中期以後有段時間我對化學比數學更感興趣, 然後我就上鉤了 — 俄羅斯有些爲青少年設計的、很好的數學練習題本, 我有一年的時間沉迷其中難以自拔。中學最後一年, 我參加所謂的數學圈 (mathematical circle), 這是爲低年級大學生辦的, 由 Vasia Malozemov 和 Serezha Maslov 主持 (Maslov 後來成爲一位邏輯學家, 就是他向 Matiasevic 建議 Hilbert 的第十問題。) (*Sergei Maslov, 1939～1982, 以發展出自動化理論的逆方法* (*inverse method*) *著名*) (*Yuri Matiasevic, 1947～, 數學家與電腦學家, 以提出 Hilbert 第十問題的反證著名*) 爲我們這些年輕孩子安排了引人入勝充實的課程活動。這是 1959 年在聖彼得堡上大學的前一年, 主要就是因爲這個活動讓我決定學數學。

Abel 獎訪談, 由左至右 Christian Skau 教授, Martin Raussen 教授, Mikhail Gromov 教授, Heiko Junge/Scanpix 攝

你在列寧格勒大學攻讀數學, 請談談當時的環境、接受什麼樣的數學養成教育, 還有對你重要的老師。

我覺得是愉快的, 雖然周遭的政治氛圍讓人不太舒服。數學界和教授們, 士氣非常高昂。記得我最初的老師包括, Isidor Pavlovich Natanson 教授 (*1906～1964, 研究實分析*), 我還上過 Boris Mikhailovich Makarov 的課 (*研究數學分析*)。你可以感受到他們高度的熱情、對科學的投入, 再加上和高年級學長之間的互動, 對我產生非常強烈的衝擊, 像年輕的代數學家 Tolia Yakovlev, 他在我們心中烙下獻身數學至死不渝的形象。另一方面, 列寧格勒大學的一般趨勢是將數學與科學連結, 我想應該是受到 Kolmogorov (*Andrey Kolmogorov, 1903～1987,*

在機率論、拓樸學、古典力學、演算法、邏輯、渦流、計算複雜度等等有重大貢獻) 和 Gelfand (*Israel Gelfand, 1913∼2009, 在群論, 表現理論、泛函分析等有重大貢獻*) 來自莫斯科的影響。Kolmogorov 對流體力學有根本的貢獻, 而 Gelfand 則從事與生物以及物理相關的研究。基本上, 對於知識的普世認知 : 認為數學是知性思維與發展的中心, 這樣的想法塑造出當時那裡的每一個人, 包括我。我也從與 Dima Kazhdan (*David Kazhdan, 1946∼, 原名 Dmitry Aleksandrovich Kazhda, 1975 移民美國任教 Harvard 大學後改名, 研究表現理論*) 不時見面學到不少莫斯科的數學風格。

你從什麼時候開始發現自己有特出的數學天分? 如何發現的?

我不認為自己有什麼特出。不過是我正好有你們欣賞的才具, 如此而已。我從來沒有過這樣的念頭。

至少在學生時代的後期, Vladimir Rokhlin (*1919∼1984, 在代數幾何、幾何、測度論、機率論、遍歷理論等有重要貢獻*) 是你的指導老師。你覺得自己做數學的方式是否到今天還受到他的影響?

說來 Rokhlin 是在莫斯科受教育的, 思考數學的方式與列寧格勒大異其趣, 莫斯科學派比較接近西方數學的走向。列寧格勒比較封閉, 重心放在古典的問題; 莫斯科則對新的發展比較開放, Rokhlin 將這種風氣帶到列寧格勒來。另外一位有相同態度的是代數幾何學家 Boris Venkov (*Boris Borisovich Venkov, 1934∼2011*), 從他以及 Rokhlin 身上, 我獲得比列寧格勒傳統學派更為寬廣的數學視野與見地。另一方面, 傳統學派實力也很雄厚; 譬如, Aleksandr Danilovich Alexandrov (*1912∼1999, 數學家, 物理學家, 哲學家和登山家*) 領導的幾何學派, 我大部分的幾何是從成員中的 Zalgaller (*1920∼, 研究幾何與最佳化*) 和 Burago (*1936∼, 研究微分幾何與凸幾何*) 那裡學的, Burago 是我的幾何啟蒙老師。

1970 年代初期你在列寧格勒大學研究做得非常成功, 但你仍然離開那裡, 而且不久就在 1974 離開蘇聯, 是什麼促使你這麼做?

很簡單, 我常說越是不可以做的事, 人越想做, 我們都知道上帝禁止夏娃吃蘋果的結果, 這是人性。官方說不能離開這個國家, 離開是不可能的, 是錯的, 是糟糕透頂的事。就像從事科學研究: 就算不可能, 還是嘗試。

當時要離開蘇聯可能不是那麼容易?

對於我, 相對簡單, 我非常幸運。不過一般來說很難, 同時風險很高。我必須申請, 等待了好幾個月才獲得批准。

俄羅斯的數學

去年的 Abel 得主之一 Jacques Tits (*1930～, 比利時出生法國數學家, 研究群論及 incidence 幾何*) 提起俄羅斯數學教育和各個學派, 他非常稱許俄羅斯數學的強烈個性以及在動機、應用與技巧方法上緊密的連結。他更提到研討會和討論氣氛熱絡, 有時甚至可以延續好幾小時。你的看法呢? 俄羅斯數學的風格和學派有什麼特別的地方?

就像我前面講的, 列寧格勒和莫斯科不太一樣, Tits 提到的可能是 Gelfand 在莫斯科的討論班, 我因爲受邀演講參加過一次, 所以我的印象可能沒有什麼代表性。不過那次, 在討論班即將開始前, Gelfand 花了將近兩個小時和聽衆討論不同的事情。另一個討論班是 Piatetsky-Shapiro 主持的 (*Ilya Piatetsky-Shapiro, 1929～2009, 研究解析數論, 群表現及代數幾何*), 就是一板一眼, 每當有人對黑板上的式子提問, Shapiro 就會說, 什麼是學生理當知道的, 什麼是不該知道的, 該學這個、這個或那個, 態度極爲強勢, 甚至有些蠻橫, 非常強烈的展現出他的個性!

你是否依然能從自己的研究工作中感覺到特別的、俄羅斯的數學背景?

當然, 毫無疑問, 這是一種對科學與數學非常浪漫的態度 : 覺得它們是值得生死以之的崇高志業。因爲學生時代我不曾到過其它國家, 不知道其它地方是否也是如此。不過, 這是許多和我一樣出身俄羅斯的數學家傳承的情懷。

俄羅斯數學與目前西方的數學是否仍有很大的差異, 或是因爲許多俄羅斯數學家現在到西方就業, 這些差異即將消失?

這點我不能判斷, 有那麼多俄羅斯人在西方工作, 我對目前俄羅斯的數學生態知道得不多。許多事物一定已經發生巨大的變化。我們那個時代對科學、數學的狂熱, 部分來自於對外面世界的反應。學術生活是平靜美好的園地, 讓你離開外面頗爲醜陋的政治世界。當這些都改變了, 原先對學術強烈的專注也就退燒了也未可知, 這只是一個猜想。

你和俄羅斯數學家還有頻繁的接觸嗎? 還偶而回去?

離開後回去過兩次, 還能感受到那裡的學術強度, 但是水準下滑, 部分原因是許多有天賦的人被更大的學術中心吸引, 到那邊去可以學得更多。

能不能告訴我們曾經影響你的還有哪些數學家, 像 Linnik (*Yuri Linnik, 1915～1972, 蘇聯數學家, 研究數論, 機率與統計*)?

是的, Yuri Linnik 是列寧格勒大學一位偉大的科學家、教授和院士。有一年他主持了一個代數幾何的學習班 (educational seminar), 他讓人稱道的是, 總是知之爲知之, 不知爲不知, 承認自己的無知, 從不裝懂, 甚至還裝做不懂。其次他與學生之間永遠平等對待。有一次輪到我

報告, 我睡過頭遲到了一小時, 他只一笑置之 — 完全沒有生氣。我想這展現出了他秉持的一種數學的精神 — 數學大家庭中當有不分彼此同舟共濟的氛圍。

他的爲人比起 Rokhlin 如何?

Rokhlin 因爲過去際遇坎坷比較封閉。他的個性極爲強悍, 二次世界大戰時曾被俘, 他是猶太人, 不過設法隱瞞了身份。獲釋之後被送進俄國的勞改營, 因爲官方認定他沒有服完兵役, 淪爲戰俘竟然不算服役! 經過一番奔走, 他來到莫斯科。很難看出他內心的想法, 他非常內向孤僻, 凡事都要維持高標準, 不像 Linnik 那麼自在、開放。起初不明白是什麼造成這樣的人格特質, 後來才瞭解是因爲過去不堪的遭遇。

Linnik 是不是也是猶太人?

我想他有一半猶太血統, 但是他沒有投入戰爭。他過的是另一種人生, 身爲科學院的成員, 在學術生涯中有較好的地位等等。Rokhlin 則因爲我不清楚的原因一直受到官方的差別待遇。我聽到的是他和莫斯科的某些官員有過節。

有段時間他是 Pontryagin (*Lev Pontryagin, 1908～1988, 14 歲因煤油爐爆炸失明, 仍然成爲 20 世紀大數學家之一, 在代數拓樸、微分拓樸等有重大發現*) 的秘書。Pontryagin 眼睛看不見, 身爲院士他需要一位秘書, Rokhlin 擔任這個工作直到他通過第二次論文口試 (俄羅斯制度有第二個博士學位), 這時他的學歷超出了職位所需, 當局於是讓他走路。A.D. Alexandrov 那時是列寧格勒大學校長, 極力設法延攬他, 他在 1960 年到列寧格勒大學, 對那裡的數學發展影響極大, 整個拓樸學派是依循他的構想建成。Rokhlin 是一位非常好的老師並且善於組織規劃。

Pontryagin 反猶太, 是嗎?

我認爲他是在第二次婚姻之後才開始反猶太。他看不見, 對外界事務的認知能獨立到什麼程度, 我們並不清楚。他晚年反猶太, 還寫了些荒唐透頂的小冊子, 不知道是受到什麼影響而有那樣的想法。

幾何的歷史

由於「在幾何上革命性的貢獻」而得到 Abel 獎的, 你是第一位。從歐基里得 (*西元前四世紀中到西元前三世紀中, 希臘數學家, 公認爲幾何奠基者*) 時代開始, 幾何可說是數學的『門面』, 也是如何寫數學、教數學的典範。從19世紀初, 經由高斯 (*Carl Friedrich Gauss, 1777～1855, 德國數學家, 在數論、代數、統計、分析、微分幾何、地球物理、電磁、力學等許多領域有重要的貢獻*)、Bolyai(János Bolyai,1802～1860, 匈牙利數學家, 非歐幾何的奠基者), Lobachevsky (*Nikolai Lobachevsky, 1792～1856, 雙曲幾何及 Dirichlet 積分的奠基者*) 的工作, 幾何大

幅拓展。對於從那時候到現在某些重要的發展, 請談談你的看法?

我只能給出部分答案以及我個人的觀點。古人如何看待這門科目今人難以知悉。現在看來, 幾何是人們觀察外在世界而觸發的數學; 歐基里得對觀察做了有系統的整理, 並形塑成公設的數學, 再推導後續的結果, 不過一旦超出原來的設計就不妙了。比方說平行公設, 一直有人想證明它。

這裡摻雜了不同的因素：一方面人們相信我們看世界只能有唯一一種方式, 試著以公設的方式來證明這點, 卻不成功。終於數學家理解到必須破繭而出打破對公設天真的想法, 公設曾經很有用, 但是有其侷限, 公設已經完成使命, 最終必須捨棄。從此, 數學往不同的方向行進, 從單純觀察、描述人們看得到的東西, 轉爲描述人們不能直接看到 — 只能經由非常隱晦的方式得知的東西, Abel (*Niels Henrik Abel, 1802～1829, 挪威數學家, 在不同的領域有先驅的貢獻, 最著名的是證明一般五次方程沒有根式解*) 是促成這個轉變的人之一。現代數學在 19 世紀初期成形, 然後愈來愈結構化。數學不僅處理眼睛看到的, 還包括在更基本的層面上處理事物的結構。當時數學家面對的一個問題是嘗試瞭解歐氏幾何的侷限, 這個問題如果用現代 (*數學*) 語言來陳述非常簡潔明白, 卻經過數百年才發展出這樣的語言。這個工作由 Lobachevsky, Bolyai 和高斯開端, 在不同的領域則是由 Abel 和 Galois 開始 (*Évariste Galois, 1811～1832, 法國數學家, 他的工作成爲後世抽象代數 Galois 理論及 Galois 群的基礎*)。

得獎人在幾何上的研究

大家公認你在 1970 年代後期革新了黎曼幾何。請爲我們解釋其中新穎的創見, 以及能夠突破的想法。

我不能解釋這個, 突破? 原創? 我從不做如是想。每個數學家在探討某些新的東西時, 不會理會它是新的。你相信大家都知道, 幾乎是當下分明, 只是別人沒說出來而已。事實上許多數學證明都有這樣的情形; 證明的想法幾乎從沒被人說出來過。有人認爲顯而易見, 有人則不知不覺, 不同背景的人有不同的認知。

你的代表作之一被人形容爲將幾何軟化 (the softening of geometry) — 以不等式或逼近或漸近方程來取代方程式。例子包括以「疏略的觀點 (coarse viewpoint)」研究黎曼幾何, 也就是同時考慮所有的黎曼結構。這是非常有創意的, 過去從來沒有人想到, 不是嗎?

也許是吧。不過我還是不能確定是否有人有過同樣的想法。對於我, 這個想法從一開始就是清楚的, 其實有很長一段時間我認爲每個人都知道, 一直沒有將它說出來。我相信有人知道它但是從來沒有機會大聲地公諸於世。最終因爲我在法國開課, 把它有系統地整理出來。

首先, 你有了這個新的視角, 基本的想法也許很簡單, 但是你是第一個在這個方向得到深刻結果

的人。

不過, 還是有前人的工作。黎曼幾何的這個趨勢從 Jeff Cheeger (*1943～, 美國數學家, 研究微分幾何及其與拓樸、分析間的連結*) 的工作開始。早先描述流形的語言頗爲抽象, 有許多上、下標, 很難入手。我認爲最先將黎曼幾何變得簡單的工作之一是 John Nash (*1928～2015, 美國數學家, 在賽局理論、微分幾何及偏微分方程有根本貢獻*) 的結果。事實上, 他對我的影響極大。他只是把流形拿在手裡, 放到空間中, 把玩它們。我從這裡初次學到非常實在的幾何, 簡單的東西, 但是必須將它投射到維度很高的空間。然後是 Jeff Cheeger 的工作, 表面上是非常不同的主題, 卻有相同的態度 — 事情可以經由正確的形式化變得頗爲簡單。所以我只是跟隨著他們的腳步。

所以你很早就研讀了 Nash 的工作而且深受影響?

是的, 我看得很用心, 而且我相信自己是唯一徹頭徹尾讀過他的論文的人。從後來別人寫的論文判斷, 我不認爲他們認真讀過。

何以見得?

起初, 看到 Nash 有篇文章, 我認爲毫無道理, 但是 Rokhlin 教授說:「不, 不, 這篇你非看不可。」我還是覺得是天方夜譚; 不可能是對的。但是之後再看, 簡直不可思議, 不可能對的竟然是正確的。三篇論文中, 關於嵌入 (embedding) 的兩篇較難, 看起來很荒謬。再細究嵌入的方式, 仍然覺得荒謬。在瞭解其中的想法之後, 許多人嘗試找出更好的作法。不過看了這些人做的, 還有自己試過的, 再回頭來看 Nash, 不得不承認他技高一籌, 他有高超強大的分析功力加上幾何直覺。對於我這是一個奇特的發現:世界竟然可以這樣違背我們的認知。

John Nash 獲得諾貝爾經濟獎, 也是電影美麗世界主角的原型。許多人認爲以他的工作應該得到菲爾茲獎, 你同意嗎?

是的, 撇開獎項, 當我們考慮他這個人, 他在科學上的成就, 他的發現真是匪夷所思。他的思考方式極不尋常, 他在幾何上的工作, 包括結果、技巧、想法各方面來看都違背了一般的預期。他用極其簡單的方式處理各種事, 簡單得每個人都可以理解, 但是沒人相信這樣行得通。他還有巨大的執行能力 — 以戲劇性的分析功力將想法付諸實現。在我看來, 他在幾何上的成就遠遠超過在經濟上的好多好多倍, 兩者不能相提並論。這是在如何思考流形的態度上, 一個不可置信的改變。我們可以徒手操弄流形, 結果卻可能比窮盡種種傳統手法還有威力。

所以你覺得 Nash 對你和你的工作有重要的影響?

絕對的。他的工作以及 Smale 的工作 (*Stephen Smale, 1930～, 美國數學家, 研究拓樸、動力系統及數理經濟, 1966 菲爾茲獎得主*), 這是 1960 年代初期 Sergei Novikov (*1938～, 研究代數拓樸、孤立子理論, 1970 菲爾茲獎得主*) 在暑期學校 (summer school) 中爲我講解

的, 一直是對我最重要而全面的影響。

你引入 h-principle, 這裡"h"代表同態 (homotopy), 來探討一類源自微分幾何, 而不是自然科學的偏微分方程式, 如今這已是非常有力的工具, 請爲我們解釋 h-principle 以及引入這個觀念背後的想法。

動機正是來自 Smale 和 Nash 的工作。那時我理解到他倆處理的是大致相同的題材 — 但在過去一直沒被釐淸。舉例來說, 如果用 Nash 的技巧, 不必用什麼高深的東西, 立刻可以一網打盡所有浸入 (immersion) 的結果。Nash 的第一個引理就證明了拓樸裡所有的浸入定理! 這些讓我思索了好多年, 嘗試瞭解背後的機制。我領悟到有個簡單通用的機制, 比較形式但可以把兩人的想法整合起來。可以用到許多類型的方程式, 因爲是橫跨兩個頗爲遙遠數學主題的連結 (interpolation), 所以涵蓋的範圍很大。

你證明了一個著名的定理, 它綜合了 Milnor-Wolf 及 Tits 的定理。這個定理告訴我們一個以多項式速率增長 (polynomial growth) 的有限生成群, 必定包含一個有限指標 (finite index) 的 nilpotent 子群。你的證明最讓人稱道的是, 實際上你用了 Hilbert 第五問題。顯然, 自從 Gleason (*Andrew M. Gleason, 美國數學家, 曾於二次大戰時破解德軍、日軍密碼, 在李群、量子力學、組合等領域有根本的貢獻*), Montgomery (*Deane Montgomery, 1909～1992, 美國數學家, 研究拓樸群*) 和 Zippin (*Leo Zippin, 1905～1995, 俄裔美國數學家, 研究拓樸群*) 解決它以來, 這是第一次意義重大的應用。請爲我們説明並加以引申?

我曾經想將這個定理在不同的脈絡下應用到黎曼幾何, 靈感來自 Margulis (*Grigory Margulis, 1946～, 研究李群的離散子群、Diophantine 逼近等, 1978 菲爾茲獎得主*) 1967 年關於 3 維 Anosov 流 (Anosov flow) 的論文和他 1970 年引入的準 — 等度量 (quasi-isometries) 對 Mostow 剛性定理 (rigidity theorem) 的詮釋。我想要證明一些東西, 不過卻是錯的。我試著用拓樸動力學中某個版本的 Shub-Franks 建構, 也不行。同時有一篇 Hirsch (*Morris Hirsch, 1933～, 美國數學家, 研究拓樸、動力系統*) 的文章, 考慮的正是多項式增長速率的問題 — 是這個問題的特殊情形 — 嘗試的方法是拓樸群的分類, 同樣不行, 所以我相信這個方法不管用。我們大致明白很接近卻又還是行不通。但是當我試著運用這套辦法將流形極限的想法形式化時, 我察覺到可能行得通。對我可說是個驚喜。

當你發現這樣可行, 一定是個非常美好的經驗。

不過, 這並不真的是乍現的靈光。我領悟到所需要的不過是觀念上一點點的改變, 接下來要做的不難。在某種意義上, 證明極其簡單。利用極限的一個顯然的觀念, 再藉助分析的威力, 可以多次趨近極限, 創造出前所未見的結構。你不覺得做了什麼, 卻奇妙地達成了些事, 讓我很意外。

你引入了從無窮遠處考慮群的想法, 能恰當的描述群所連結的一串度量空間在所謂的 Gromov-Hausdorff 度量之下的極限。這個技巧在你的運用下有深刻的效果, 請談談你的看法。

在用極限與這個想法證明了關於多項式速率增長的定理之後, Van den Dries (*Lou Van den Dries, 1951∼, 荷蘭數學家, 研究模型理論*) 和 Wilkie (*Alex Wilkie, 1948∼, 英國數學家, 研究模型理論、邏輯*) 用 Ultrafilters 給出一個更好的證明。於是我再回頭考慮它, 發現這個定理適用的範圍更廣, 包含極限雖不存在但 Ultralimits 存在的情形, 而且還對許多數學物體, 包含群, 提供了非常好的看法, 不過仍然沒達到雷霆萬鈞之力。

在群的方面, 我受到 Word Problems (1973) 書中 Paul Schupp (*1937∼, 美國數學家, 研究幾何群論、計算複雜度等*) 針對小消去理論 (the small cancellation theory) 總覽 (survey) 的影響, 他說「大家並不瞭解小消去群是什麼」, 我認爲這是非常坦率, 非常有用的評語。這話讓我覺得很舒坦, 因爲我也不瞭解。我開始思考到底什麼是小消去群, 後來就引出雙曲群的觀念。我蠻開心的, 不過在寫出文章之前, 我有段時間無法處理一些技術上的問題, 例如證明一個類似 Cartan-Hadamard 的定理。

你什麼時候引進雙曲群的概念?

我最早學到群的幾何是在 1960 年代中期, Dima Kazhdan 爲我解釋 Kurosh 子群定理的拓樸證明。後來我讀了 1971 年 Inventiones 同一期中的兩篇文章 : Griffiths (*Phillip Griffiths, 1938∼, 美國數學家, 研究幾何, 尤其是複流形的代數幾何*) 關於複雙曲性 (complex hyperbolicity) 的論文, 以及 Klingenberg (*Wilhelm Klingenberg, 1924∼2010, 德國數學家, 研究微分幾何*) 關於雙曲型流形的論文。後者有雙曲性大致的想法, 雖然主要定理並不正確。還有前面提到 Schupp 的論文。

1978 年在 Stony Brook 的會議我第一次提出雙曲群的定義, 命名爲 Is(2) 群, 因爲它滿足二維的線性等周不等式, 文章在三年後刊出。記得我在 1977 年的 Arbeitstagung 也講過。我試了大約十年, 想要證明每個雙曲群都可以成爲 (realizable) 一個負曲率空間, 沒有成功, 到現在還不知道對錯。後來 Steve Gersten (*美國數學家, 研究代數*) 說服我把已知的結果寫下來, 我寫了但很不滿意, 因爲不能確定是否真的需要這類群的理論; 如果它們真的如我所說是「幾何的」, 就不需要雙曲性的理論, 而且應該會有些更好的定理。

你說過幾乎所有的群都是雙曲群?

對, 這正是關鍵。當我瞭解到在某些通用的建構 (generic constructions) 中, 不需要曲率就可以更清楚的看到雙曲性, 於是我接受雙曲性這個觀念, 認爲它有存在的價值。在這方面的第一篇文章中, 我建議了一個頗爲技術性的定義和術語, 認爲那是初步的概念。但是最終我體認到, 不管我嘗試證明的「幾何化」定理是否成立, 這個概念可能都是正確的。此外, 1980 年代初期 Ilya Rips (*1948∼, 拉托維亞出生以色列數學家, 研究幾何群*) 在組合的框架下發展出雙曲

群的理論, 遠遠超出當時我所知道的, 那時和他的討論以及正在發展中的 Thurston 的 3-D 理論 (*William Thurston, 1946～2012, 美國數學家, 是低維拓樸研究的先驅, 1982 菲爾茲獎得主*), 還有 Cannon (*James W. Cannon, 1943～, 美國數學家, 研究低維拓樸、幾何群*) 對 Thurston 有理性猜測 (rationality conjecture) 的解, 這些都鼓勵了我。

讓我們換個領域, Symplectic Geometry, 你在這方面同樣有革命性的貢獻。你引入複分析的方法, 也就是擬全純曲線 (pseudo-holomorphic curves), 請談談你的想法, 解釋如何得到這個新穎的切入方式, 還有與這個相關, 和弦論有關的 Gromov-Witten 不變量。

好的。這個奇妙的發現我記憶鮮明, 到現在都歷歷在目。那時我正在閱讀 Pogorelov (*Aleksei V. Pogorelov, 1919～2002, 蘇聯數學家, 研究凸幾何、微分幾何、幾何偏微分方程, 是多本幾何教科書的作者*) 的凸曲面剛性性質的書, 書中用到 Bers (*Lipman Bers, 1914～1993, 美國數學家*) 和 Vekua (*Ilya Vekua, 1907～1977, 喬治亞數學家*) 發展的所謂準 — 解析 (quasi-analytic) 函數, 他討論某些微分方程, 並且說它們的解是準-解析函數。我無法理解兩者有什麼共通處, 我翻閱他的書以及這些人的文章, 但一點也不懂, 到現在都還是。我非常不開心, 可是當我用幾何的語言來思考, 立刻看到那裡有個殆複結構 (almost complex structure), 而解就是這個殆複結構的全純曲線。這沒什麼特別, 因爲任何兩個變數的橢圓系統都有這個性質, 它與歌西-黎曼方程有相同的主要符號 (principal symbol)。一旦採用這樣的說法, 他用的定理就顯而易見。不需要引用任何理論, 因爲複數本身有個強制的定向 (orientation), 就只需要這個。

你說顯而易見, 但是沒有多少數學家知道這事。

確實如此。他們一頭鑽進定理的證明, 卻從不抬頭審視, 一旦換個語言檢視, 就清晰可見, 因爲有代數幾何的經驗。只要懂得代數幾何, 就會觀察到它們是同一回事。如今複分析和代數幾何已經發展得很成熟, 知道這些理論, 就會覺察到沒什麼不同, 用到的只是其中的一部份, 不過是在更廣義的層次。其次, 老實說有段時間我嘗試用它來重新瞭解 Donaldson 理論 (*Simon Donaldson, 1957～, 英國數學家, 以研究四維可微流形的拓樸著名, 1986 菲爾茲獎得主*), 不過不成功, 因爲有些技術上的困難無法克服。其實, 它與四維流形是否是 Kählaer 的障礙 (obstruction) 類似。我找 Pierre Deligne (*1944～, 比利時數學家, 研究代數幾何, 1978 菲爾茲獎得主*) 問他是否有不是 Kählaerian 同時具有某些糟糕性質的複曲面, 他說有, 並且舉出一些例子。我轉而考慮 symplectic 的情形, 發現可以如法炮製。所以再一次, 一旦知道該往哪裡走, 事情就很簡單, 簡單得讓我不敢相信竟然行得通。因爲過去只有 Donaldson 一個前例, 是 Donaldson 的理論告訴我們如此論證可以導出這樣的結論。在 Donaldson 之前沒有, 如果不是 Donaldson 的發現給我莫大的鼓勵, 我可能不會認爲這行得通。此外, 1960 年代晚期我從 Dima Fuks (*Dmitry B. Fuks, 1939～, 蘇聯出生數學家, 研究無窮維李群表現理論*) 那裡

知道 Arnold 猜測, 還有 Eliashberg (*Yakov Eliashberg, 1946∼, 蘇聯出生數學家, 研究辛幾何, 詳數播 162 期*) 在 1970 年代發展 symplectic rigidity 的想法, 以及 Conley-Zehnder 定理, 這些背景讓我能夠做到上述的工作。

能不能談談 Perelman (*Grigori Perelman, 1966∼, 俄羅斯數學家, 研究黎曼幾何、拓樸, 2006 菲爾茲獎得主*) 和 Hamilton (*Richard S. Hamilton, 1943∼, 美國數學家, 研究微分幾何, 幾何分析*) 關於 Poincaré 猜測的證明, 他們是否用了你的結果?

沒有, 即便有, 也只是非常簡單的東西。那是完全不同的數學, 我知道它和幾何相關, 不過是次要的, 基本上是一類相當不同的數學, 我得承認我的瞭解僅止於皮毛。但我必須說, 比起我們對廣義的歌西 — 黎曼方程, 或是 Yang-Mills, Donaldson, Seiberg-Witten 等方程的瞭解, 這裡基本上是尚未開拓的領域。有這個定理在這裡, 但是多少還是孤立的, 沒有以它為中心更廣的知識, 我們必須等等, 看看未來的變化。當然我們期望它能蓬勃發展。

你和 Alain Connes (*1947∼, 法國數學家, 研究非交換幾何、算子代數, 1982 菲爾茲獎得主*) 有交流嗎?

喔, 當然。我們頗有互動, 雖然我們思考的方式很不一樣。他理解一半, 我理解另一半, 當中只有一丁點交集, 不可思議的, 有時候竟然得到管用的結果。我和他以及 Moscovici (*Henri Moscovici, 研究非交換幾何、大域分析*) 已經合寫了兩篇文章, 證明 Novikov 猜測的一些特殊情形。

你想出來某些群上的 expanders 的例子, 造出 Baum-Connes 猜測的反例。

這個反例是由 Higson (*Nigel Higson, 1963∼, 加拿大數學家, 研究非交換幾何、算子代數、K-理論*), [Vincent] Lafforgue (*1974∼, 法國數學家, 研究算子代數的 K-理論*) 和 Skandalis (*Georges Skandalis, 1955∼, 希臘和法國數學家, 研究非交換幾何、算子代數*) 利用隨機群的建構得到的。

有沒有一個定理或結果是你最引以為傲的?

有。毫無疑問, 就是引入擬全純曲線。其它的都只不過是溫故而將已知的看起來像新發現。

你太謙虛了。

—本文譯者為中研院數學所退休研究人員—