數學傳播 42卷2期, pp. 44-59

Andrew Wiles 爵士訪談錄

翻譯：姜義浩

Andrew Wiles 教授獲挪威文理學院頒授 2016 年 Abel 獎。配合頒獎典禮, Martin Raussen 教授 (Aalborg University, Denmark) 及 Christian Skau 教授 (Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway) 於 2016 年 5 月 23 日在奧斯陸進行本次訪談。原文初登載於歐洲數學會 (EMS) 2016 年十二月號通訊[1], pp.29-38。EMS、Andrew Wiles 教授及訪談者同意本刊翻譯轉載。

挪威皇太子 Haako 授予 Andrew Wiles 爵士 Abel 獎。由 Audun Braastad 拍攝

[1] http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2016-12-102.pdf

R/S: Wiles 教授, 首先恭喜你獲頒 2016 年度 Abel 獎。說實話, 我們自幾年前就期盼這一次的訪談。你不僅在數學界聲譽卓著, 在公眾間也享有盛名。我們引用 Abel 獎委員會的話 :「藉由橢圓曲線的模猜想 (Modularity Conjecture), 費馬最後定理震撼人心的證明開啓了數論的新紀元」。這個證明可回溯至 1994 年; 也就是說, 你等了二十多年才拿到 Abel 獎。儘管如此, 你還是目前最年輕的 Abel 獎得主。

你完成費馬最後定理的證明後, 不得不接受大量的採訪, 這使得我們的任務難以執行, 因爲我們必須想出一些你之前尚未多次回答的問題。我們只好盡力而爲了。

費馬定理的歷史回顧

R/S: 我們用一段拉丁文來起頭, 拉丁文的翻譯如下:「將一個高於二次的冪分成兩個同次冪之和是不可能的」。用現代的數學語言來說就是 : 在 n 大於 2 時, 方程式 $x^n + y^n = z^n$ 沒有正整數解。拉丁文繼續說下去, 翻譯如下: 「我發現一個絕妙的證明, 但是書的空白處太小了, 寫不下」。1637 年法國律師兼業餘數學家費馬 (Pierre de Fermat, 1601∼1665) 在他的 Diophantus (Arithmatic) 空白處寫下這句話。他當然沒意料到, 這句話讓專業數學家及業餘數學家忙了幾世紀, 試圖找到證明。

可否簡短介紹一下, 在你邁向成功前, 眾人爲證明這個定理所做的一些嘗試。另外, 何以這般質樸率直的問題如此吸引人? 在數論的發展中, 何以這些嘗試的成果如此豐碩?

Wiles: 第一個認真的嘗試大概是費馬自己做的。可惜的是, 除了他對特殊狀況 $n = 3$ 及 $n = 4$ 的闡述[2], 我們對他的方法一無所知。他證明了兩個立方的和不可能寫成某數的立方, 兩個四次方的和也不可能寫成某數的四次方。他用了很漂亮的方法證明這些, 我們稱之爲無窮下降法 (infinite decent)。在算術中, 這是新的證明方法, 或者至少算是陳述證明的新方法。他在信中向同事解釋這個方法, 也在有名的頁邊空白處寫下它; 空白處夠他寫下至少其中一部分。費馬辭世後, 他的兒子出版了頁邊筆記, 隨後這個問題蟄伏了一陣子。之後 Euler (1707∼1783) 和其他的人又試圖重現這個絕妙的證明而未果。情況在十九世紀中葉變得極其戲劇化, 各式各樣的人都認爲自己可以解決這個問題, 在法國科學院 (French Academy) 這件事情廣受討論, Lamé (1795∼1870) 聲稱自己即將證得定理, Cauchy (1789∼1857) 也如此自認。

事實上, 後來德國數學家 Kummer (1810∼1893) 寫了論文闡述 : 基本癥結在於所謂的算術基本定理。在普通整數系, 任意整數基本上只可以單一方法分解成質數的乘積, 譬如 12 可寫成 $2 \times 2 \times 3$, 且無其他分解 12 的方式。但嘗試解決費馬問題時, 在你實際想用的數系, 質因數分解不具唯一性。證明費馬定理的每一種嘗試, 都因此而停滯不

[2]嚴格說來, Euler 首先對 $n = 3$ 的情況提出完整證明。

前。Kummer 鉅細靡遺地對這點做分析, 得到最漂亮的結果。最終解決了很多、很多的情況; 譬如, $n < 100$ 時, 除了 37、59 和 67 之外, 他對所有質數提出證明。但他終究未能解決這個問題。他的方法奠基於費馬引入的無窮下降法, 套用於新的數系。

他所用的新數系孕育出代數數論。衆人嘗試在這些新數系爲方程式求解, 而非以整數或有理數求解。費馬風格的嘗試持續多年, 在二十世紀逐漸消聲匿跡。無人提出根本性的新想法。在二十世紀下半葉, 數論持續發展並考慮其他問題; 數學家遺忘了費馬問題。

1985年, 德國數學家 Gerhard Frey 提出令人驚嘆的新想法; 他設費馬問題有某假想解, 將之改寫, 得到所謂的橢圓曲線。他認爲這個橢圓曲線有非常奇特的性質, 猜想這樣的橢圓曲線根本不會存在。基於此想法, 隔年, 美國數學家 Kenneth Ribet 用 Frey 的橢圓曲線證明 : 任何費馬問題的解都與衆所周知的模猜想相抵觸。這個猜想的較弱形式由谷山 (Taniyama, 1927∼1958) 提出, 隨後志村 (Shimura) 加以改進。但第一個證據源自 André Weil (1906∼1998), 他讓我們得以詳細檢驗此精確形式的模猜想。接著有許多證據顯示這個結果應該是對的。在這個時間點, 數學家可以看出 : 費馬是正確的, 而且一定存在證明。

事實上, 模猜想的數學, 不容束之高閣五百年。在當代數學, 它是橫置路中央的路障, 是至關緊要的問題。而費馬的工作大可擱置一旁, 甚或永遠忘記。但模猜想不容或忘。當我獲悉 Ribet 的結果, 頃刻明白這個問題可解, 隨即著手嘗試。

R/S: 關於費馬所聲稱的證明, 你是否認爲他和 Lamé 有同樣的想法, 誤設分圓 (cyclotomic) 整數具有唯一的質因數分解?

Wiles: 我不認爲如此, 雖然這個想法可能藏身某處。這很難理解。André Weil 討論過這個問題。費馬考慮的其他問題都相關於 genus 爲零或一的曲線。突然間他寫下一個 genus 更高的曲線, 他要如何思考?

青少年時期, 我曾獨自嘗試求解; 當時我把自己放在費馬的思想框架中, 因爲除此之外幾乎無計可施。我能瞭解他在十七世紀的數學, 但無能出其右。在我看來, 他做的每件事, 追根究底都與二次型 (quadratic forms) 相關, 而我認爲那是思考此問題的一個可能方法。固然我從未成功解題, 但也無其他事證顯示費馬曾落入質因數分解唯一性的陷阱。事實上, 從二次型的觀點來看, 他瞭解質因數分解有時唯一、有時不唯一。在他的論述中, 他瞭解這個差別。我想他不可能犯這個錯。

R/S: 你提到 André Weil 題爲《*Number Theory: an approach through history from Hammurapi to Legendre*》的書。書中提到費馬曾考慮方程式 $x^3 - y^2 = 2$, 並證明它有唯一解 : $x = 3$, $y = \pm 5$。André Weil 猜測費馬當時考慮的是環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, 而在此環質因數分解具唯一性。

Wiles: 對的, 他用到質因數分解的唯一性, 但他是藉由二次型。我相信他也考慮了對應於 $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ 的二次型, 而這個二次型的質因數分解不具唯一性。我相信他瞭解。我的印象是 ： 當我思考它時, 他瞭解這個差異。

數學教育

R/S: 據說你自幼對數學難題感興趣。你認爲這種興趣從何而來? 是否受特定人物影響?

Wiles: 我自幼喜歡數學。十歲時就在圖書館的書架上找數學書看。有一次我抽出 E. T. Bell (1883∼1960) 題爲《*The Last Problem*》的書, 封面上描述費馬問題、Wolfskehl 獎以及這個問題的浪漫歷史。我完全被它迷住了。

R/S: 這本書中還有其他事物讓你著迷嗎?

Wiles: 整本書都在講一個方程式。書中文字冗長, 數學反而並沒有想像得多。我想我比較對這個方程著迷。我發現這個方程後, 去找了其他數論的入門書, 學會了同餘, 解些同餘問題, 也閱讀費馬的其他作品。

R/S: 你在學校課業之外從事這些工作?

Wiles: 是的, 我覺得當時學校的負擔不重。

R/S: 當時你是否已明白自己有非凡的數學天賦?

Wiles: 我的確有數學的資質, 顯然我也喜歡做數學。但我不認爲我當時覺得自己很獨特, 事實上我不相信自己在學校是如此。另有其他同學同樣夠格被稱爲未來的數學家。其中的一些日後果真成爲數學家。

R/S: 當時你是否已打算研習數學, 並展開數學職涯?

Wiles: 不, 我不認爲當時我真正明白數學可以做一輩子, 那是我後來才瞭解的。但我無疑想盡可能地研究數學。當時我視野所及的一切都涉及數學。

R/S: 你於 1971 年進入牛津修習數學, 何以致之? 是否有特別的老師或領域對你特別重要?

Wiles: 我有位高中老師是數論方面的博士。他給了我一本書, 是 Hardy 及 Wright 合著的《*A Introduction to Theory of Numbers*》。我還找到 Davenport 寫的《*The Higher Arithmetic*》。對數論來說, 我認爲這兩本書極具啟發性。

R/S: 所以你在上大學前就已步上正軌?

Wiles: 是的。我入學前已走上正軌。事實上, 某種程度來說, 我覺得進了大學反而分了心, 因爲我必須學其他的東西, 諸如應用數學、邏輯等等, 但我只想做數論。第一年不允許做數

論, 而且三年級之前都無法真正全心做數論。

R/S: 你對幾何不像對代數和數論一樣有興趣?

Wiles: 我主要對代數及數論感興趣。我也很高興學其他東西, 但對數論最感興奮。我的老師們替我安排額外的數論課, 但那些實在不能提供什麼。

我一度決定善用多年來在學校學到的拉丁文, 嘗試閱讀費馬的原著。但我發現那實在太難。即使翻譯了拉丁文, 費馬用的不是我習於使用的代數符號, 因此了解起來極其困難。

R/S: 你畢業後赴劍橋, 真正開始研習數論, 指導教授為 John Coates。當時你必定有如釋重負的感覺?

Wiles: 對。在為期一年的預備年, 我只學習一系列學科; 之後我可以寫一篇特別的論文。John Coates 那時尚未在劍橋, 但他在暑假期間提供我一些幫助。總之, 那年暑假我遇見他, 隨即開始和他一起工作。那實在太棒了。由只是唸書和學習的大學歲月, 轉換到研究生涯, 對我來說真是個突破。那實在太棒了。

橢圓曲線

R/S: 我們推測你受 John Coates 啓發而去研究橢圓曲線及岩澤 (Iwasawa) 理論?

Wiles: 一點不錯。他有些精彩的想法, 慷慨與我分享。

R/S: 你是否曾告訴 John Coates 你對費馬問題的興趣?

Wiles: 我不太記得了, 可能有。其實十九世紀一來就沒有任何新的想法。大家都試圖改進舊的方法。是的, 有改進, 但那些改良的方法不像會趨近於解決方案。這太難了。

R/S: 你開始和 John Coates 工作時, 並不知道橢圓曲線對解決費馬最後問題至關緊要?

Wiles: 對, 這是絕妙的巧合。奇怪的是, 某種程度上, 迄今費馬仍讓人牢記的兩件最重要事蹟, 就是他在橢圓曲線的工作及他的最後定理。舉例來說, 你們剛提到的方程式 $y^2+2=x^3$ 就是橢圓曲線。這兩串工作在證明中交纏。

R/S: 能否解釋一下橢圓曲線是什麼? 為何橢圓曲線在數論中頗為重要?

Wiles: 對數論學家來說, 橢圓曲線因費馬而問世, 其方程式形為：y^2 等於某個具有理係數的 x 之三次多項式。問題是要找該方程式的有理解。費馬注意到以下幾件事：有時藉由一個甚或兩個有理解, 可以造出無窮多個其他解; 而有時方程式無解。後者發生在費馬最後定理 $n=3$ 的情況; 其方程式事實上是一個變相的橢圓曲線。有時你可以證明沒有任何有理解。你可以有無窮多個解, 也可以沒有解; 這對費馬來說已極明顯。

十九世紀初, 人們在複數系研究這些方程; Abel (1802～1829) 參與了橢圓函數的研究, 並將它們連結上橢圓曲線, 意味著橢圓曲線具有群結構。十九世紀初, 藉由雙週期函數, 已透徹了解橢圓曲線, 但闡釋的是方程式複數解的基礎結構。

Poincaré (1854～1912) 曾研究方程式的有理解。現今所謂的 Mordell-Weil 定理, 由 Mordell (1888～1972) 及 Weil 在 1920 年代提出證明, 回答了 Poincaré 的某個提問。在我們的架構裡, 它說：數體-K 上之橢圓曲線的 K-有理點 (特別是 K 爲有理數時), 構成有限生成的交換群 (finitely generated abelian group)。亦即, 用費馬的語言來說：始自有限的幾個解, 用割線-切線過程可生成所有的解。

Birch and Swinnerton-Dyer, Tate-Shafarevich, Selmer $\cdots$.

現在我們知道它的結構, 是非常漂亮的代數結構, 是群的結構, 但這並沒未實際幫助我們找到解。沒有人知道求解的一般性方法; 1960 年代, 有一些猜想自

Birch and Swinnerton-Dyer 猜想湧現。這包含兩個面向, 其中之一有些分析性, 另一面向則可藉由所謂的 Tate-Shafarevich 群來描述。基本上, Tate-Shafarevich 群呈現用演算法求解的阻礙。而 Birch and Swinnerton-Dyer 猜想告訴我們：存在分析 Tate-Shafarevich 群的實際方法。把這些拼湊在一起, 最終應會得到求解的演算法。

R/S: 你是研究生時, 已跟著 John Coates 研究 Birch and Swinnerton-Dyer 猜想?

Wiles: 這正是 John Coates 提出的建議。對某類橢圓曲線, 我們得到第一個結果, 關乎這類橢圓曲線的解與所謂的 L-函數在分析上如何連結。

R/S: 這些就是允許複數乘法的橢圓曲線嗎?

Wiles: 正是如此。這些就是具有複數乘法的橢圓曲線。

R/S: 這個是有關 Birch and Swinnerton-Dyer 猜想的第一個一般性的結果?

Wiles: 這是第一個處理一整族情況的結果, 而非如之前僅處理個別情況。個別的情況有很多數值數據, 但是這是第一個適用於無限多個情況的結果。

R/S: 這是在有理數上嗎?

Wiles: 對。

R/S: 我們應該提一下, Birch and Swinnerton-Dyer 猜想被列爲 Clay 千禧年大獎問題, 解決者可獲頒一百萬美元。

Wiles: 我覺得它很吸引人。部分原因是它源自費馬的工作, 正如費馬問題。這是另一個「易於陳述」的問題：涉及某方程 (在該情況方程的次數極低)、我們無法掌握、肇始於費馬。我認爲這是個很吸引人的問題。

R/S: 你認爲我們有能力解決它嗎? 換言之, 現有工具是否足以讓勇於挑戰者成功解題? 或者還要等三百年才能看到它被解決?

Wiles: 我想應該不需要三百年, 但也不認爲它是千禧年問題中最簡單的。我認爲我們還缺一些東西。我不確定目前是否已有足夠的工具; 可能已有。對於這些極其困難的問題, 總有一些臆測。或許工具根本還沒出現。

我不相信任何十九世紀的人能解決費馬最後定理, 以最終的解決方法來看絕無可能。在數學史上還隔著太大的間隙; 必須再等數百年, 合適的工具才會出現在正確的地方。你無法確知自己是否生逢其時。這正是問題如此深富挑戰性的原因。對何者可爲、何者不可爲有些直覺, 將爲求解者提供莫大的幫助。

R/S: 你提到 Tate-Shafarevich 群, 而 Selmer 群因之而出現。Selmer (1920∼2006) 是挪威數學家, 而 Cassels (1922∼2015) 爲 Selmer 群命名。你可否談談 Selmer 群、它與 Tate-Shafarevich 群的關係, 即使有點技術性?

Wiles: 它很技術性。但我或許能針對 Selmer 群解說其基本想法。你想在橢圓曲線上找到有理解, 方法是假設你已有若干個橢圓曲線上的有理點, 然後用它們去生成擴張體。當我說「生成擴張體」時, 意指對橢圓曲線上的這些點取方根。如同取 5 的 n 次方根及 2 的三次方根, 你可以在橢圓曲線上做同樣的事。你可以取一個點的 n 次方根; 它們正是「連加 n 次後得到起始點」的所有點。它們爲起始的數體生成了某些擴張; 在我們的情況, 起始數體是有理數體 $\mathbb{Q}$。

你可以對這些擴展做許多限制; 基本上, Selmer 群是滿足所有明顯限制的最小擴展。

讓我做個總結 : 你有一群點, 它們生成一些擴展, 但那太大了, 你並不需要整個擴展。你用局部的準則、p-adic 數盡可能削減擴展, 得到所謂的 Selmer 群。點所生成的群和 Selmer 群的差, 實質上就是 Tate-Shafarevich 群。所以, 當你經由 Selmer 群得到某些點, Tate-Sharafrevich 群就是誤差項。

R/S: Cassels 提及的 Selmer 之論文中, 討論了 $3x^2+4y^3+5z^3=0$ 之類的 Diophantine 方程。Selmer 證明它在整數系只有 0 解, 但模 n 時對所有 n 都有非零解。特別的是, 這些曲線沒有有理點。爲何 Cassels 以 Selmer 的名字爲這些群命名?

Wiles: 它們之間有非常微妙的關係。你實際考慮的是某橢圓曲線, 在此情況爲 $x^3+y^3+60z^3=0$; 這是個變相的橢圓曲線。Tate-Shafarevich 群牽涉到其他類似的橢圓曲線, 譬如 $3x^3+4y^3+5z^3=0$; 這是一個 genus 爲 1 的曲線, 其上無有理點, 它的 Jacobian 就是原來的橢圓曲線 $x^3+y^3+60z^3=0$。描述 Tate-Shafarevich 群的一種方法就是用這些 genus 爲 1 且無有理點的曲線。把這些組裝在一起, 就可形成 Tate-Shafarevich 群, 而這會體現在 Selmer 群。這太錯綜複雜而難以用文字解釋, 但這提供不同的觀點。

我由擴展的角度用算數術語來解釋。較爲幾何的術語, 訴諸 twisted forms。

模猜想

R/S: 你最後證得的是現今所謂模猜想的特殊情況。要解釋它, 必須從模形式 (modular forms) 談起, 並說明模形式與橢圓曲線相的關聯。可否講解一下?

Wiles: 好的。我們已將有理橢圓曲線描述爲方程式 $y^2 = x^3 + ax + b$, 其中 a 和 b 是有理數 (另一條件是判別是不爲零)。如我之前所述, 此方程的複數解在十九世紀初已被描述; 你可用 Weiestrass $\wp$-函數 (特殊橢圓函數) 做很好的描述。但我們想要的, 是對這些橢圓曲線做全然不同的單值化 (uniformization), 以捕捉 a 和 b 是有理數的事實。它恰可把有理橢圓曲線參數化。因它反映了方程係數是有理數的事實, 它比橢圓函數更能掌握有理解; 橢圓函數只看到複結構。

此單值化源自模形式或模曲線。我們先描述一下模函數： 我們習於平移下保持不變的函數。富氏級數就是平移下不變的函數。模函數在更大的群、通常是 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的子群之作用下保持不變; 你要找一個單複變函數 $f(z)$, 通常定義在上半平面, 滿足 $f(z) = f((az+b)/(cz+d))$, 或更一般地, $f\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$, k: 正整數。

這些函數被稱爲模函數, 在十九世紀被廣泛研究。出乎意料的是, 它們掌控橢圓曲線的算術。描述它的最簡單方式如下：藉由把 z 對應到 $(az+b)/(cz+d)$, $SL_2(\mathbb{Z})$ 作用在上半平面 H, 因此我們可考慮 H 模 (modulo) 此作用的商, 繼而可賦予這個商一個曲線的結構。事實上, 它自然地會得到有理數上曲線的結構。

上述 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的子群若取爲所謂的同餘子群 (congruence subgroup), 其中 c 可被 N 整除[3], 則稱此曲線爲水平 (level) N 模曲線。模猜想聲稱：任意有理數上的橢圓曲線, 實際上都是某個整數 N 的水平 N 模曲線。模曲線使橢圓曲線得以單值化。乍看之下似乎我們吃虧了, 因爲這是 genus 較高的曲線, 更形複雜。但實際上它有更多結構, 因爲它是模空間。

R/S: 這是一個很有威力的工具嗎?

Wiles: 這是一個極爲強大的工具。有函數論、形變 (deformation) 理論及幾何方法等等。有許多研究它的工具。

R/S: 年輕的日本數學家谷山首先猜測或暗示這些關聯, 他的猜測較爲模糊吧?

Wiles: 他的猜想較爲模糊。他並未將之歸結爲模群 (modulo group) 作用下保持不變的函數。

[3] 編註：即 $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), c \equiv 0 \pmod N\right\}$.

我忘記他確切猜測了什麼： 是在某個群的作用下保持不變, 但我忘了他預測的確切是哪個群。它不似模群的同餘子群般精確。我想它原先是用日文寫的, 所以沒能廣爲流傳。我相信它是日本某會議編撰的一部分講義。

R/S: 當時是一個難以置信的大膽猜想, 不是嗎?

Wiles: 顯然是的。

R/S: 但後來逐漸引起其他數學家的關注。你曾提及 Gerhard Frey, 他提出了一個假想, 聯繫起費馬最後問題和模猜想。

Wiles: 對, Gerhard Frey 證明：如果你取一個費馬問題的解, 譬如 $a^p + b^p = c^p$, 接著考慮橢圓曲線 $y^2 = x(x - a^p)(x + b^p)$, 則此曲線的判別式會是完美的 p 次冪。你假設模猜想成立, 且思考這個結果的意涵; 你必須假設更強的東西 (亦即 Serre 的 epsilon 猜想), 而它迫使此橢圓曲線的水平 $N = 1$, 因此相關的同餘子群爲 $SL_2(\mathbb{Z})$。但 H 模 $SL_2(\mathbb{Z})$ 是 genus 爲零的曲線, 沒有橢圓曲線商, 所以它根本不存在。因此費馬問題不會有解。

證明的追尋

R/S: 由於 Serre 及 Ribet 清楚闡述了箇中關聯, 你有了進一步的關鍵素材, 你的工作於焉發軔。容我們概述這個故事的後續進展; 你已講述它多次, 它也是 BBC 紀錄片的焦點。

你移居美國後, 首先落腳哈佛, 之後轉赴普林斯頓大學, 成爲那裡的教授。獲悉 Ribet 的結果後, 你投注所有研究時間, 證明有理數上半穩定 (semistable) 橢圓曲線的模猜想。這項孤立而困難的工作持續了七年。這段期間, 你執教於普林斯頓大學, 並撫養稚齡子女。

證明看似在 1993 年完成了, 你在英國劍橋牛頓研究院的一系列三個演講是事件發展的最高潮, 當時你宣布費馬最後定理的證明。同儕數學家恭賀你, 甚至新聞界也對你的結果有興趣, 而這很少發生於數學結果。

但一份聲譽崇隆期刊的六位審稿人審查你的論文, 發現你的論證有微妙隱晦的漏洞, 於是你又重新來過。不久之後, 你請你的前博士生 Richard Taylor 回普林斯頓協助你。其後艱辛且沮喪的工作耗時十個月; 若將之比喻爲巨大壓力下的英雄奮戰, 我們認爲並不爲過。而後靈光一閃, 你突然發現：可以結合之前的嘗試及新的結果, 避開導致漏洞的問題。這正是你需要的, 你用它得到蘊含費馬最後定理的部份模猜想。眞是如釋重負! 你可否對這個戲劇化的故事做些評論?

Wiles: 從我的工作談起。我初成爲專業數學家而與 Coates 共事時, 意識到自己必須停止研究費馬問題, 因爲那將曠日持久, 且過去一百年間幾乎一事無成。我看到其他人、即使是非常出色的數學家, 也對此抱憾。Frey 的結果出現時, 我還對 Serre 部分的猜想存疑。但當 Ribet 證明它, okay, 就這樣!

這是漫長且艱辛的奮鬥。在某種意義下, 只做一個問題而丟開其它一切, 是不負責任的做法, 但我傾向如此。費馬問題很狹隘, 其實只是一個方程式, 其解決方案或許對其它問題毫無幫助。但模猜測是數論的一項重大問題, 無論如何值得研究, 因此時機絕佳。

做這樣的問題時, 需要好幾年才能真正建立起直覺, 了解自己需要什麼、解取決於什麼。你把不能用的及沒幫助的全都丟掉, 直到心智如此集中, 即使你犯了錯誤, 也因看得夠多而終究能找到另一出路。

有趣的是, 有些人研究了我在原先論證中犯的錯, 最近他們實際上證明了: 極其類似的論證可行。事實上, 對相近的情況, 類似於原始方法的論證似乎行得通, 但唯獨此情況行不通, 且目前尚無確實的解釋。所以, 我用 Euler 系統等等的那套論證, 在相近的情況都奏效, 但對於費馬問題所需考慮的情況則不然。這真是異乎尋常。

R/S: *你曾把追尋模定理證明的過程, 比喻爲穿越未經勘查的黑暗大廈的經歷。可否詳細說明?*

Wiles: 一開始我確實一無所知。模猜測是否屬實? 如何研究它? 我毫無先見之明。這個問題的麻煩是 (有點類似黎曼猜想的情況, 但這個問題更是如此), 你甚至不知道答案會來自數學哪一個分支。

有三種陳述問題的方法, 分屬幾何、算術及分析。分析學者試圖在這個問題上取得進展, 而我不太了解他們的技術。

有點幸運的是, 我的天生本能在算術, 我也直接走上算術一途; 但我可能是錯的。之前模猜測成立的已知情況僅限於複數乘法, 而其證明完全是分析的。

部分基於必要性, 部分是因我的知識背景, 我直接採用算術方法。我以研究岩澤理論的方式思考這個問題, 覺得非常有用。我和 John Coates 曾將岩澤理論用於橢圓曲線。我去哈佛時, 獲悉 Barry Mazur 的工作; 他一直在研究模曲線的幾何, 用了很多當代的工具, 我可以利用其中一些想法跟技巧。過了一陣子, 我意識到我其實可以用此起步, 找到進入問題的途徑。

R/S: *在你研究模猜想之前, 曾和 Barry Mazur 發表過聯名論文, 證明有理數上岩澤理論的最重要定理。可否請你告訴我們: 什麼是岩澤理論?*

Wiles: 岩澤理論源自 Kummer 關於分圓體 (cyclotomic fields) 的工作及他處理費馬最後問題的方法; 他研究了質 (prime) 分圓場的算術, 特別是其理想類群 (ideal class group)。岩澤的想法是考慮單位元素的所有 p 次方根形成的分圓體的塔 (tower)。岩澤理論主

要是證明 Galois 群的生成元在 p-質 (primary) 類群上的作用, 與 p-adic L-函數之間的聯繫。它有點類似於研究有限體上的曲線結構時, Frobenius 特徵多項式與 zeta 函數的關聯。

R/S: 開始研究模猜想時, 這些工具是否非常有用?

Wiles: 是的。它們給了我一個出發點。當時這並不明顯, 但思考一陣子後, 我意識到可能有辦法從那裡起步。

與 Abel 的工作類比

R/S: 容我引用一段文字:「城牆四周防衛森嚴; 儘管身處最後的堡壘, 這個問題拼命地自衛。誰會成爲幸運的天才, 領頭攻下它, 抑或逼迫它投降?」

Wiles: 想必是 E. T. Bell 說的, 對嗎?

R/S: 不對, 這引用自 Jean-Étienne Montucla (1725∼1799) 十八世紀後期的著作《*Histoire des Mathématiques*》。它其實是史上第一本述及數學歷史的書。這個引文指涉的是, 用根式解五次方程式的可解性或不可解性。

如你所知, Abel (1802∼1829) 在二十一歲時證明了一般五次方程式的不可解性。數學上, 他在奧斯陸完全孤立地工作。Abel 被這個問題深深吸引, 甚至爲之著迷。他也有個錯誤的開始, 曾自認能證明五次方程式可用根式求解。隨後他發現自己所犯的錯誤, 終究找到不可解的證明。

當時這個問題已有三百年歷史, 而且非常著名。若往前回溯兩百年, 我們可以對費馬問題套用同樣的引文。你解決它時, 它已有三百五十年歷史。這在很多方面是平行的故事, 你有何評論?

Wiles: 對。在某些意義下, 我的確覺得, 首先是 Abel, 隨後是 Galois (1811∼1832), 都從易於求解的方程, 轉而著眼於不能用根式求解的方程, 標示了代數上的躍遷 (transition)。這是代數上的突破, 由五次方程式引發。在某種程度上, 數論目前的整個趨勢, 是從基本上可交換 (abelian) 且可能可解的擴展, 躍遷至不可解的擴展。我們如何在不可解的擴展上做算術?

我相信, 模猜測所以能被解決, 是因我們已從原先的可交換情況, 轉換到不可交換 (non-abelian) 情況, 並同時發展了模及其他工具, 它們基本上是不可交換的工具。(但我應該說: 證明裡多半將就著利用可解的情況, 並不是因爲這樣較爲自然, 而是因爲我們尚未在一般不可解的情況解決相關問題)。

Abel 在數論也引發上述的躍遷, 提供了解方程式的工具。所以我認爲它們可相比擬。

R/S: Abel與費馬問題有些諷刺性的糾葛。二十一歲時, Abel 到哥本哈根拜訪當時北歐最重要的數學家 Degen 教授 (1766～1825)。Abel 寫了一封信給他在奧斯陸的導師 Holmboe (1795～1850), 陳述費馬方程的三個結果, 但沒提出任何證明, 其中一個結果實際上難以證明。當然如今這只是一件古玩。

在同一封信裡, 他吐露自己的沮喪, 不解爲何他在 n 等分雙扭線時, 得到的是 n^2 次方程而非 n 次方程。回到奧斯陸後, 他才發現雙扭線上的積分及一般第一類橢圓積分的雙週期性。

他在費馬方程上所做的, 到頭來只是一件古玩, 但他在橢圓函數上的成就, 及隱含於橢圓曲線的結果, 後來成爲解決它的相關工具。當然 Abel 不知道這與算術有何關聯。這個故事告訴我們：數學有時會以神秘的方式發展。

Wiles: 的確如此。

工作風格

R/S: 可否請你就一般數學家和你自己的工作風格提出評論? 在 2008 年愛因斯坦講座中, 普林斯頓高等研究院的著名物理暨數學家 Freeman Dyson 說：「有些數學家是鳥, 有些是青蛙。鳥在空中高飛, 俯瞰地平線內廣闊的數學全景; 他們喜歡的概念能統合思緒、並能匯集來自各處的各種問題。青蛙住在泥沼, 只能看到附近的花朵, 喜歡特定對象的細節, 一次解決一個問題」。

Dyson 並沒有說鳥比青蛙好, 或青蛙比鳥好。他自認不是鳥, 而是青蛙。

審閱你的工作, 很難判斷你該分到哪一類：是創造理論的鳥, 抑或是解決問題的青蛙? 你自己有何看法?

Wiles: 兩者都不像我。我的確不是鳥, 未統合不同的領域。我想及的青蛙總是跳來跳去, 但我自認心智極爲集中。我不知道該以哪種動物自況, 但自認不是青蛙, 因爲我不太能欣賞附近的景觀。我極其專注於當下正在研究的問題, 且精心選擇問題, 很難轉移足夠的心思, 去著眼於周遭的任何花朵。所以我認爲這兩種描述都不符合我。

R/S: 根據你自己的經驗, 一方面你艱困、專注且堅定地工作, 另一方面, 在較爲放鬆的心境下, 往往靈感毫無來由的地突然湧現。你能描述這兩方面的互動嗎? 你的頭腦一定曾下意識地考慮手邊的工作, 對嗎?

Wiles: 我想, 你所做的是, 到達一個境界, 淸楚地了解一個甚或好幾個理論, 以至於明白每一個視角, 也嘗試過大量的不同路徑。

在準備的階段要完成巨量的工作; 你必須瞭解所有的細節, 外加一些例子, 好做爲出發的平台。發展好這一切後, 輕鬆一下, 做一些其他的事情, 再回來時, 剎那間一切豁然開

朗。你之前爲什麼沒想到這些呢? 這就是你的心智替你做的事, 這就是靈光乍現。

我記得一個非數學的例子：曾有人給我看一份以哥德體書寫的手稿, 我完全看不懂; 試著瞭解幾個字母後就放棄了。半小時後, 我回頭再看一次, 突然間能讀完整份手稿。不知如何, 頭腦替你做好這件事。我們不完全知道它怎麼運作, 但我們知道必須先弄妥什麼條件, 好讓它得以發生。

R/S: 這讓人聯想到一個 Abel 的故事：他在柏林時, 和一些非數學家的挪威朋友合住公寓。他的一位朋友說：Abel 通常夜裡面醒來, 點一根蠟燭, 隨後寫下他醒來時的想法。顯然他的心智在睡覺時還在工作。

Wiles: 對, 我也這樣做, 除非醒來時不覺得需要寫下, 因爲自知不會忘記。但如果睡前有個想法, 我會覺得驚恐, 擔心醒來時不復記憶, 因此必須寫下。

R/S: 你用公式、幾何圖形或其他東西思考?

Wiles: 不盡然是幾何, 我認爲是模式 (pattern), 是見過的情況與目前處境的類比。在完美的世界中, 這些東西意味著什麼? 有哪一些要素該放進這個證明? 還有哪些口袋裡的東西還沒拿出來用? 有時它只不過是拼死一搏。我匯聚所有的證據, 我擁有的就僅這些; 我只能與它們合作, 除此之外別無他法。

我常覺得做數學如同當一隻松鼠, 知道在某一棵非常高的樹頂端有些堅果; 但這裡有好幾棵樹, 你不知道它是哪一棵。你爬上一棵樹, 想著：不對, 這看起來不像, 於是你爬下來, 爬上另一棵。你一輩子都在這些樹爬上爬下, 但最高只到達三十英尺。如果有人告訴你：只剩一棵沒爬過, 你就會繼續前行, 直到找到它。就某種意義而言, 關鍵是要排除錯誤的東西。如果你相信自己的直覺, 而你的直覺是對的, 且你堅持找到那棵樹, 則你終將找到它。

數學問題

R/S: Felix Klein(1849∼1925) 曾說：「當舊的結果以新的方法及見解來理解並闡明時, 數學就會有所進展」。當理解更充分、更深刻時, 新的問題自然就應運而生。David Hilbert (1862∼1943) 強調：問題是數學的命脈, 你同意嗎?

Wiles: 我當然同意 Hilbert, 好的問題是數學的命脈。我想這可在上世紀下半葉的數論中清楚看出。對我個人來說, 很顯然地, 模猜想、整個 Langlands 綱領 及 Birch-Swinnerton-Dyer 猜想, 給了我非常清晰的關注點, 讓我聚焦於應該試著完成的事。我們還有關於有限體上的曲線及簇 (variety) 的 Weil 猜想, 以及 Mordell 猜想等等。

這些問題集中了心智, 簡化了我們的目標。否則, 我們可能會非常渙散, 不確定何者有價

值、何者無價值。

R/S: 現今還有好問題, 如同 Hilbert 在 1900 年提出的二十三個問題?

Wiles: 我相信是的。

R/S: 你覺得現今最重要的問題是什麼? 如何納入 Langlands 綱領?

Wiles: 與我的領域相關的問題中, 我認爲 Langlands 綱領涵蓋的範圍最廣泛。在我瞭解的領域中, 我想黎曼猜想是最重要的問題; 我很難確切說明理由, 但我真的相信, 解決它會幫助我們解決其它問題。當然我對 Birch and Swinnerton-Dyer 猜想有著私人的情結。

R/S: 直覺有時會誤導我們。舉例來說, Hilbert 認爲黎曼猜想會在他生前解決。至於他的第七個問題, 他從未預期它在他有生之年被解決, 但 Gelfond (1906~1968) 在 1934 年解決了它。所以我們的直覺可能是錯的。

Wiles: 對。我不訝異 Hilbert 會那樣想。黎曼猜想的陳述非常清晰, 而且在函數體的架構下, 有一個類似的問題; 我們知道爲什麼它在那裡是對的, 且感覺上可以轉譯過來。確實有很多人嘗試而未果, 但我還是期望它比 Birch and Swinnerton-Dyer 猜想先被解決。

數學上的投資

R/S: 希望我們能在有生之年找到解答。

大致說來, 古典數學源自兩處 : 其一是物理科學, 另一來源簡而言之是數論的推導 (speculation), 是和應用無關的數論。

現在不同了。譬如, 在你的領域, 橢圓曲線已被應用於密碼學及資安。現今橢圓曲線正被用來生財。另一方面, 不僅物理, 許多科學實際上都獲益於數學思維及數學結果。現今的工業進步, 往往仰賴數學建模及優化方法。科學和工業都向數學界提出挑戰。

某種意義上, 數學已比以往更具應用性。有人會問 : 這對純數學是否會構成問題? 至少從資助機構的觀點來說, 純數學似乎不時被邊緣化。你是否認爲這是一個嚴重的問題?

Wiles: 相較之下, 兩三百年前的數學家能處理的數學更爲廣泛; 他們接觸的應用數學, 遠多於現今典型的純數學家。另一方面, 這或許是因爲我們記得的只是從前最好、最博學多聞的數學家。

資助機構的短視總會形成問題。它們無法在三年內看到成果。很難想像 : 純數學的任何發展及其應用會發生在三、五年內。這殆無可能。

另一方面, 我不相信, 任何順當運作的應用數學, 可以沒有純數學在背後支撐、爲它提供未來, 且讓它走在正軌。所以, 不投資純數學是極爲愚蠢的。

這就像把投資侷限在目前可見的能源。你必須投資未來; 必須投資核融合、太陽能或其

它事物。你不能耗盡現有資源後才開始擔心。數學也是如此; 不能在現有的純數學告罄後, 等你需要純數學的結果去做應用時, 才開始擔心。

數學獎項

R/S: 你的成就在證明費馬定理時達到高峰, 隨後你獲頒各種獎項, 包括瑞典科學院的 Rolf Schock 獎, 丹麥的 Ostrowski 獎, 法國的費馬獎, 以色列的 Wolf 獎, 香港的 Shaw 獎 (號稱爲東方諾貝爾獎), 且名單繼續羅列, 最後是明天的 Abel 獎。你是否喜歡這些獎及其慶祝活動?

Wiles: 我當然喜歡它們。它們是數學的慶典。衆人高興能在有生之年獲悉費馬之類的故事。我會很高興看到黎曼猜想被解決; 能看到它最終被解, 同時瞭解故事的結局, 真是令人興奮。很多這類故事的結局是我們無法生前目睹的。每當我們目睹這些故事的結局, 自然會去慶祝它。而我是從 E. T. Bell 的書得知費馬問題及附隨的 Wolfskehl 獎; 我終究拿了 Wolfskehl 獎, 只離截止日期幾年。

R/S: 這給我們引子來談論這個獎。Wolfskehl 獎於 1906 年由 Paul Wolfskehl, (1856∼1906) 創設, 他是一位對數學感興趣的德國醫師。他把十萬德國馬克 (相當於一百萬美金) 遺贈給首先證明費馬最後定理的人。根據遺囑, 該獎項在 2007 年 9 月 13 號日前有效, 而你於 1997 年獲獎。由於德國在第一次世界大戰後遭逢惡性通貨膨脹, 你獲獎時的獎金縮水不少。

Wiles: 對我來說, 金額並不重要。重要的是我對 Wolfskehl 獎的情感羈絆。

研究生

R/S: 迄今你有二十一名博士生, 且你吸引了非常有天賦的學生。有些學生非常傑出, 譬如 Manjul Bhargava 在 2014 年獲頒 Fields 獎。做這樣的學生的指導教授, 必定樂在其中?

Wiles: 對。我不認爲自己有太多功勞。在 Manjul 的案例, 我建議他一個題目, 之後我就沒再多做什麼。他自己提出了絕妙的創見。在某些意義上, 資賦優異的學生會提升你的信譽; 但事實上, 資賦優異的學生不需太多幫助。

R/S: 你和研究生互動的典型方式?

Wiles: 我認爲, 研究生最難領會的是 : 在之後的職業生涯中, 你還得繼續做下去。挑選問題很困難。如果你只指定一個問題讓他們做, 在某種意義上, 這並沒有幫他們太多。他們解決了那個問題; 但困難的是, 他們之後必須動身去找其它問題。所以我比較喜歡和他們

一起選定問題。

在他們專注於問題前, 我告訴他們一些初步的想法, 及該考慮的數學領域。而後當他們開始工作並成爲專家時, 會發現更好的方式來確認正確的問題。其後他們參與選擇問題的過程。我認爲這對他們的未來是更好的投資。但事情並不總是如此發展。有時, 起初給他們的就是正確問題; 但通常並非如此, 它往往只是找到正確問題的一個過程。

興趣及嗜好

R/S: 在 Abel 獎訪談結束前, 我們都會問得獎人：不做數學時喜歡做些什麼? 在數學之外, 你的嗜好跟興趣是什麼?

Wiles: 因時而異。我做費馬問題時, 身兼幼兒的父親, 這種組合很耗時。

我喜歡閱讀, 喜歡不同種類的文學、小說, 及一些傳記, 十分均衡。我沒對其它事物癡迷。當學生時, 我下西洋棋及打橋牌。但當我開始認真做數學時, 對那些東西完全失去興趣。

R/S: 音樂呢? 你喜歡音樂?

Wiles: 我會去聽音樂會, 但沒在彈奏任何樂器。我喜歡聽音樂, 尤其是古典音樂。

R/S: 除了數學, 你對其它的科學有興趣嗎?

Wiles: 或多或少。這些是用來讓自己放鬆, 所以我不希望它們太接近數學。諸如動物的行爲、天文物理, 或源自定性 (qualitative) 觀點的事物, 是我喜歡了解的。同樣的, 我也想了解機器的功能, 並涉獵其它一些通俗科學。但是我不會花時間去了解弦理論的細節。我太專注, 不願意那樣做; 不是說我不會感興趣, 但這是我的抉擇。

R/S: 對此次精彩的訪談, 謹代表我們兩人暨挪威、丹麥、歐洲數學學會致謝。

Wiles: 也謝謝你們。

—譯者姜義浩爲數學傳播特約翻譯—