數學傳播 42卷2期, pp. 25-33

愛因斯坦的曲率公式和光經過太陽的偏折角度

張海潮

一、1911年愛因斯坦首次計算光經過太陽的偏折角度

愛因斯坦在 1907 年[1]和 1911 年[2] 分別發表了兩篇重要的論文, 對廣義相對論進行了初步的探索。在論文中, 愛氏指出：因爲重力場不是慣性系統, 因此光速會受到重力場的影響。這個看法推廣了 1905 年 6 月論文[3] 中所說, 光速在慣性系中是恆定的, 與光源的速度無關。後來就以重力是否納入作爲狹義和廣義相對論的區分。

在 1907 和 1911 的論文, 愛氏均論證在重力位能是 ϕ 的情形下, 光速是

$$c\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right); \tag{1.1}$$

式中的 c 指慣性系中的光速, 等於 299,792,458 公尺/秒, ϕ 是重力位能。以太陽爲例, 若是忽略其他星球, $\phi(r)=-\frac{GM}{r}$, 其中 G 是萬有引力常數, M 是太陽的質量, r 是與太陽 (中心) 的距離。當 r 以 ∞ 代入, $\phi=0$, 光速就是慣性系中的光速[4] c。

在 1911 論文中, 愛氏對光經過太陽的偏折現象推論如下：考慮光在一個平面上行進, 在此平面的法線方向, 重力位能 ϕ 與光速皆爲常數。

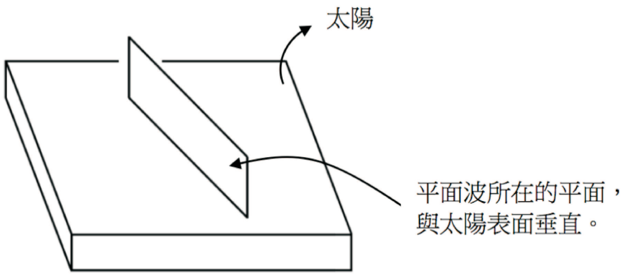
---

[1] 德文本發表於《放射學和電子學年鑑》(Jahrbuch fur Radioakt und Elektronik, 1907), 英譯：Einstein's comprehensive 1907 essay on relativity (part III) H. M. Schwartz American Journal of Physics. Vol.45, No.10, October 1977. 中譯：紀念愛因斯坦文集第二卷：學術論文, 150-209, 台灣凡異出版社《關於相對性原理和由此得出的結論》

[2] 德文本發表於《物理年鑑》(Annalen der Physik, 1911), 英譯：On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light. The Principle of Relativity, 99-108, A collection of Original memoirs on the Special and General Theory of Relativity, Dover Books, 1920. 中譯：《關於引力對光傳播路徑的影響》, 同註1, 台灣凡異出版社, 212-223.

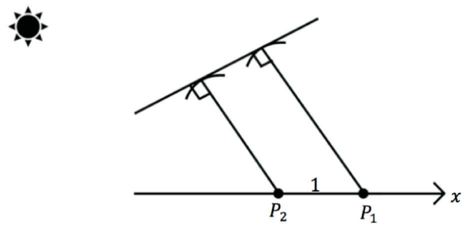
[3] 德文本《論動體的電動力學》發表於德國《物理年鑑》(Annalen der Physik, 1905), 英譯：On the Electrodynamics of Moving Bodies, 同註2, The principle of Relativity, 37-65, 中譯：《論動體的電動力學》, 同註1, 台灣凡異出版社, 83-115.

[4] 現在已經通用記號 c 來代表慣性系統在真空中量得的光速, 此處, 當 $r=\infty$ 時, 代表光速不受重力影響, 因此光速是 c, 其值爲 299,792,458 公尺/秒。(1.1) 式中的光速公式首見於 1907 的論文, 並在 1911 論文中以此計算光經過太陽時偏折的角度。本文第一節重現了 1911 年的計算。然後在 1916 年愛因斯坦修正了 (1.1) 式, 重新做了計算, 請見本文第三節。



圖一

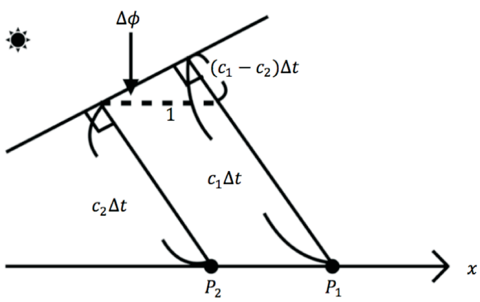
如圖一, 若太陽表面是一平台, 不妨設平面波所在的平面與太陽表面垂直, 平面上的光線行進時, 始終維持在同一個平面。



圖二

如圖二, 若 x 軸是平面波的波前線, 假設 P_1, P_2 接近, 例如距離 1 公尺, 則因 P_2 比 P_1 更接近太陽, 在 P_2 的光速 c_2 小於在 P_1 的光速 c_1。在 Δt 的時間, 分別以 P_2, P_1 為圓心, $c_2\Delta t, c_1\Delta t$ 為半徑畫圓, 在 P_1, P_2 靠近的情形, 假設 c_2 到 c_1 的變化是線性的, 則此兩圓的公切線, 就是新的波前線。

圖三說明新的波前線與舊的波前線的夾角 $\Delta\phi$ 及 $c_2\Delta t, c_1\Delta t$ 的關係。



圖三

因爲 $\overline{P_1P_2} = 1$, 所以

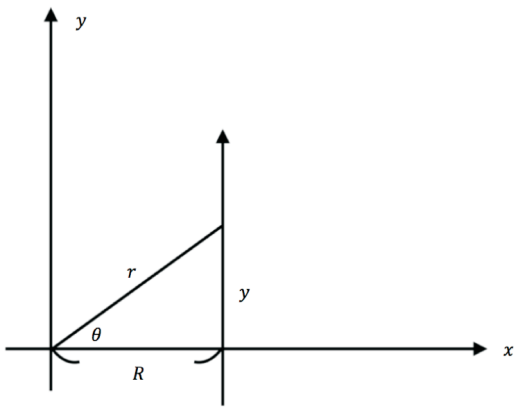
$$\Delta\phi \approx \sin(\Delta\phi) = \frac{(c_1 - c_2)\Delta t}{\overline{P_1P_2}} \approx \frac{\partial c_2}{\partial x}\Delta t, \tag{1.2}$$

注意到 $\Delta\phi$ 也是波行進的方向改變的角度, 此一角度必須除以弧長 $\Delta s = c_2\Delta t$ 才是曲率, 所以波前在 P_2 位置的曲率 κ 是

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{1}{c_2}\frac{\partial c_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\ln c_2). \tag{1.3}$$

此即愛因斯坦曲率公式, 式中 (由 (1.1) 式知)$c_2 = c\left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)$, r 是 P_2 到太陽 (中心) 的距離, x 軸是波前線。

我們將在第二節說明愛因斯坦計算的曲率和一般的平面曲線的曲率公式是一樣的。下面將以曲率對弧長的積分來計算光偏折的角度。



圖四

如圖四, 太陽在 $(0, 0)$, 光經過太陽偏折很小, 計算時不妨假設波前線永遠與 x 軸平行, 圖中光的路徑貼近直線 $x = R$, R 是太陽的半徑。

因爲 $c_2 = c\left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)$, 則 $\ln c_2 = \ln c + \ln\left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)$, 故曲率

$$\begin{aligned} \kappa = \frac{\partial}{\partial x}\ln c_2 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln c + \ln\left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)\right) = \frac{1}{1 - \frac{GM}{rc^2}}\frac{GM}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{r}\right) \\ &\approx \frac{GM}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{r}\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

又因爲 $x^2 + y^2 = r^2$ 對 x 偏微分有

$$2x = 2r\frac{\partial r}{\partial x}, \tag{1.5}$$

即

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}. \tag{1.6}$$

將 (1.6) 式代入 (1.4) 式可得

$$\kappa \approx \frac{GM}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{GM}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}\bigg|_{x=R} = \frac{GM}{c^2}\frac{R}{r^3}. \tag{1.7}$$

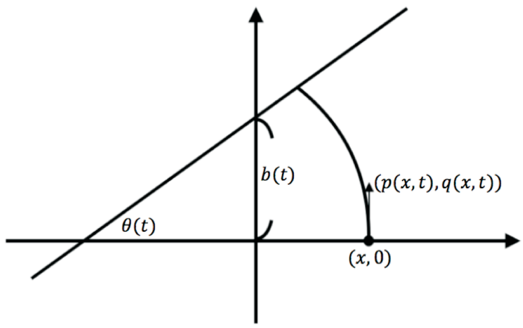
又因偏折很小, 計算時不妨設弧長 $ds = dy$, $y = R\tan\theta$, $dy = R\sec^2\theta d\theta$, $r = \dfrac{R}{\cos\theta}$, 則偏折角爲 $\int_{-\infty}^{\infty}\kappa ds = \int_{-\infty}^{\infty}\kappa dy$, 其中 $\kappa = \dfrac{GM}{c^2}\dfrac{R}{r^3} = \dfrac{GM}{c^2}\dfrac{\cos^3\theta}{R^2}$ 故

$$\int_{-\infty}^{\infty}\kappa dy = \frac{GM}{Rc^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sec^2\theta d\theta = \frac{GM}{Rc^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = \frac{GM}{Rc^2}\cdot 2, \tag{1.8}$$

將 G, M, R, c 的值代入, 得偏折角是 0.83 弧秒。[5]

以上是愛因斯坦在 1911 年論文的計算, 到了 1916 年, 他以完整的廣義相對論再計算了一次, 答案 $\dfrac{4GM}{Rc^2} \approx 1.7$ 弧秒, 是 1911 年計算的兩倍, 我們將在第三節重現 1916 年的計算[6]。

二、檢討愛因斯坦的曲率公式



圖五

如圖五, 時間 $t = 0$ 時的波前線是 x 軸, 從 $(x,0)$ 出發的路徑是 $(p(x,t),q(x,t))$, $p(x,0) = x$, $q(x,0) = 0$, 並且 $\dot{p}(x,0) = 0$。(此處 $\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t}$, $\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t}$)。

現計算曲率。假設時間 t 的波前線是 $y = m(t)x + b(t)$, 且 $(\dot{p}(x,t),\dot{q}(x,t))$ 與波前線

[5]試算

$$\frac{2GM}{Rc^2} = \frac{2\times(6.67\times10^{-11}\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)\times(2\times10^{30}\text{kg})}{(0.7\times10^9\text{m})\times(3\times10^8\text{m/s})^2} \approx 4\times10^{-6} \text{ 弧度 (無單位)},$$

其中 4×10^{-6} 弧度 $= 4\times10^{-6}\times\frac{180}{\pi}\times3600 \approx 0.83$ 弧秒。這個數值出現在愛因斯坦 1911 年論文的最後一段, 愛氏的符號是 $\frac{2kM}{c^2\Delta}$, 其中 $k = G$, $\Delta = R$。另外注意到, $c_2 = c\left(1-\frac{GM}{rc^2}\right)$ 中的 $\frac{GM}{rc^2} \le \frac{GM}{Rc^2} \approx 2\times10^{-6}$, 也就是 c_2 與 c 的差異最多差 $3\times10^8\times2\times10^{-6} \approx 600\text{m/s}$。

[6]1916 年愛氏在德國物理年鑑 Annalen der Physik 發表《廣義相對論的基礎》。英譯: The foundation of the General Theory of Relativity, 同註二 The Principle of Relativity, 109-163。中譯: 同註一, 台灣凡異出版社 278-334。

$y=m(t)x+b(t)$ 垂直, 則 $m(t)=\tan\theta(t)$, 兩邊對 t 微分得

$$m'(t)=\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}. \tag{2.1}$$

注意到, 平面曲線曲率 κ 的定義是 $\frac{d\theta}{ds}$, 其中 ds 代表弧長, 因爲 $\frac{ds}{dt}$ 代表瞬時速率, 所以有 ds 和 dt 的關係式 $ds=\sqrt{\dot{p}^2+\dot{q}^2}dt$, 故將 (2.1) 式左右同除瞬時速率 $\sqrt{\dot{p}^2+\dot{q}^2}$ 得

$$\frac{m'(t)}{\sqrt{\dot{p}^2+\dot{q}^2}}=\sec^2\theta\frac{d\theta}{\sqrt{\dot{p}^2+\dot{q}^2}dt}=\sec^2\theta\frac{d\theta}{ds}=\sec^2\theta\kappa(t). \tag{2.2}$$

現令 $t=0$, 觀察到因爲 $\dot{p}(x,0)=0$, 且 $\sec^2\theta(0)=\sec^2 0=1$, 則曲率

$$\kappa(0)=\frac{m'(0)}{\dot{q}(x,0)}. \tag{2.3}$$

但

$$q(x,t)=m(t)p(x,t)+b(t), \tag{2.4}$$

將 (2.4) 式對 x 偏微分有

$$q_x=mp_x. \tag{2.5}$$

再對 t 偏微分得

$$q_{xt}=m'p_x+mp_{xt}. \tag{2.6}$$

且 $m(0)=0$, $p(x,0)=x$, $p_x(x,0)=1$, 所以當 $t=0$ 時

$$m'(0)=\frac{q_{xt}(x,0)}{p_x(x,0)}=q_{xt}(x,0). \tag{2.7}$$

因此在 $t=0$ 時, 曲率

$$\kappa(0)=\frac{q_{xt}(x,0)}{\dot{q}(x,0)}. \tag{2.8}$$

回到 (1.4) 式愛因斯坦公式

$$\frac{\partial\ln\sqrt{\dot{p}^2+\dot{q}^2}}{\partial x}=\frac{\dot{p}p_{tx}+\dot{q}q_{tx}}{\dot{p}^2+\dot{q}^2}. \tag{2.9}$$

當 $t=0$ 時, $\dot{p}=0$, 上式等於 (2.8)

$$\frac{\dot{q}q_{tx}}{\dot{q}^2}=\frac{q_{tx}(x,0)}{\dot{q}(x,0)}=\kappa(0). \tag{2.10}$$

愛氏的計算與平面曲線曲率的計算相同。

三、愛因斯坦在 1916 年再次計算光經過太陽的偏折角度

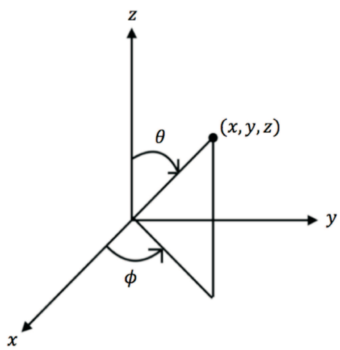
在 1916 年的論文 (同註6) 愛因斯坦改進了 1907 年與 1911 年的計算方法, 引入微分幾何和 (愛因斯坦) 場方程式。在假設空間中只有一個太陽位於原點的情形, 他得到度規張量 (metric tensor) 的解 $c^2d\tau^2$ 如下 (現在通稱 Schwarzschild 解)

$$c^2d\tau^2=c^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)dt^2-\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2; \qquad (3.1)$$

式中 G 是萬有引力常數, M 是太陽質量, c 是慣性系統下真空中的光速, r,θ,ϕ 是球座標, 與直角座標的關聯是:

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi\ , \\ z=r\cos\theta \end{cases} \qquad (3.2)$$

其中 $\frac{\pi}{2}-\theta$ 是北緯的緯度, 且滿足 $dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2=dx^2+dy^2+dz^2$, 如圖:



圖六

Schwarzschild 解 (3.1) 式中用 r,θ,ϕ 座標是尊重解對原點的球形對稱[7]。在 1916 論文

[7]關於 (3.1) 式的解, 現在通稱 Schwarzschild solution, 它是一個滿足愛因斯坦場方程式的度規張量, 並且要求:
(1) 度規張量與時間無關。
(2) 度規張量球形對稱於原點 $(0,0,0)$。
(3) 在原點之外, 無質量分佈, 即滿足 $R_{ij}=0$, R_{ij}是此度規張量的 Ricci 張量。
(4) 當原點的質量趨近於0時, 此一度規張量趨近

$$c^2dt^2-dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$

請參考 Foster 和 Nightingale 寫的教科書《A Short Course in General Relativity》第二版 3.7 The Schwarzschild Solution.
我們應注意, 第一、當 M 代表太陽質量而 r 大於太陽半徑時, $\frac{2GM}{rc^2}\le 4\times10^{-6}$ (見註五), 第二、當 $M=0$ 時, $c^2dt^2-dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2$ 稱為 Minkowski flat metric, 它首次出現在 1908 年 9 月 21 日, Minkowski 在德國科隆 (Cologne) 的演講, 講題為《Space and Time》, 見 The Principle of Relativity p.p 73-91. (同註二), 文中度規張量 $c^2d\tau^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$ 出現在該篇講稿的 p85., 第三、愛因斯坦在 1916 年論文的前言中提到:「下面所要論述的理論, 是對今天一般稱之為『相對論』的理論所做的可能想像得到的最為廣泛的推廣; 為便於區別起見, 以後我把上述『相對論』稱為『狹義相對論』, 並且假定它已為大家所熟悉。用了 Minkowski 所給予狹義相對論的形式, 相對論的這種推廣就變得很容易; 這位數學家首先清楚地認識到空間座標和時間座標形式上的等價性, 並把它應用在建立這一理論方面。」見台灣凡異出版社 p.278 (同註一)。

中, 愛因斯坦所用的符號是

$$\begin{cases} x_4 = ct \\ x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases},$$

並且用 a 代表 $\frac{2GM}{c^2}$, 我們在本文中, 維持 ct, x, y, z 的記號。因此 (3.1) 式 Schwarzschild solution 是[8]：

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 \\ &\approx c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)dt^2 - \left(1+\frac{a}{r}\right)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 \\ &= c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)dt^2 - \frac{a}{r}dr^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 \\ &= c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)dt^2 - \frac{a}{r}dr^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

由於

$$d(r^2) = 2rdr = d(x^2+y^2+z^2) = 2xdx + 2ydy + 2zdz, \tag{3.4}$$

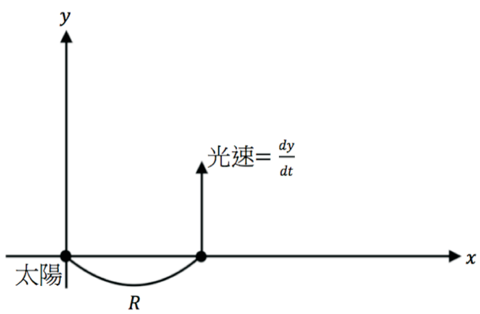
所以

$$dr = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z}{r}dz. \tag{3.5}$$

因此

$$c^2 d\tau^2 = c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)dt^2 - \frac{a}{r}\left(\frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z}{r}dz\right)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{3.6}$$

根據廣義相對論對 $c^2d\tau^2$ 的詮釋, 光的路徑會落在 $c^2d\tau^2 = 0$ 中[9]。現在進一步假設平面波在 $x-y$ 平面進行, 如圖



圖七

[8]根據註五, 當 r 大於太陽半徑時, $\frac{a}{r} = \frac{2GM}{rc^2} < 4\times 10^{-6}$, 因此 (3.1) 式的 Schwarzschild metric 與 flat metric 相當接近。

[9]在 Minkowski flat metric 的情形, $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0$ 表示 $(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2 = c^2$, 亦即光的路徑滿足 $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0$。在一般的情況, 光的路徑亦必須滿足 $c^2d\tau^2 = 0$, 請參考 Foster 和 Nightingale 寫的教科書 A Short Course in General Relativity 第二版 p.88 的解釋。

因此, 光路徑滿足：$z=0, x=R$ 即 $dx=0$, 代入上式得

$$c^2d\tau^2=\left(1-\frac{a}{r}\right)c^2dt^2-\frac{a}{r}\left(\frac{y}{r}dy\right)^2-dy^2. \tag{3.7}$$

此時 $c^2d\tau^2=0$ 代表光行路徑, 所以光行滿足

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)c^2dt^2=\left(\frac{a}{r^3}y^2+1\right)dy^2, \tag{3.8}$$

或

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(1+\frac{a}{r^3}y^2\right)^{-1}\\&\approx c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(1-\frac{a}{r^3}y^2\right)\\&\approx c^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}-\frac{2GM}{r^3c^2}y^2\right).\end{aligned} \tag{3.9}$$

故

$$\frac{dy}{dt}\approx c\left(1-\frac{2GM}{rc^2}-\frac{2GM}{r^3c^2}y^2\right)^{\frac{1}{2}}\approx c\left(1-\frac{GM}{rc^2}-\frac{GM}{r^3c^2}y^2\right). \tag{3.10}$$

式 (3.10) 中, $c_2\approx\frac{dy}{dt}$ 就是在太陽重力場下 (地球觀察到) 的光速。而愛因斯坦曲率公式：

$$\begin{aligned}\kappa=\frac{\partial\ln c_2}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(1-\frac{GM}{rc^2}-\frac{GMy^2}{r^3c^2}\right)\right)\\&=\left(1-\frac{GM}{rc^2}-\frac{GMy^2}{r^3c^2}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(1-\frac{GM}{rc^2}-\frac{GMy^2}{r^3c^2}\right)\\&\approx-\frac{GM}{c^2}\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x}-\frac{GMy^2}{c^2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r^3}\right)}{\partial x}\\&=-\frac{GM}{c^2}\left(\frac{-1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}\right)-\frac{GMy^2}{c^2}\left(\frac{-3}{r^4}\cdot\frac{x}{r}\right)\\&=\frac{GMx}{r^3c^2}+\frac{3GMy^2x}{r^5c^2}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

當 $x=R=$太陽半徑, 曲率

$$\kappa=\frac{\partial\ln c_2}{\partial x}\approx\frac{GMR}{r^3c^2}+\frac{3GMRy^2}{r^5c^2}. \tag{3.12}$$

現將 κ 對 ds 積分, 不妨以 dy 代替 ds, 如圖四。則積分之第一部分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{GMR}{r^3c^2}dy, \tag{3.13}$$

與圖四之積分相同, 答案是 $\frac{2GM}{Rc^2}$。

而積分之第二部分為

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3GMRy^2}{r^5c^2}dy. \tag{3.14}$$

注意到, 此處 r 與 y 有關, 故不可直接積分, 令 $y = R\tan\theta$, 則有 $dy = R\sec^2\theta d\theta$, 且 $\cos\theta = \frac{R}{r}$, 故

$$\frac{y^2}{r^5}dy = \frac{R^2\tan^2\theta \cdot R\sec^2\theta d\theta}{\frac{R^5}{\cos^5\theta}} = \frac{1}{R^2}\sin^2\theta\cos\theta d\theta. \tag{3.15}$$

則積分之第二部分為

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3GMRy^2}{r^5c^2}dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3GMR}{c^2}\cdot\frac{1}{R^2}\sin^2\theta\cos\theta d\theta \\ &= \frac{3GMR}{c^2}\cdot\frac{1}{R^2}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\left(\sin\theta\right) \\ &= \frac{3GM}{Rc^2}\cdot\left(\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Bigg|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2GM}{Rc^2}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\kappa ds \approx \frac{2GM}{Rc^2} + \frac{2GM}{Rc^2} = \frac{4GM}{Rc^2} \approx 1.7 \text{ 弧秒。} \tag{3.17}$$

—本文作者為台大數學系退休教授—