數學傳播 42卷1期, pp. 89-94

認識問題本質 追求自然解法

— 一道「希望杯」全國初中數學邀請賽試題的八種解法

張 寧

試題: 如圖 1, 在梯形 $ABED$ 中, $\angle D=\angle E=90^\circ$, $\triangle ABC$ 是等邊三角形, 且點 C 在 DE 上, 如果 $AD=7$, $BE=11$, 求 $\triangle ABC$的面積。(第24屆"希望杯"全國初中數學邀請賽初二第 2 試)

分析: 本題涉及的基本圖形是直角梯形、直角三角形和等邊三角形。欲求 $\triangle ABC$ 的面積, 只需求出等邊三角形 $\triangle ABC$ 的邊長, 或求出等邊三角形 $\triangle ABC$ 的邊長的平方, 或求出圖形中直角三角形的斜邊的長。

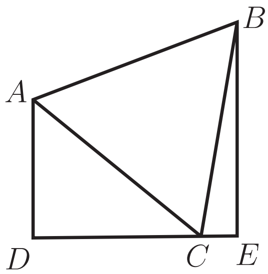

圖1

求解這類問題的最基本的方法是利用直角三角形求解。

思路1: 直接在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中利用畢氏定理列方程或方程組求解, 即可得到命題組提供的求解方法。

解法1: 如圖 2, 過點 A 作 $AF\perp BE$, 垂足爲 F。設 $CD=x$, $CE=y$。因爲 $\triangle ABC$ 是等邊三角形, 則

$$7^2+x^2=11^2+y^2. \tag{1}$$

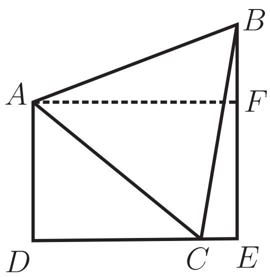

圖2

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中, 由畢氏定理知,

$$7^2+x^2=4^2+(x+y)^2. \tag{2}$$

令 $x=ky$, 代入 (1), (2) 得, $k=5$, 即 $x=5y$, 所以 $y^2=3$。所以 $BC^2=11^2+3=124$。由等邊三角形的面積公式知,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 124=31\sqrt{3}.$$

點評: 這種解法利用畢氏定理列方程組求解, 解法自然, 通俗易懂。這種解法的難點是所列方程組是二元二次方程組, 對初中學生具有非常大的挑戰性, 大部分學生難以正確求解。這裏令 $x=ky$, 極大地簡化了二元二次方程的求解過程, 也是正確求解本題的關鍵。

解法2: 如圖2, 過點 A 作 $AF\perp BE$, 垂足爲 F。

設等邊 $\triangle ABC$ 的邊長爲 a, 由畢氏定理, 得

$$AF=\sqrt{a^2-16},\quad CD=\sqrt{a^2-49},\quad CE=\sqrt{a^2-121}.$$

因爲 $AF=CD+CE$, 所以 $\sqrt{a^2-16}=\sqrt{a^2-49}+\sqrt{a^2-121}$。

兩邊平方, 整理得 $154-a^2=2\sqrt{(a^2-49)(a^2-121)}$。

方程兩邊再次平方, 整理得 $a^2(a^2-124)=0$。

因爲 $a>0$, 所以 $a^2=124$。由等邊三角形的面積公式知,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 124=31\sqrt{3}.$$

點評: 這種解法也是利用畢氏定理列方程組求解, 解法自然, 通俗易懂。這種解法的難點是所列方程組是無理方程, 已經超越了初中學生的能力, 初中學生難以正確求解。正確化簡無理方程是這種求解過程遇到的最大障礙, 也是正確求解本題的關鍵。

思路2: 通過圖形的旋轉變換, 將已知線段 AD 和 BE 轉化到同一個直角三角形中, 然後利用畢氏定理或直角三角形中的邊角關係求解; 或通過構造相似三角形, 建立已知線段 AD 和 BE 與所求線段之間的關係, 從而通過列方程求解。

基於以上考慮, 本題在如下較爲自然的解法。

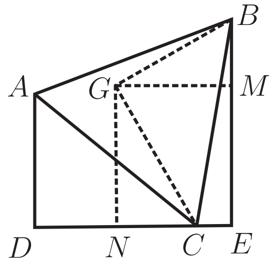

圖3

解法3: 如圖 3, 將 $\triangle ADC$ 繞點 C 沿順時針方向旋轉 60°, 得到 $\triangle BGC$, 點 D 的對應點爲 G。過點 G 作 $GM\perp BE$, $GN\perp DE$, 垂足分別爲 M、N。

由旋轉的性質易知 $GB=AD=7$, $\angle BGC=\angle ADC=90^\circ$, $\angle DCG=60^\circ$, 所以 $\angle CGN=30^\circ$, $\angle BGM=30^\circ$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle BGM$ 中, $BM = BG\sin 30^\circ = 7\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, 所以

$$GN = ME = BE - BM = 11-\frac{7}{2}=\frac{15}{2}.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle CGN$ 中,

$$GC=\frac{GN}{\cos 30^\circ}=\frac{15}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle BGC$ 中, $BC^2 = GB^2+GC^2 = 7^2+(5\sqrt{3})^2 = 124$。

由等邊三角形的面積公式知

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 124 = 31\sqrt{3}.$$

點評: 這種解法借助於圖形的旋轉變換, 構造得到 $\mathrm{Rt}\triangle BGM$、$\mathrm{Rt}\triangle CGN$ 及 $\mathrm{Rt}\triangle BGC$, 然後利用畢氏定理, 得到了等邊 $\triangle ABC$ 的邊長的平方, 從而求出等邊 $\triangle ABC$ 的面積。這種解法避免了求解二元二次方程組或無理方程, 通俗易懂, 平實自然, 是一種比較完美的解法。

解法 4: 如圖 4, 將 $\triangle ADC$ 繞點 C 沿順時針方向旋轉 60°, 得到 $\triangle BGC$, 點 D 的對應點爲 G。延長 GC, 交 BE 的延長線於點 F。

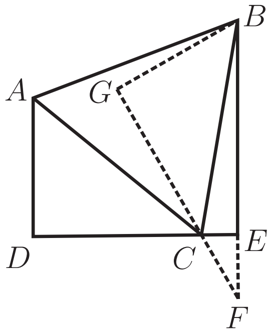

圖 4

由旋轉的性質易知 $GB = AD = 7$, $\angle BGC = \angle ADC = 90^\circ$,

$\angle GBE = 60^\circ$, 所以 $\angle GCE = 120^\circ$,

所以 $\angle GBF = 60^\circ$, $\angle F = 30^\circ$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle BGF$ 中, $BF = 2BG = 2\times 7 = 14$,

所以 $EF = BF - BE = 14 - 11 = 3$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle CEF$ 中, $CE = EF\tan 30^\circ = 3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中, $BC^2 = BE^2 + CE^2 = 11^2+(\sqrt{3})^2 = 124$。

由等邊三角形的面積公式知

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 124 = 31\sqrt{3}.$$

點評: 這種解法借助於圖形的旋轉變換, 得到四邊形 $BECG$。在四邊形 $BECG$ 中, $\angle G = \angle BEC = 90^\circ$, $\angle GBE = 60^\circ$, $GB = 7$, $BE = 11$, 根據四邊形的這些特徵, 易想到通過延

長 GC 與 BE 構造直角三角形, 然後根據直角三角形的邊角關係及畢氏定理求解。這種解法通俗易懂, 平實自然, 是一種非常完美的解法, 可以視爲求解這類問題的通法。

基於解法 4, 也可將 $\triangle BCE$ 繞點 E 沿逆時針方向旋轉 $60°$。因此, 有如下解法 5。

解法5: 如圖 5, 將 $\triangle BCE$ 繞點 C 沿逆時針方向旋轉 $60°$, 得到 $\triangle ACG$, 點 E 的對應點爲 G。延長 AG, 交 DE 的延長線於點 F。

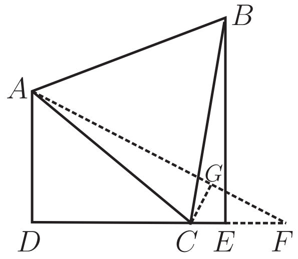

圖5

由旋轉的性質易知 $AG=BE=11$, $\angle AGC=\angle BEC=90°$, $\angle GCE=60°$, 所以 $\angle F=30°$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中, $AF=2AD=2\times 7=14$,

所以 $GF=AF-AG=14-11=3$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle CFG$ 中, $CG=GF\cdot\tan 30°=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACG$ 中, $AC^2=AG^2+CG^2=11^2+(\sqrt{3})^2=124$。

由等邊三角形的面積公式知

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 124=31\sqrt{3}.$$

解法6: 如圖 6, BA, ED 的延長線相交於點 G, 過點 C 作 $CF\perp AB$, 垂足爲 F。

由 $\triangle ADG\sim\triangle BEG$ 可知, $\dfrac{AG}{BG}=\dfrac{AD}{BE}=\dfrac{7}{11}$。

令 $AG=7a$, 則 $BG=11a$,

所以 $AB=11a-7a=4a$。

因爲 $\triangle ABC$ 是等邊三角形,

所以 $CF=\sqrt{(4a)^2-(2a)^2}=2\sqrt{3}a$。

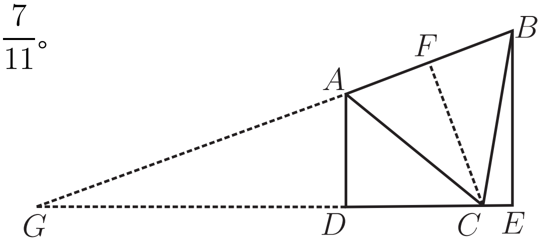

圖6

由 $\triangle ADG\sim\triangle CFG$, 得 $\dfrac{CF}{AD}=\dfrac{GF}{GD}$, 即 $\dfrac{2\sqrt{3}a}{7}=\dfrac{7a+2a}{GD}$, 解得 $GD=\dfrac{21\sqrt{3}}{2}$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle CFG$ 中, 由畢氏定理知 $AG^2=AD^2+GD^2$,

即 $(7a)^2=7^2+\left(\dfrac{21\sqrt{3}}{2}\right)^2$, 所以 $a^2=\dfrac{31}{4}$。所以 $AC^2=16a^2=124$。

由等邊三角形的面積公式知 。

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 124=31\sqrt{3}.$$

點評: 根據已知四邊形 $ABED$ 的特徵, 易想到通過延長 BA 與 ED 構造直角三角形, 爲了構架等邊 $\triangle ABC$ 與已構造的直角三角形之間的聯繫, 易想到過點 C 作 $\triangle ABC$ 的高。這種解法通過構造直角三角形, 利用相似三角形的性質、畢氏定理、等邊三角形的性質等知識求解, 通俗易懂, 解法自然, 對初中生而言, 不失爲一種好方法。

思路3: 從教師的角度出發, 利用三角函數求解。

解法7: 如圖 7, 過點 B 作 DE 的平行線, 交 DA 的延長線於點 F, 則 $\triangle ABF$ 是直角三角形。

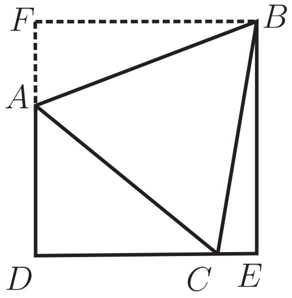

圖7

設等邊 $\triangle ABC$ 的邊長爲 a, 則 $AF=4$, $CD=\sqrt{a^2-49}$。

在 Rt$\triangle ADC$ 中, $\cos\angle DAC=\dfrac{7}{a}$, $\sin\angle DAC=\dfrac{\sqrt{a^2-49}}{a}$。

在 Rt$\triangle ABF$ 中, $\cos\angle BAF=\dfrac{4}{a}$,

$\angle BAF=180^\circ-\angle DAC-60^\circ=120^\circ-\angle DAC$。

所以 $\cos\angle BAF=\cos(120^\circ-\angle DAC)=\cos 120^\circ\cos\angle DAC+\sin 120^\circ\sin\angle DAC$,

所以 $\dfrac{4}{a}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{a}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-49}}{a}$, 解得 $a^2=124$。

由等邊三角形的面積公式知

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 124=31\sqrt{3}.$$

解法8: 設等邊 $\triangle ABC$ 的邊長爲 a。設 $\angle BCE=\alpha$, 則 $\angle ACD=120^\circ-\alpha$。

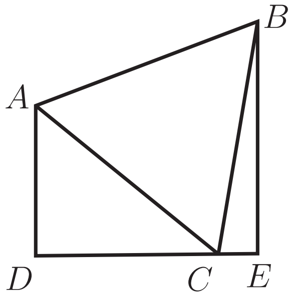

圖8

在 Rt$\triangle BCE$ 中, $\sin\alpha=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{11}{a}$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{a^2-11^2}}{a}$。

在 Rt$\triangle ADC$ 中, $\sin(120^\circ-\alpha)=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{7}{a}$。

因爲 $\sin(120^\circ-\alpha)=\sin 120^\circ\cos\alpha-\cos 120^\circ\sin\alpha$,

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-11^2}}{a}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{11}{a}=\dfrac{7}{a}$, 解得 $a^2=124$。

由等邊三角形的面積公式知

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 124=31\sqrt{3}.$$

點評: 以上兩種解法利用直角三角形的邊角關係及兩角差的三角函數公式較爲簡潔的求得了等邊 $\triangle ABC$ 的邊長。這兩種解法不需要添加複雜的輔助線, 對教師或高中學生而言, 是比較實用的求解方法。

致謝: 解法 8 是編輯部老師提出的解法, 在此表示誠摯的謝意!

參考文獻

1. 張寧。追尋本質解法 變式演繹精彩 — 一道競賽題的解法及變式探究[J]。中學數學 (下), 2015 (4), 88-91。
2. 張寧。對一道與正方形有關的競賽試題的變式探究[J]。中學數學 (下), 2016 (7), 74-76。
3. 張寧。一道全國初中數學競賽試題的有關結論及變式探究[J]。數理化學習 (初中版), 2016 (10), 3-5。
4. G· 波利亞著, 塗泓譯。怎樣解題 [M]。上海: 上海教育出版社, 2011。

—本文作者任教中國寧夏回族自治區中衛市沙坡頭區宣和鎮張洪學校—

2017 全國技專院校「文以載數創作獎」作品選集

零之素顏 文 / 許采憶

一個高高在上的存在,
既不屬於正數也不屬於負數。

看起來渺小 卻是所有數的倍數,
即使將祂放入絕對值 也無法影響祂的本質,
任何數乘以祂 都將被其同化,
任何數除以祂 都將失去意義。

祂的存在 備受爭議,
看似不合群 卻又能與任何數字完美相容,
人們時常爲了祂的分類爭吵不休,
而祂只是在高處冷冷的觀望不願展現自我。

或許人從來沒想過,
祂就是祂 自成一類。

—本文作者就讀中國科技大學觀光與休閒事業管理系—

2017 全國技專院校「文以載數創作獎」作品選集

希帕索斯之死（無理數）

文／方千豪

無窮的無盡。
無盡的無理。
隱藏在小數點後的奧秘，
騷動著畢達哥拉斯光環下的陰影。

賢者的妒意。
逸失的人性。
讓本應顛覆世界的至理，
殘酷的抹上了窮凶惡極的獸性。

出狎的猛獸。
咆哮著篡逆。
使萬物皆數的磐石之軀，
猶如溺斃的屍首般被啃噬殆盡。

勾股之父啊，
伏首悔懺吧！
未知的猛獸帶來的生機，
竟被恐懼的獄吏封進歷史的囹圄！

—本文作者就讀南臺科技大學應用日語系—

2017 全國技專院校「文以載數創作獎」作品選集

你・三角・潘洛斯　　文／顏志憲

那年夏天過後, 小六的我剛當上班長, 對甚麼都很感興趣, 喜歡纏著你說新鮮有趣的故事, 也喜歡信手拿起畫筆畫點甚麼, 尤其是彩筆「蓋房子」, 就這樣我們通過一張厚實的無限循環建築圖, 認識潘洛斯三角。

你帶上我參加你工作單位的「2007 建築系畢業展」, 你說, 展覽在表現「就業或求學過程裡, 每個人都希望得到自己所愛的和所期待的」,「難忘或不願割捨, 珍愛的一切」, 你站在自己的專業, 試著解釋表象和眞相的關係的主題, 以及建築空間所顯露的人生主題。

我嫌你說得抽象,「講文言文喔, 聽不懂啦∼」你笑我頭腦簡單,「在這個仲夏的夜裡, 任何事情都將可能發生啦。」然後噤聲長嘆, 我鬧也鬧不動你 $\cdots$, 兩人就這麼沉默著返家。

過了幾天, 你遇見我, 揚了揚手,「發現個有趣的」, 說完丢過來版畫明信片, 湊近著介紹 :「是由一個複變函數達到的」一面說一面比劃「圖案整體看來正常, 但一二樓的方向不一樣喔, 看這裡, 這裡」才剛說完就挑了挑眉, 用眼神問我「有趣吧」, 好像早就料到我這小腦袋一定感興趣。

「眞的ㄝ, 一樓是東西向, 二樓是南北向」我不懂甚麼函數, 但建築物竟同時呈現在一個平面上, 這個不可思議的建築果然神奇引人, 我細細比對, 大叫「怎麼可能?」好奇地反覆觀察。

「現實生活中不會有喔」, 你嚴肅地提醒整張圖像整體看起來好像成立的變形效果, 急著解釋需要拆解眞知的原理, 接著又逗人開心地讓圖像的一角看起來正在前面, 另一角看起來像在後面。

那年夏天我們的時空記憶, 你虛幻的時空, 我成長中的時空, 三種空間, 形成你和我的潘洛斯三角, 那看似一個向上的樓梯, 卻又無限循環, 好比身處一個不會醒來的噩夢, 你在這頭, 我在那頭, 我們的回憶飄揚遠蕩。

後來, 我在更多的遊戲中領略這種騙術, 假裝還是由你帶領我繪製的這個僞裝的潘洛斯三角, 好像把對生命的誤解推給這奇幻的矛盾空間, 一切就會順理成章地得到緩解。我也曾愼重地參加改裝神奇三角形的社團, 學習繪製著名的視覺錯視圖 (Visual Illusion), 從積木組裝結構到映射成品, 做了符合實際的修改, 從根本解決視覺上的錯覺, 解決我在客觀因素干擾下或者自身的心理因素支配下, 對三角圖形產生的與客觀事實不相符的錯誤的感覺。

就在我花費心力, 想要化解轉角部分的一切不合理不順眼, 第一張潘洛斯三角重出江湖, 讓我不再緣木外求, 搜尋變體。

撫摸這張在箱底躺了近 10 年, 好不容易重見天日的泛黃明信片, 厚實的質感, 好像你還在身邊。去年開始負笈南下, 隨著火車漸漸駛離火車站, 我的念想也漸漸飄搖, 忘了有多久沒跟你說說話了呢? 3 週還是 1 個月? 有 2 個月了吧, 有點記不清了 $\cdots$。窗景一格一格的往後翻閱, 記憶之門將我的心思一頁一頁地打開。

「你看! 過了山洞後, 就到車埕了呢!」你指著山洞對著我說。「哦! 車埕?」我好奇地問。

「木頭, 你看你看! 有很多木頭。」你遠遠近近地比劃著, 語帶興奮地介紹車埕曾經是木工廠,「做桌子、椅子呢!」你溫柔的解釋著,「你的讀書桌ㄚ, 這裡買的呢。小板凳材料阿, 記得嗎?」

怎麼會不記得? 敲打板凳是你上立體、錐狀物的第一課, 然後才有一張一張的建築圖片, 一頁一頁的「潘洛斯三角」明信片, 一棟一棟建築模型。

需要特定的角度才看得見的魔術三角, 好比人生的轉運站, 雖然看來複雜往復, 卻又平衡還返。而在此處彼處之間的往返如剪, 來回剪開臍帶; 此處彼處之間的往返如箭, 不停射向天的那一邊。

是不是我們分散天涯, 就此各據一方卻彼此接應。是不是生生世世相連信靠, 彼此在彼此生命軌道交錯的瞬間, 交叉轉運之後, 各自帶著行囊離開彼此, 繼續照著自己的軌道, 輕裝轉速, 邁步行走, 越走越遠? 不喜歡分離但接受分離, 就是接受「潘洛斯三角」的「最純粹形式的不可能」, 是逐漸明白了自己獨立於你的情感依賴, 又享受著與你言詞廝纏的言說樂趣的同時, 我擺好自己的專屬角度, 等待生命裡的那個誰, 從特定的角度下觀看我的三維流形。

—本文作者就讀南臺科技大學化學工程與材料工程系—