數學傳播 42卷1期, pp. 85-88

一道美國大學生數學競賽題的加强與證明

唐 爍 · 劉 植* · 常 山

第六十八屆 (2007年) 美國大學生數學競賽的 B-2 題[1, 2] 爲

設 $f:[0,1]\to R$ 有連續導數且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0$, 證明: 對每個 $\alpha\in(0,1)$ 有

$$\left|\int_0^\alpha f(x)dx\right|\le\frac{1}{8}\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|. \tag{1}$$

本文給出不等式 (1) 的一種加強形式, 並給出其幾種不同於 [1] 的證明。

設 $f:[0,1]\to R$ 有連續導數且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0$, 證明: 對每個 $x\in[0,1]$ 有

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right|\le\frac{1}{2}x(1-x)\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|. \tag{2}$$

當 (2) 成立時, 由於

$$x(1-x)\le\left[\frac{1}{2}(x+1-x)\right]^2=\frac{1}{4}$$

故由 (2) 知, 不等式 (1) 成立, 因此不等式 (2) 比不等式 (1) 更強。下面給出 (2) 的證明。

證法1: 令 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ $(0\le x\le 1)$, 則 $F(x)$ 二階可導, 且 $F(0)=F(1)=0$。再令 $G(u)=x(1-x)F(u)-F(x)u(1-u)$ $(0\le u\le 1)$, 則 $G(x)=G(0)=G(1)=0$, 且 $G(u)$ 二階可導。對 $G(u)$ 在 $[0,x]$, $[x,1]$ 上分別利用 Rolle 定理知, 存在 $\xi_1\in(0,x)$, $\xi_2\in(x,1)$, 使得 $G'(\xi_1)=G'(\xi_2)=0$。再對 $G'(u)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上利用 Rolle 定理知, 存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$, 使得 $G''(\xi)=0$。由於

$$G''(u)=x(1-x)F''(u)+2F(x)$$

基金項目: 安徽省重大教學改革項目 (2015zdjy020)、高等學校大學數學教學研究與發展中心項目 (2015)、唐爍名師工作室項目支持。

*通訊作者, Email:Liuzhi314@126.com

從而有

$$x(1-x)f'(\xi)+2\int_0^x f(t)dt=0,$$

由此可知

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right|\le\frac{1}{2}x(1-x)\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|.$$

證法2: 令 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ $(0\le x\le 1)$, 則 $F(x)$ 二階可導, 且 $F(0)=F(1)=0$。再令

$$\varphi(u)=\begin{vmatrix}1&u&u^2&F(u)\\1&0&0&0\\1&1&1&0\\1&x&x^2&F(x)\end{vmatrix}\qquad(0\le u\le 1)$$

則 $\varphi(x)=\varphi(0)=\varphi(1)=0$ 且 $\varphi(u)$ 二階可導, 類似於證法 1, 對 $\varphi(u)$ 兩次運用 Rolle 定理知, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $\varphi''(\xi)=0$。而

$$\varphi''(u)=\begin{vmatrix}0&0&2&F''(u)\\1&0&0&0\\1&1&1&0\\1&x&x^2&F(x)\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&2&F''(u)\\1&1&0\\x&x^2&F(x)\end{vmatrix}=2F(x)+x(1-x)F''(u)$$

從而有

$$2F(x)+x(1-x)f'(\xi)=0$$

由此可知

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right|\le\frac{1}{2}x(1-x)\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|.$$

注: 證法 1 與證法 2 中的輔助函數 $F(u)$ 與 $\varphi(u)$ 本質上是一樣的, 只是表現形式不同。

證法3: 令 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ $(0\le x\le 1)$, 則 $F(x)$ 二階可導, 且 $F(0)=F(1)=0$。再令 $\varphi_1(u)=uF(x)-xF(u)$, $\varphi_2(u)=ux(u-x)$, 則 $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$。對 $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ 在 $[0,1]$ 上利用 Cauchy 中值定理知, 存在 $\xi_1\in(0,1)$, 使得

$$\frac{F(x)}{x(1-x)}=\frac{\varphi_1(1)}{\varphi_2(1)}=\frac{\varphi_1(1)-\varphi_1(0)}{\varphi_2(1)-\varphi_2(0)}=\frac{\varphi_1'(\xi_1)}{\varphi_2(\xi_1)}=\frac{F(x)-xF'(\xi_1)}{x(2\xi_1-x)},\tag{3}$$

再令 $\varphi_3(u)=F(u)-uF'(\xi_1)$, $\varphi_4(u)=u(2\xi_1-u)$ 則, $\varphi_3(0)=\varphi_4(0)=0$。對 $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ 在 $[0,x]$ 上利用 Cauchy 中值定理知, 存在 $\xi_2\in(0,x)$, 使得

$$\frac{F(x)-xF'(\xi_1)}{x(2\xi_1-x)}=\frac{\varphi_3(x)}{\varphi_4(x)}=\frac{\varphi_3(x)-\varphi_3(0)}{\varphi_4(x)-\varphi_4(0)}=\frac{\varphi_3'(\xi_2)}{\varphi_4(\xi_2)}=\frac{F'(x)-F'(\xi_1)}{-2(\xi_2-\xi_1)}, \tag{4}$$

再對 $F'(x)$ 在以 ξ_1,ξ_2 爲端點的閉區間上利用 Lagrange 中值定理知, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$F'(\xi_2)-F'(\xi_1)=F''(\xi)(\xi_2-\xi_1). \tag{5}$$

由 (3)、(4)、(5) 可得

$$\frac{F(x)}{x(1-x)}=-\frac{1}{2}f'(\xi),$$

從而

$$\int_0^x f(t)dt=-\frac{1}{2}x(1-x)f'(\xi)$$

由此知

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right|\le\frac{1}{2}x(1-x)\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|.$$

證法4: 令 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ $(0\le x\le 1)$, 則 $F(x)$ 二階可導, 且 $F(0)=F(1)=0$。

利用 Taylor 公式, 將 $F(0)$, $F(1)$ 分別在點 x 處展開, 可得

$$0=F(0)=F(x)-F'(x)x+\frac{1}{2}F''(\xi_1)x^2 \tag{6}$$

$$0=F(1)=F(x)+F'(x)(1-x)+\frac{1}{2}F''(\xi_1)(1-x)^2 \tag{7}$$

其中 $0<\xi_1<x$, $x<\xi_2<1$。

$(6)\times(1-x)+(7)\times x$, 得

$$F(x)+\frac{1}{2}x(1-x)[xf'(\xi_1)+(1-x)f'(\xi_2)]=0$$

從而

$$\begin{aligned}|F(x)|&=\frac{1}{2}x(1-x)|xf'(\xi_1)+(1-x)f'(\xi_2)|\\&\le\frac{1}{2}x(1-x)[x|f'(\xi_1)|+(1-x)|f'(\xi_2)|]\\&\le\frac{1}{2}x(1-x)\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|\end{aligned}$$

此即

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right|\le\frac{1}{2}x(1-x)\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|.$$

證法5: 記 $M=\max\limits_{0\leq x\leq 1}|f'(x)|$, 此時, $0\leq x\leq 1$ 時, $-M\leq f'(x)\leq M$. 令

$$P(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{2}Mx(1-x)\ (0\leq x\leq 1),$$

則 $P(x)$ 二階可導且有

$$P'(x)=f(x)-M(\frac{1}{2}-x),\quad P''(x)=f'(x)+M\geq 0,$$

從而 $P(x)$ 在 $[0,1]$ 上爲下凸函數。由於 $P(0)=P(1)=0$, 故由凸函數性質知, 當 $0\leq x\leq 1$ 時, $P(x)\leq 0$, 即

$$\int_0^x f(t)dt\leq\frac{1}{2}Mx(1-x).\tag{8}$$

另一方面, 再令

$$Q(x)=\int_0^x f(t)dt+\frac{1}{2}Mx(1-x)\quad (0\leq x\leq 1),$$

則 $Q(x)$ 二階可導且有

$$Q''(x)=f'(x)-M\leq 0$$

從而 $Q(x)$ 在 $[0,1]$ 上爲上凸函數。由於 $Q(0)=Q(1)=0$, 故由凸函數性質知, 當 $0\leq x\leq 1$ 時, $Q(x)\geq 0$, 即

$$\int_0^x f(t)dt\geq -\frac{1}{2}Mx(1-x).\tag{9}$$

由 (8)、(9) 知, 當 $0\leq x\leq 1$ 時, 有

$$-\frac{1}{2}Mx(1-x)\leq\int_0^x f(t)dt\leq\frac{1}{2}Mx(1-x)$$

由此知

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right|\leq\frac{1}{2}x(1-x)\max_{0\leq x\leq 1}|f'(x)|.$$

參考文獻

1. The Sixty-eighth William Lowell Putnam Mathematical Competition, *The Amer. Math. Monthly*, Vol.112, No.8, 2008.
2. 劉培傑數學工作室編譯。美國大學生數學競賽試題集[M]。哈爾濱: 哈爾濱工業大學出版社, 2009.

—本文作者任教中國合肥工業大學數學學院—