

一道面積比公式的另證

連威翔

一、前言

在數學傳播 30 卷 2 期「換個觀點看三角形的四心」一文中 (見[1]), 作者證明了底下的面積比公式:

公式1: 設 H 為銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 則

$$\begin{aligned} \triangle ABH : \triangle BCH : \triangle CAH \\ = (c^4 - a^4 + 2a^2b^2 - b^4) : (a^4 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4) : (b^4 - c^4 + 2c^2a^2 - a^4) \end{aligned}$$

隨後, 作者並利用公式 1 計算了三個例題。

但筆者發現, 作者使用公式 1 計算其中第三個例題時, 解題的過程較長些, 這促使筆者想找出是否有另外的方法來處理該例題。經過一番嘗試之後, 筆者也以另外一個方法得到相同的解。

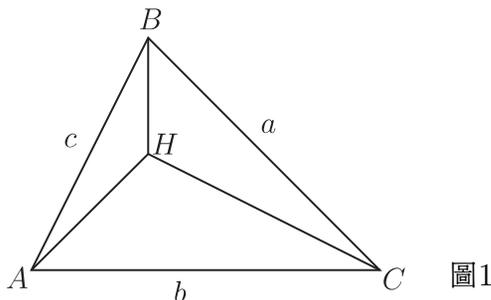
此外, 筆者也透過與求解該例題同樣的手法證明了公式 1。以下, 筆者將分享自己的解題與證明過程, 希望可做為 [1] 文的補充與對照。

二、例題的另解

在 [1] 中, 作者使用公式 1 所解的第三個例題如下:

例: 設 H 為銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\triangle ABH : \triangle BCH : \triangle CAH = 1 : 2 : 3$, 求 $\triangle ABC$ 三邊長的比例值, 即 $a : b : c = ?$

解: 請參考下圖



在上圖中，因為垂心 H 是三高的交會點，我們可以將圖 1 中的三高還原如下圖：

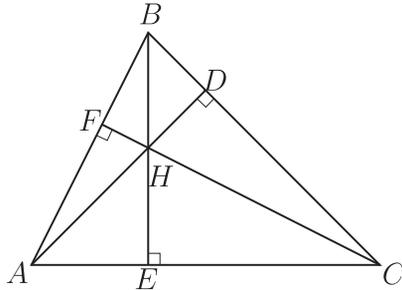


圖 2

注意圖 2 中 $\triangle ABH$ 與 $\triangle ACH$ 共用底邊 \overline{AH} ，因此可得底下的面積關係 (面積比=高的比)：

$$\triangle ABH : \triangle ACH = \overline{BD} : \overline{CD}$$

因此

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\triangle ABH}{\triangle ACH} = \frac{1}{3}$$

同理可知

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{2}{1}$$

因此可令

$$\overline{BD} = s, \quad \overline{CD} = 3s, \quad \overline{AF} = 3u, \quad \overline{BF} = 2u, \quad \overline{CE} = 2t, \quad \overline{AE} = t$$

則 $\overline{AB} = 5u, \overline{BC} = 4s, \overline{CA} = 3t$ 。由圖 2 知

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 \\ &\Rightarrow 25u^2 - s^2 = 9t^2 - 9s^2 \\ &\Rightarrow 8s^2 - 9t^2 + 25u^2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

此外由圖 2 也有

$$\begin{aligned} \overline{BE}^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2 \\ &\Rightarrow 25u^2 - t^2 = 16s^2 - 4t^2 \\ &\Rightarrow 16s^2 - 3t^2 - 25u^2 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

由 (1), (2) 可解得

$$\begin{aligned} s^2 : t^2 : u^2 &= 5 : 10 : 2 \\ &\Rightarrow s : t : u = \sqrt{5} : \sqrt{10} : \sqrt{2} \\ &\Rightarrow \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 5u : 4s : 3t = 5\sqrt{2} : 4\sqrt{5} : 3\sqrt{10} = \sqrt{5} : \sqrt{8} : 3 \end{aligned}$$

或者寫成 $a : b : c = \sqrt{8} : 3 : \sqrt{5}$, 這與 [1] 中第三個例題的解答相同。

三、公式的另證

本節中, 筆者將以第二節例題的解題手法來證明公式 1, 證明如下:

證明: 請先參考下圖

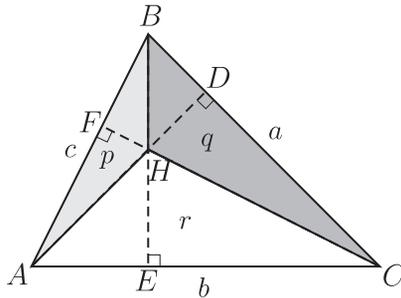


圖3

我們先假設

$$\triangle ABH : \triangle BCH : \triangle CAH = p : q : r$$

依照與第二節例題相同的原理, 可知 $\overline{BD} : \overline{CD} = p : r$, 因此可令

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \frac{p}{p+r} \overline{BC} = \frac{pa}{p+r} \\ \overline{CD} &= \frac{r}{p+r} \overline{BC} = \frac{ra}{p+r}\end{aligned}$$

同理也可得

$$\overline{AF} = \frac{rc}{q+r}, \quad \overline{BF} = \frac{qc}{q+r}, \quad \overline{CE} = \frac{qb}{p+q}, \quad \overline{AE} = \frac{pb}{p+q}$$

由圖 3 可知

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 \\ &\Rightarrow c^2 - \left(\frac{pa}{p+r}\right)^2 = b^2 - \left(\frac{ra}{p+r}\right)^2 \\ &\Rightarrow c^2 - a^2 \left(1 - \frac{r}{p+r}\right)^2 = b^2 - a^2 \left(\frac{r}{p+r}\right)^2 \\ &\Rightarrow c^2 - a^2 \left(1 - \frac{2r}{p+r}\right) = b^2 \\ &\Rightarrow c^2 - a^2 \left(\frac{p-r}{p+r}\right) = b^2 \\ &\Rightarrow \frac{p-r}{p+r} = \frac{c^2 - b^2}{a^2}\end{aligned}$$

(3)

若 $b \neq c$, 由 (3) 我們可令 $p - r = (c^2 - b^2)d$, $p + r = a^2d$, 其中 $d \neq 0$, 因此

$$\begin{aligned} p : r = 2p : 2r &= [(p + r) + (p - r)] : [(p + r) - (p - r)] \\ &= [(c^2 + a^2 - b^2)d] : [(a^2 + b^2 - c^2)d] \\ &= (c^2 + a^2 - b^2) : (a^2 + b^2 - c^2) \end{aligned} \quad (4)$$

若 $b = c$, 由 (3) 可知 $p = r$, 因此有

$$p : r = 1 : 1 = a^2 : a^2 = (c^2 + a^2 - b^2) : (a^2 + b^2 - c^2)$$

此時 $p : r$ 同樣符合 (4) 式。

由圖 3 同理可知

$$\begin{aligned} \overline{CF}^2 &= \overline{AC}^2 - \overline{AF}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BF}^2 \\ \Rightarrow \frac{r - q}{r + q} &= \frac{b^2 - a^2}{c^2} \\ \Rightarrow q : r &= (c^2 + a^2 - b^2) : (b^2 + c^2 - a^2) \end{aligned} \quad (5)$$

將 (4), (5) 兩式分別改寫為

$$p : r = (c^2 + a^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2) : (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) \quad (6)$$

$$q : r = (a^2 + b^2 - c^2)(c^2 + a^2 - b^2) : (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) \quad (7)$$

將上兩式合起來看, 就有

$$p : q : r = [c^4 - (a^2 - b^2)^2] : [a^4 - (b^2 - c^2)^2] : [b^4 - (c^2 - a^2)^2]$$

這樣就得到了公式 1 中的面積比, 即

$$\begin{aligned} \triangle ABH : \triangle BCH : \triangle CAH \\ = (c^4 - a^4 + 2a^2b^2 - b^4) : (a^4 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4) : (b^4 - c^4 + 2c^2a^2 - a^4). \end{aligned} \quad (8)$$

四、結語

重新看一次公式 1 的結論, 即 (8) 式, 我們可能會覺得奇怪的地方是, $\triangle ABH$ 、 $\triangle BCH$ 、 $\triangle CAH$ 三塊面積的因次是「長度的平方」, 但為何在 (8) 的右式出現的三項, 都是「長度的 4 次方」呢? 其實, 這是因為我們分別對 (4), (5) 進行擴分而得 (6), (7) 兩式時, 把 (4), (5) 這兩個 (因次) 原為長度平方的比改寫成了長度 4 次方比的緣故。想進一步了解因次概念的讀者, 不妨參考 [2]。

最後值得一提的是,在第二節例題的解題過程中,因為沒有用上公式 1,對於較不偏好套用公式的讀者而言,或許不失為一較直接的解法。

參考文獻

1. 劉俊傑。換個觀點看三角形的四心。數學傳播, 30(2), 28-39, 2006。
Available from: http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d302/30203.pdf.
2. 林琦焜。從量綱看世界。數學傳播, 33(3), 13-27, 2009。
Available from: http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d333/33302.pdf.

—本文作者投稿時任職於麥當勞竹南民權中心—

2017 全國技專院校「文以載數創作獎」作品選集

圓周率 文 / 方千豪

那千古的未解之謎,
去探究其幽深的邊際。
就連廣袤的蒼穹亦無法,
遮蔽它浩瀚無窮的原初之理。
自視甚高的數學家們前仆後繼,
皆徬徨於首尾相連的永劫迴廊裡。
趨之若鶩的賢者至今仍在追尋奇蹟,
僅為了觸及存在無窮之徑中的可能性。

僅為了觸及存在無窮之徑中的可能性,
趨之若鶩的賢者至今仍在追尋奇蹟。
皆徬徨於首尾相連的永劫迴廊裡,
自視甚高的數學家們前仆後繼,
遮蔽它浩瀚無窮的原初之理。
就連廣袤的蒼穹亦無法,
去探究其幽深的邊際。
那千古的未解之謎!

—本文作者就讀南臺科技大學應用日語系—