數學傳播 42卷1期, pp. 71-79

Fibonacci 與 Padovan 的對話 (上): 將 Padovan 數列用「完全齊次對稱多項式」表示

陳建燁

壹、前言

各位讀者, 你知道 Fibonacci 數列與 Padovan 數列有什麼關聯性嗎? 對於這兩個引起大量研究興趣的數列, 表面看似並不相關。本文將揭示其內在的共通性, 並在下一篇文章研究涉及此兩數列的一個恆等式。

對於著名的 Fibonacci 數列 $\langle F_n\rangle : \begin{cases} F_0=0,\ F_1=1 \\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \end{cases}$, 已知其一般項為

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big] \quad \text{(參考資料 [1])。}$$

設 α 與 β 為特徵方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根, 且 $\alpha>\beta$, 則

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}.$$

其中的 $\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}$, 恰為 α 與 β 的「完全齊次對稱多項式」, 記作 $h_{n-1}(\alpha,\beta)$。以上說明了 $F_n=h_{n-1}(\alpha,\beta)$, 亦即可將費氏數列的一般項, 表示成完全齊次對稱多項式。

相對地, 另一個引起研究興趣的遞迴數列是所謂的:

$$\text{Padovan 數列 } \langle P_n\rangle : \begin{cases} P_0=P_1=P_2=1 \\ P_n=P_{n-2}+P_{n-3} \end{cases} \text{。(參考資料 [2])}$$

數列的前幾項為 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, ...。

根據參考資料 [2] 的說法, 此三階遞迴數列, 是在 1996 年, 由 Ian Stewart 在科學人雜誌提出。

本文的主要動機是 : 相較於 Fibonacci 數列可表示成完全齊次對稱多項式, 是否能將 Padovan 數 列也表示成完全齊次對稱多項式?

答案是肯定的, 在本篇文章中, 將證明 $P_n = h_{n+2}(a,b,c)$, 其中 a,b,c 是 $\langle P_n\rangle$ 的特徵方程式 $x^3-x-1=0$ 的三個根。

貳、本文

一、定義、記號與已知公式:

1. 三階遞迴數列生成恆等式 (參考資料 [3])

設 $\langle a_n\rangle$ 爲三階遞迴數列, 滿足遞迴關係 $a_{n+3} = pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n$, 其中 $n = 0,1,2,\ldots$, 則有

$$\begin{aligned}&a_0x^{n+3}+(a_1-pa_0)x^{n+2}+(a_2-pa_1-qa_0)x^{n+1}\\&\quad=(x^3-px^2-qx-r)(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n)\\&\qquad+(pa_n+qa_{n-1}+ra_{n-2})x^2+(qa_n+ra_{n-1})x+ra_n,\qquad \text{其中 } n\geq 2。\end{aligned}$$

說明: 將 $(x^3-px^2-qx-r)(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n)$ 乘開, 得 $a_0x^{n+3}+(a_1-pa_0)x^{n+2}+(a_2-pa_1-qa_0)x^{n+1}-[(pa_n+qa_{n-1}+ra_{n-2})x^2 +(qa_n+ra_{n-1})x+ra_n]$, 移項之後即得。

2. 完全齊次對稱多項式 (Complete Homogeneous Symmetric Polynomial)

定義:

$$h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\geq 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n}),$$

稱爲「變數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的 k 次完全齊次對稱多項式」。特別地, $h_0(a_1,a_2,\ldots,a_n)=1$, 且 $h_k(a)=a^k$。

例:

$$h_2(a_1,a_2,a_3)=\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1.$$

例: $h_2(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$

例: $h_3(a,b)=a^3+b^3+a^2b+ab^2$.

3. 拉格朗日插值型式

定義:

$$L_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}(a_i-a_j)},$$

稱爲「變數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的 k 次拉格朗日插值型式」。

註: 以分子的次方來定義 L 的下標。

例:

$$L_2(a_1,a_2,a_3)=\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i^2}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}=\frac{a_1^2}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{a_2^2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{a_3^2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

例:

$$L_8(a,b,c,d)=\frac{a^8}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^8}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^8}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^8}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

4. $\boldsymbol{h-L}$ 轉換公式：$h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=L_{k+n-1}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, 其中 $n\ge 2$, $k\ge 0$。(參考資料 [4])

說明: 此一公式, 可將「完全齊次對稱多項式」與「拉格朗日插值型式」互相轉換。

例: 取 $n=3$, $k=5$, 得 $h_5(a_1,a_2,a_3)=L_{5+3-1}(a_1,a_2,a_3)=L_7(a_1,a_2,a_3)$。

說明: 對於

$$L_7(a_1,a_2,a_3)=\frac{a_1^7}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{a_2^7}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{a_3^7}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)},$$

首先, 有 3 個變數 a_1,a_2,a_3, 則 $n=3$。接著, $\frac{a_1^7}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$ 的分母爲 2 次方, 分子爲 7 次方, 所以化簡後所得齊次式 $h_k(a_1,a_2,a_3)$ 的次方 k 爲 $7-2=5$, 於是有 $L_7(a_1,a_2,a_3)=h_5(a_1,a_2,a_3)$。

注意到 $7-5=2=3-1$, 可以看出: L 與 h 的下標之差, 恰爲變數個數減 1。

由於 L 與 h 的下標之差, 恰為變數個數減 1, 因此 $h-L$ 轉換公式, 也可寫成:

$$L_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=h_{k-(n-1)}(a_1,a_2,\ldots,a_n),\quad \text{其中 } k\ge n-1\text{。}$$

例: $L_{11}(a,b,c,d)=h_{11-(4-1)}(a,b,c,d)=h_8(a,b,c,d)$。

例: $L_{n+3}(\alpha,\beta,\gamma)=h_{n+3-(3-1)}(\alpha,\beta,\gamma)=h_{n+1}(\alpha,\beta,\gamma)$。

5. 基本對稱多項式 (Elementary Symmetric Polynomial)

定義: $e_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ 0\le\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\le 1}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$, 稱為「變數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的 k 次基本對稱多項式」。

例: $e_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ 0\le\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\le 1}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$ 。

例: $e_0(a,b,c)=1,\quad e_1(a,b,c)=a+b+c,\quad e_2=ab+bc+ca,\quad e_3(a,b,c)=abc$ 。

例: $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-e_1(a,b,c)x^2+e_2(a,b,c)x-e_3(a,b,c)$ 。

6. 對稱多項式的「$e-h$ 恆等式」(參考資料 [5])

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k e_k\cdot h_{n-k}=0,\quad \text{其中 } n\ge m,$$

亦即 $h_n-e_1h_{n-1}+\cdots+(-1)^te_th_{n-t}+\cdots+(-1)^me_mh_{n-m}=0$。(其中 $e_k=e_k(a_1,a_2,\ldots,a_m)$, $h_k=h_k(a_1,a_2,\ldots,a_m)$)

說明: 此式刻劃了基本對稱多項式與完全齊次對稱多項式的關聯性, 也說明了 $h_k(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ 是 m 階遞迴數列。

特別地, 當 $m=3$ 時, 有 $\sum\limits_{k=0}^{3}(-1)^ke_k\cdot h_{n-k}=0$, 即

$h_n(a_1,a_2,a_3)-e_1(a_1,a_2,a_3)h_{n-1}(a_1,a_2,a_3)+e_2(a_1,a_2,a_3)h_{n-2}(a_1,a_2,a_3)$
$-e_3(a_1,a_2,a_3)h_{n-3}(a_1,a_2,a_3)=0$, 簡記為 $h_n-e_1\cdot h_{n-1}+e_2\cdot h_{n-2}-e_3\cdot h_{n-3}=0$。

二、主要工作:

(一) 將**三階遞迴數列的一般項** a_n 表示**成完全齊次對稱多項式** $h_n(\alpha,\beta,\gamma)$ 的**線性組合**:

1. 設 $\langle a_n\rangle$ 為三階遞迴數列, 滿足遞迴關係 $a_{n+3}=pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n$, 且設特徵方程式 $x^3-px^2-qx-r=0$ 有三相異根 α、β 與 γ 。

由「三階遞迴數列生成恆等式」, 有:

$$\begin{aligned}&a_0x^{n+3}+(a_1-pa_0)x^{n+2}+(a_2-pa_1-qa_0)x^{n+1}\\&\quad=(x^3-px^2-qx-r)(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n)\\&\qquad+(pa_n+qa_{n-1}+ra_{n-2})x^2+(qa_n+ra_{n-1})x+ra_n\\&\quad=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n)\\&\qquad+a_{n+1}x^2+(qa_n+ra_{n-1})x+ra_n,\quad \text{其中 } n\ge 2。\end{aligned}$$

令 $f(x)=a_0x^{n+3}+(a_1-pa_0)x^{n+2}+(a_2-pa_1-qa_0)x^{n+1}=Ax^{n+3}+Bx^{n+2}+Cx^{n+1}$ 可將上式視爲:

「$f(x)$ 除以 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 的餘式爲 $a_{n+1}x^2+(qa_n+ra_{n-1})x+ra_n$」。

可以看出, **三階遞迴數列的一般項** a_{n+1}, 正好是餘式 $a_{n+1}x^2+(qa_n+ra_{n-1})x+ra_n$ 的 x^2 項的係數。

2. 由「拉格朗日插值多項式」, 可得

$$\begin{aligned}&\text{餘式 } a_{n+1}x^2+(qa_n+ra_{n-1})x+ra_n\\&\quad=f(\alpha)\cdot\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+f(\beta)\cdot\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+f(\gamma)\cdot\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\end{aligned}$$

比較 x^2 的係數, 可得

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{f(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{f(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{f(\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\\&=\frac{A\alpha^{n+3}+B\alpha^{n+2}+C\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{A\beta^{n+3}+B\beta^{n+2}+C\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{A\gamma^{n+3}+B\gamma^{n+2}+C\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\\&=\frac{A\cdot\alpha^{n+3}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{A\cdot\beta^{n+3}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{A\cdot\gamma^{n+3}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\\&\quad+\frac{B\cdot\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{B\cdot\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{B\cdot\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\\&\quad+\frac{C\cdot\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{C\cdot\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{C\cdot\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\\&=A\cdot L_{n+3}(\alpha,\beta,\gamma)+B\cdot L_{n+2}(\alpha,\beta,\gamma)+C\cdot L_{n+1}(\alpha,\beta,\gamma)\end{aligned}$$

3. 由 $h-L$ 轉換公式 (參見第 74 頁), 可得

$$\begin{aligned}&A\cdot L_{n+3}(\alpha,\beta,\gamma)+B\cdot L_{n+2}(\alpha,\beta,\gamma)+C\cdot L_{n+1}(\alpha,\beta,\gamma)\\&\quad=A\cdot h_{n+1}(\alpha,\beta,\gamma)+B\cdot h_n(\alpha,\beta,\gamma)+C\cdot h_{n-1}(\alpha,\beta,\gamma).\end{aligned}$$

4. 由 1, 2, 3, 可得

$$\begin{aligned}
&a_{n+1} = A\cdot h_{n+1}(\alpha,\beta,\gamma) + B\cdot h_n(\alpha,\beta,\gamma) + C\cdot h_{n-1}(\alpha,\beta,\gamma), \quad \text{其中 } n\ge 2\\
\Rightarrow\ &a_n = A\cdot h_n(\alpha,\beta,\gamma) + B\cdot h_{n-1}(\alpha,\beta,\gamma) + C\cdot h_{n-2}(\alpha,\beta,\gamma), \quad \text{其中 } n\ge 3,\\
&\text{且 } A = a_0,\ B = a_1 - pa_0,\ C = a_2 - pa_1 - qa_0 \quad 。
\end{aligned}$$

至此, 已將三階遞迴數列的一般項 a_n 表示成完全齊次對稱多項式 $h_n(\alpha,\beta,\gamma)$ 的線性組合。

(二) Padovan 數列的一般項

1. 在上述的推導過程中, 取 $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ 與 $p = 0$, $q = 1$, $r = 1$, 則數列 $\langle a_n\rangle$ 即爲 Padovan 數列 $\langle P_n\rangle$。

   設特徵方程式 $x^3 - x - 1 = 0$ 的三相異根爲 a, b, c(註), 則有

$$P_n = A\cdot h_n(a,b,c) + B\cdot h_{n-1}(a,b,c) + C\cdot h_{n-2}(a,b,c), \quad \text{其中 } n\ge 3,$$

   此時 $A = a_0 = 1$, $B = a_1 - pa_0 = 1-0\cdot 1 = 1$, $C = a_2 - pa_1 - qa_0 = 1-0\cdot 1-1\cdot 1 = 0$,

   即得 $P_n = h_n(a,b,c) + h_{n-1}(a,b,c)$。

2. 更進一步地, 由「$e-h$ 恆等式」(參見第 74 頁), 有 $h_n(a,b,c) - e_1(a,b,c)\cdot h_{n-1}(a,b,c) + e_2(a,b,c)\cdot h_{n-2}(a,b,c) - e_3(a,b,c)\cdot h_{n-3}(a,b,c) = 0$, 其中 $n\ge 3$。
   又由 $x^3 - x - 1 = (x-a)(x-b)(x-c)$, 可得

$$\begin{aligned}
&e_1(a,b,c) = a+b+c = 0,\ \ e_2(a,b,c) = ab+bc+ca = -1,\ \ e_3(a,b,c) = abc = 1\\
\Rightarrow\ &h_n(a,b,c) - 0\cdot h_{n-1}(a,b,c) + (-1)\cdot h_{n-2}(a,b,c) - 1\cdot h_{n-3}(a,b,c) = 0\\
\Rightarrow\ &h_n(a,b,c) = h_{n-2}(a,b,c) + h_{n-3}(a,b,c), \quad \text{其中 } n\ge 3\\
\Rightarrow\ &h_{n+2}(a,b,c) = h_n(a,b,c) + h_{n-1}(a,b,c), \quad \text{其中 } n\ge 1.
\end{aligned}$$

3. 由 1, 2, 可得 $P_n = h_n(a,b,c) + h_{n-1}(a,b,c) = h_{n+2}(a,b,c)$, 其中 $n\ge 3$。

   至此, 已將 Padovan 數列 $\langle P_n\rangle$ 的一般項表示爲完全齊次對稱多項式 $h_{n+2}(a,b,c)$, 即 $P_n = h_{n+2}(a,b,c)$, 其中 $n\ge 3$, 且 a,b,c 爲 $\langle P_n\rangle$ 的特徵方程式 $x^3 - x - 1 = 0$ 的三根。此一表達式, 也可寫成 $h_n(a,b,c) = P_{n-2}$, 其中 $n\ge 5$。

(三) 延拓至所有整數下標

1. 對於 Padovan 數列 $\langle P_n\rangle : \begin{cases} P_0 = P_1 = P_2 = 1 \\ P_n = P_{n-2} + P_{n-3}\end{cases}$, P_n 的下標取值範圍可爲所有整數。

由 $P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \Rightarrow P_{n-3} = P_n - P_{n-2}$, 可由此定出 $P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, \ldots$:

$$\begin{aligned} P_{-1} &= P_2 - P_0 = 1 - 1 = 0, \\ P_{-2} &= P_1 - P_{-1} = 1 - 0 = 1, \\ P_{-3} &= P_0 - P_{-2} = 1 - 1 = 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

2. 設 a, b, c 爲特徵方程式 $x^3 - x - 1 = 0$ 的三根, 由「$e - h$ 恆等式」, 有 $h_n(a,b,c) = h_{n-2}(a,b,c) + h_{n-3}(a,b,c)$, 其中 $n \geq 3$, 簡記爲 $h_n = h_{n-2} + h_{n-3}$, 其中 $n \geq 3$, 此式說明了 $\langle h_n \rangle$ 也構成一個三階遞迴數列, 而數列的前 3 項分別爲: $h_0(a,b,c) = 1$, $h_1(a,b,c) = a+b+c = 0$, $h_2(a,b,c) = (a+b+c)^2 - (ab+bc+ca) = 0 - (-1) = 1$, 所以有:

$$\langle h_n \rangle : \begin{cases} h_0 = 1,\ h_1 = 0,\ h_2 = 1 \\ h_n = h_{n-2} + h_{n-3} \end{cases}$$

類似於 Padovan 數列, h_n 的下標取值範圍也可爲所有整數。由 $h_n = h_{n-2} + h_{n-3} \Rightarrow h_{n-3} = h_n - h_{n-2}$, 可由此定出 $h_{-1}, h_{-2}, h_{-3}, \ldots$:

$$\begin{aligned} h_{-1} &= h_2 - h_0 = 1 - 1 = 0, \\ h_{-2} &= h_1 - h_{-1} = 0 - 0 = 0, \\ h_{-3} &= h_0 - h_{-2} = 1 - 0 = 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

3. 注意到 $P_0 = 1 = h_2$, $P_{-1} = 0 = h_1$ 與 $P_{-2} = 1 = h_0$, 即 $\langle P_n \rangle$ 與 $\langle h_n \rangle$ 有連續三項是相同的。又 $\langle P_n \rangle$ 的遞迴關係式爲 $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, $\langle h_n \rangle$ 的遞迴關係式爲 $h_n = h_{n-2} + h_{n-3}$, 形式完全相同, 所以可看出 $\langle P_n \rangle$ 與 $\langle h_n \rangle$ 兩數列中的項完全相同, 只有下標相差 2, 亦即 $P_n = h_{n+2}(a,b,c)$, 其中 n 爲任意整數。

   舉例而言, 從 $P_0 = 1 = h_2$, $P_{-1} = 0 = h_1$ 與 $P_{-2} = 1 = h_0$ 出發, 則

$$\begin{aligned} &P_{-3} = P_0 - P_{-2} = h_2 - h_0 = h_{-1},\ P_{-4} = P_{-1} - P_{-3} = h_1 - h_{-1} = h_{-2}, \ldots; \\ &\ P_1 = P_{-1} + P_{-2} = h_1 + h_0 = h_3,\ P_2 = P_0 + P_{-1} = h_2 + h_1 = h_4, \\ &\ P_3 = P_1 + P_0 = h_3 + h_2 = h_5, \ldots, \end{aligned}$$

   可得 $P_n = h_{n+2}(a,b,c)$ 對所有整數下標皆成立。

註: 方程式 $x^3 - x - 1 = 0$ 有三相異根, 此一事實之證明置於附錄。

參、結語

回顧本文的工作, 第一階段, 先注意到三階遞迴數列一般項 a_{n+1}, 正好出現在多項式除法的餘式 $a_{n+1}x^2+(qa_n+ra_{n-1})x+ra_n$ 的 x^2 項的係數; 接著用拉格朗日插值多項式寫出餘式, 求得餘式的 x^2 項的係數爲 $A\cdot L_{n+3}+B\cdot L_{n+2}+C\cdot L_{n+1}$; 再用 $h-L$ 轉換公式, 轉換成 $A\cdot h_{n+1}+B\cdot h_n+C\cdot h_{n-1}$。用以上的方式, 將三階遞迴數列的一般項 a_n, 表示成完全齊次對稱多項式 $h_n(\alpha,\beta,\gamma)$ 的線性組合。

第二階段, 取 $a_0=a_1=a_2=1$ 與 $p=0$, $q=1$, $r=1$, 則數列 $\langle a_n\rangle$ 即爲 Padovan 數列 $\langle P_n\rangle$, 得 $P_n=1\cdot h_n+1\cdot h_{n-1}+0\cdot h_{n-2}=h_n+h_{n-1}$; 再用 $e-h$ 恆等式, 得 $h_n+h_{n-1}=h_{n+2}$; 最後將下標延拓至所有整數, 得到 $P_n=h_{n+2}(a,b,c)$, 其中 n 爲任意整數, 且 a,b,c 爲特徵方程式 $x^3-x-1=0$ 的三根, 將 $\langle P_n\rangle$ 的一般項表示爲完全齊次對稱多項式。

相較於將 Padovan 數列用一系列由小到大的正三角形邊長來呈現 (參考資料 [2]) 所展現的幾何面貌, 本篇文章揭示的是Padovan 數列的「代數本質」, 亦即本質上, Padovan 數列可視爲完全齊次對稱多項式的一種特殊情形。由此, 即有可能透過對完全齊次對稱多項式進行更一般的研究, 反過來得到 Padovan 數列的一些性質, 這是本文的目的所在。

附錄

方程式 $x^3-x-1=0$ 有三相異根。

證明:

1. 若 $x^3-x-1=(x-k)^3=x^3-3kx^2+3k^2x-k^3$
$$\Rightarrow\begin{cases}-3k=0\\3k^2=-1\\-k^3=-1\end{cases},\ \text{不合, 由此可知 } x^3-x-1=0 \text{ 沒有三重根。}$$
2. 若 $x^3-x-1=(x-\alpha)^2(x-\beta)=x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\alpha^2\beta$, 其中
$$\alpha\neq\beta\Rightarrow\begin{cases}-(2\alpha+\beta)=0\\\alpha^2+2\alpha\beta=-1\\-\alpha^2\beta=-1\end{cases}$$
將 $\beta=-2\alpha$ 代入 $\alpha^2+2\alpha\beta=-1$ 與 $-\alpha^2\beta=-1$, 得 $3\alpha^2=1$ 與 $2\alpha^3=-1$ 將兩式相除, 得 $\alpha=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow\beta=-2\alpha=3\Rightarrow\alpha^2\beta=\dfrac{27}{4}\neq1$, 不合, 由此可知 $x^3-x-1=0$ 沒有二重根。
3. 由 1, 2 可知, $x^3-x-1=0$ 有三相異根。

另證: 由一元三次方程式的公式解, 可直接解出 $x^3-x-1=0$ 的三根爲

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{23}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{23}{108}}},\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{23}{108}}}\cdot\omega+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{23}{108}}}\cdot\omega^2$$

$$\text{與}\quad \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{23}{108}}}\cdot\omega^2+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{23}{108}}}\cdot\omega,$$

其中 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 亦可看出此三根相異。

參考資料

1. 陳建燁。推導費氏數列性質三部曲(中): 用根與係數關係。高中數學學科中心電子報第109期 , p.1, 2016年4月。
2. 廖信傑。用矩陣方法探討三階遞迴數列。數學傳播, 38(1), 36-50, 2005。
3. 陳建燁。用「拉格朗日插值多項式」求三階遞迴數列的一般項(三相異根)。高中數學學科中心電子報第115期, 1-2, 2016年10月。
4. 陳建燁。推廣的 Vandermonde 行列式 (最右行升次型)。高中數學學科中心電子報第114期, p.6, 11, 12, 14, 2016年9月。
5. I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 12-14.

—本文作者任教台北市立第一女子高級中學—

2017 全國技專院校「文以載數創作獎」作品選集

你說, 我說　　文 / 黃鈺婷

時間滴答滴地過偶然相遇的輪廓
造就奇特的邂逅在我的試卷畫下了因果
你說彼此在一起就像彗星撞上了地球
兩點一直線的距離遠遠大於一道馬里亞納海溝
我說相遇在一起就像兩個圓凝聚成了果
兩點一直線的距離僅僅小於一個眼神一個回眸
你說這個未知數風險過大不足以投注
我說給個概數我將義無反顧
在幾何的世界兩點相連成線
於倍數增長的催化編織成新的一面

—本文作者就讀正修科技大學國際企業系—