數學傳播 42卷1期, pp. 12-22

我在幾何分析的個人經驗

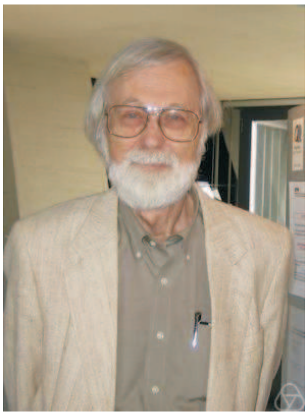
演講者：丘成桐院士
時　間：民國 106 年 8 月 1 日
地　點：天文數學館一樓國際會議廳
整　理：編輯室

我的演講是理論科學中心成立二十週年的一項活動。回溯 22 年前我和劉 (兆玄) 教授做過的討論, 當時他是國科會主委。自 1991 年他擔任新竹清華大學校長以來, 我們一直是好朋友。那年, 我帶家人在台灣休假一年。本來我的主要目的是要教兩個兒子中文, 並且讓他們更了解斯土斯民。但是, 在那一年的講學中, 我交了很多好朋友。我很欣賞劉教授在清華大學校長任內展現的驚人行政能力。他卸任清華大學校長職務後, 擔任過交通部長及國科會主委。他在國科學會主委任內, 曾問我台灣是否應該向韓國某中心投資五十萬美元, 該中心在楊振寧教授主導下甫成立。我告訴他, 就數學而言, 我在台灣的同事至少和韓國的同事一樣好, 而每年五十萬美元是項巨大金額 (至少在當時) 。我建議他考慮在台灣設立一個中心, 而不是向韓國捐款。劉教授立即同意。另一方面, 劉教授認為, 為了不讓楊教授覺得不安, 中心應該有一個理論物理分部。因此, NCTS 有數學和物理兩個分部。

NCTS 創設於 20 年前。創設中心並不容易。多年來, 數學的許多領域都在中心發展起來。兩個值得注意的領域是幾何分析和數論。前者由林長壽主導, 後者由于靖和李文卿 (Winnie Li) 主導。這次會議中 Ken Ribet 將主講數論, 因此我的演講主題是幾何分析。林長壽在這個領域做了很多有創意的工作。但我將談談自己過去五十年的經歷。

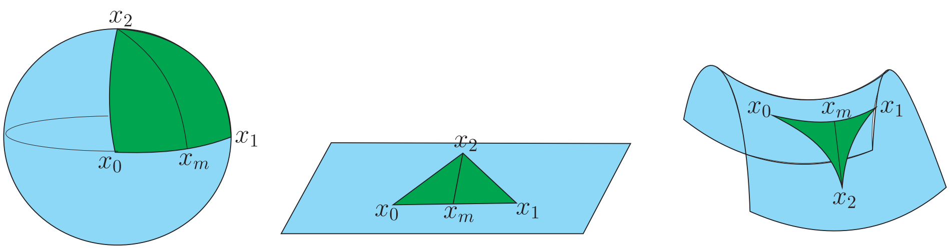
Berkeley, 1969

我在離開香港抵達柏克萊後的第一年, 寫了第一篇期刊論文。那時 Evans Hall 還沒蓋好, 數學系在 Campbell Hall。當時有一百多名教授, 助理教授和訪問學者被安排在 Evans Hall 前面的臨時木造建築物; 研究生沒有辦公室, 但研究氣氛非常好。我選了很多課。但是我經常把我的書放在 Campbell Hall 一樓圖書館的書桌上。我常在圖書館附近出沒, 瀏覽所有的書籍和期刊。那個年代, 期刊不多, 因此可以翻閱大部分的期刊, 雖然我對論文的細



John Milnor (1931∼)

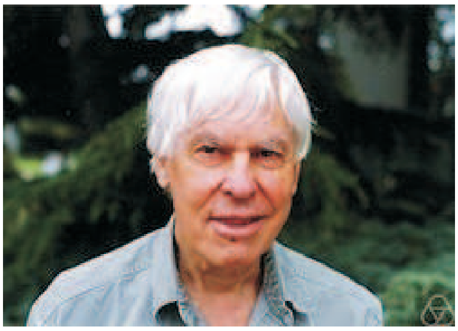
節不甚了解。而在聖誕節的前一天, 四下無人之際, 我發現 Milnor 發表在 Journal of Differential Geometry 的一篇論文, 將局部幾何 (由曲率描述) 連結上大域幾何 (由基本群 (fundamental group) 描述) 。我對這篇廣爲人知的論文很著迷, 閱讀了論文的細節, 並開始思考 : 放鬆一些曲率條件會發生什麼。閱讀 Milnor 推薦的參考文獻後, 我成功地證明了一些有趣的東西; 我使用了無限群的一些理論。該論文發表在 Annals of Mathematics。始自這第一篇論文, 我有強烈動機要了解大域幾何如何受到局部幾何影響。



我在研究所一年級時, 選了 Charles Morrey 的課, 研讀他剛完成的新書 : *Multiple Integrals in the Calculus of Variations* (變分法中的重積分)。

Charles Morrey (1907∼1984)

我所有的同學都抱怨 Morrey 的教學風格。他們對 Smale 和 Palais 的大域分析研討會更感興趣。他們的班級擠滿了人。那對我來說也很有趣; 但是很快地, 我意識到, 總體來說, 他們試圖藉由一些稱爲條件 C 的假設, 來避開關鍵的估計問題。



Smale (1930∼)

Palais (1931∼)

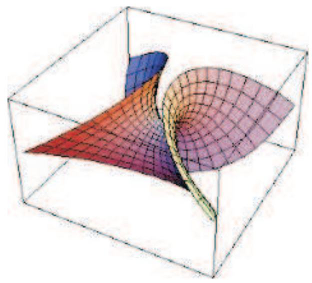
我從 Morrey 的課堂了解為非線性偏微分方程建立估計的重要性。非線性方程中的良好估計端賴熟練操作分析中的論證。一旦發現最後的論證, 它們往往看起來很簡單。大多數學生認為這只是微積分, 並不令人興奮。他們不知道作者需要花費多少精力去弄清這些估計, 而它們對非線性方程所約束的現象提供了深入的洞察。

不久之後, 我意識到這些估計搭起了從局部訊息到大域訊息的橋樑。它們可以經由最大值原理 (maximum principle) 或部分積分發現。我跟著 Morrey 學了三個學期後, 對非線性偏微分方程有了一些感覺。

在春季班, 轟炸柬埔寨引發美國各地的巨大示威遊行, 大多數課程被取消。我是 Morrey 班上唯一的學生。課堂搬到他的辦公室, 我們享受很多有趣的對話。Morrey 喜歡我, 並建議我跟著他攻讀博士學位。我相信他一生中只有一個博士生。如果那時我跟了 Morrey, 研究生涯可能會有所不同。但當時我已經寫了兩篇幾何的論文, 不太願意從幾何轉換到非線性偏微分方程。

但是, Morrey 對我的研究生涯有極為深刻的影響。我當時決定了未來的研究方向, 將嘗試結合非線性偏微分方程與幾何。這說來容易, 實際執行就難了。當時大多數幾何學家都非常滿意地進行局部代數計算, 但我不滿意。

我對 Morrey 的工作非常著迷, 因為他為一般的黎曼流形解決了古典的 Plateau 問題, 且對黎曼曲面的二維單值化 (uniformization) 定理提出了證明。這是兩項雙變數非線性橢圓方程最具影響力的工作。



Minimal surface

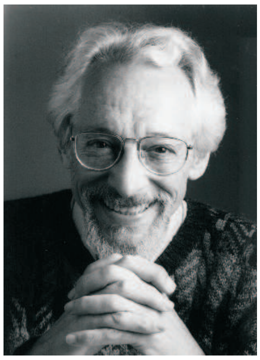
兩年後, 我在普林斯頓 IAS 時, 遇到了 Whitney, 他是當代微分拓樸的奠基者。他告訴我, 他在 1940 年代末開始研究封閉曲線的浸入 (immersion) 分類理論, 以回應他的同學 Morrey 關於 Plateau 問題的挑戰。Whitney 的理論被 Stephan Smale 和 Morris Hirsch 推廣到更高維的流形。


Hassler Whitney
(1907∼1989)

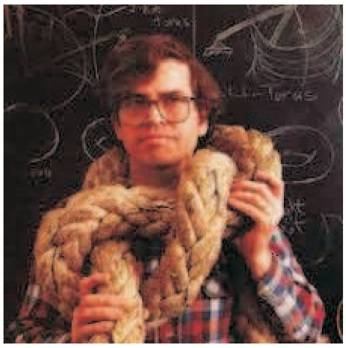
Smale 將球內部外翻的著名工作是這種浸入理論的一個特例。不久之後, Gromov 研究了淹沒 (submersion) 問題, 並將其進一步推廣, 稱之爲 h-原則。雖然 Douglas 和 Rado 爲歐氏空間解決了 Plateau 問題, 且 Morrey 爲一般黎曼流形解決了該問題, 但仍有許多等待解答的問題。

一個重要的問題是 : 考慮 Plateau 問題的最小曲面解, 其奇異點 (singularity) 可能具有什麼性質? Courant 起初認爲該曲面可能會有分支點 (branch point), 但 Osserman 證明曲面其實是一個浸入。這顯示了 Plateau 問題與浸入理論的相關性。


Courant (1888∼1972)


Osserman (1926∼2011)

如果邊界曲線位於凸體 (convex body) 的邊界上, Douglas-Morrey 解是否爲嵌入? 這是一個懸而未決的問題。Meeks 和我在 1977 年使用拓樸工具解決了這個問題, 而該工具源自 Dehn's Lemma 在三維拓樸中的解。


William Thurston
(1946∼2012)

反過來, 我們也可以使用最小曲面來解決 3 維流形拓樸中的重要問題。結合 Thurston 的工作, Meeks-Yau 的結果爲三維球體上之有限群作用 (finite group actions) 解決了著名的 Smith 猜想 (它們與線性作用共軛) 。

雖然拓樸學家不時使用與最小曲面相關的方法, 但是他們往往忘記那是我們草創的。無論如何, 我對單值化定理的興趣一直持續到現在。第一個重要的問題是 : 何種情況下會有完備的拋物型流形?

與陳省身 (1911～2004)、鄭紹遠

因此, 我花了很多時間嘗試證明 Liouville 定理 : 在 Ricci 曲率非負的條件下, 流形不允許不爲常數的正調和函數。我花了大約兩年的時間找到梯度估計來完成證明。梯度估計對我在幾何和分析的工作起著重要的作用。它引導出我與鄭紹遠 (Shiu-Yuen Cheng) 關於特徵函數的工作, 而我與李偉光 (Peter Li) 關於拋物型方程 Li-Yau 不等式的工作也源於此。

單值化定理的更高維推廣是我在研究所時期的研究重點。我還是研究生時, Ted Frankel 已提出一個著名的猜想, 推測雙截面曲率 (bisectional curvature) 爲正的緊緻 Kähler 流形與複投影空間 (complex projective space) 是雙向全純同構 (bi-holomorphic) 的。這個優美的猜想在 Kobayashi 和 Ochiai 的研討會上已進行了深入的討論。但是我覺得整體情況應該包括以下兩個猜想 :

- 雙截面曲率爲正的完備非緊緻 Kähler 流形必定雙向全純同構於複歐氏空間 $\mathbb{C}^n$,
- 曲率爲負的緊緻 Kähler 流形必定被一個有界域 ($\Omega \subset \mathbb{C}^n$) 覆蓋。

Ted Frankel
(1929～2017)

與陳省身、Kobayashi (1932～2012) 在日本

具强負曲率的單連通完備 Kähler 流形應有開浸入 (open immersion) 將之映成到有界域。我在柏克萊的第二年, 完成了這個方案。我先證明 Ricci 曲率非負的完備 Kähler 流形不容許不爲常數的有界全純函數 (bounded holomorphic functions), 進而藉此結果取得一些進展。在 1975 年多複變的 Williamstown 會議上, 我針對這個方案給了演講。

與蕭蔭堂(1943～)、陸啟鏗 (1927～2015)

我因此首次與蕭蔭堂 (Yum-Tong Siu) 見面, 他立即對這個方案感興趣。我們開始處理簡單的情況, 假設曲率衰減 (decay of the curvature)。雖然結果不如我預期的那麼強, 但它給出了一些構建峰值函數 (peak functions) 的方法。我們使用最小曲面技巧, 提出了 Frenkel 猜想的證明。

這裡我們需要使用高維曲面的第二變分 (second variation) 公式。我們的處置是基於下述事實：黎曼曲面上的任何複向量叢 (complex vector bundle) 都可以轉變成全純叢 (holomorphic bundle)。其後 Mario Micallef 和 John Moore 將我們的方法用到其他問題上。

關於雙向全純同構於複歐氏空間之流形, 我的猜想已接近完全解決。諸如 Shigetoshi Bando、曹懷東 (H. D. Cao)、Wanxiong Shi、Albert Chau、譚聯輝 (L. F. Tam)、朱熹平 (X. P. Zhu), 陳兵龍 (Bing-Long Chen) 和 Gang Liu 等幾何學家都做出了重要貢獻。假設流形的體積增長達到最大可能, Gang Liu 根據許多已經發展的結果, 解決了這個猜想。對於曲率為負的流形, 實際上沒有任何進展, 因為我們沒有辦法構建有界全純函數。

Kunihiko Kodaria
(1915～1997)

我對單值化問題感興趣的原因是基於幾何分析的基本哲學：*幾何結構取決於由自身構造出的一些方程式的解*。因此, 這種解的存在和參數化, 對於了解基礎幾何結構起著重要的作用。

與黎曼幾何的情況相似, 重要的是藉由拼接局部解來構建大域解。這種建構的可能性, 通常藉由一些障礙群 (obstruction groups) 來描述。使用基礎幾何結構所具有的曲率使障礙群消失, 通常與 Bochner 和 Kodaira 提出的消沒定理 (vanishing theorem) 的概念相關。

但是, Bochner-Kodaira 的消沒定理與平方可積解所在的 Hilbert 空間更相關。曲率為負的 Kähler 流形之所以難於了解, 在於從中難以藉由這些解構造有界解。目前較高維度之單值化工作大部分依賴 Hamilton 的 Kähler-Ricci 流。遺憾的是, 除了黎曼曲面之外, Kähler-Ricci 流不能很好地處理曲率為負的度量。

在上述的單值化方案中, 我使用了截面曲率的概念。在許多情況下, 代數幾何會出現一個平行的「正」或「負」的概念。例如, Mori 能夠在代數幾何範疇證明 Frenkel 推測; 在代數幾何中, 他用代數幾何學意義下的「正」切叢 (positivity of tangent bundle) 觀念來代替「正」曲率 (這被稱爲 Hartshore 猜想) 。

Shigefumi Mori
(1951∼)

「負」雙截面曲率應由「負」切叢取代。但是「雙截面曲率爲負」似乎比「切叢爲負」來得強。Bun Wong 做出例子, 其中很多單連通的代數流形具有負切叢。但迄今我們沒有任何例子是單連通、具負雙截面曲率的流形。

不難將這些問題推廣, 以「非負」取代「正」, 並用「Hermitian 空間」取代「流形」。一種門路是利用 Hamilton 關於 Ricci 流的工作。

Richard Hamilton (1943∼)

1971年, 在我考慮用截面曲率處理複流形的單值化的同時, 也有興趣用 Ricci 曲率代替截面曲率。這是令人著迷的, 因爲代數流形的種類更豐富, 潛在而最有趣的代數流形可以由它們構建出來。

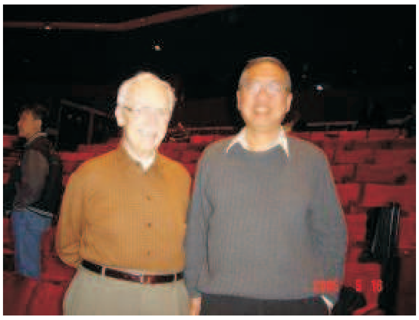
當時我學了廣義相對論, 對廣義相對論中 Ricci 曲率的意義印象深刻; 對於賴以建模的宇宙, Ricci 曲率可以根據愛因斯坦方程提供物質張量。而微分幾何學家已長期研究黎曼 (有曲率的) 環境中的愛因斯坦方程; 基於同樣神秘的原因, 黎曼環境中的愛因斯坦方程, 似乎比 Lorentz 環境提供更多平滑解。自然地, 我們也有三個重要的情況, 取決於純量曲率的符號。

尋找 Ricci 曲率爲零的緊緻流形的結構, 讓我非常著迷。我是研究生時, 唯一已知例子的曲率張量爲零。我決心找到不涵蓋於歐氏空間的不尋常 (non-trivial) 例子。我們試圖構建這樣的例子, 最引人注目的空間是 K3 曲面。

有很長一段時間, 我們很想知道 K3 曲面是否允許任何 Ricci 曲率爲零的黎曼度量, 而這只是下述問題的特殊情況：哪個 Kähler 流形容許 Kähler-Einstein 度量? K3 曲面非常特別, 因爲 Hitchin 觀察到, K3 上純量曲率非負的度量必定是 Ricci 平坦及 Kähler。

1982 與 Atiyah (1929∼), Hitchin (1946∼) 在 Durham

K3 曲面是很好的測試流形, 可用以回答 Calabi 猜想：在任何 Kähler 類裡, Kähler 流形上的任何體積形式 (volume form), 是否可以是某 Kähler 度量的體積形式 (的常數倍)? 這可以轉化成複 (complex) Monge- Ampère 方程的求解問題, 而這個方程可回溯至 Kähler。以 Ricci 曲率描述的代數流形單值化理論令人著迷, 因爲它們可被轉化爲某非線性 Monge-Ampère 方程的求解問題。



與 Calabi (1923∼)

Kähler (1906∼2000)

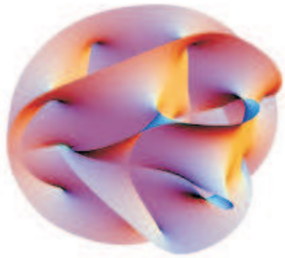
實際上, Calabi 的一部分觀察, 是 Kähler 在第一篇關於 Kähler 幾何的著作 (1932 年) 中做出的, 在其中 Kähler 描述了 Kähler-Einstein 度量如何可能滿足複 Monge-Ampère 方程。實際上, Kähler 注意到：Ricci 張量定義了一個閉合的$(1,1)$ 形式 (closed (1,1)-form); 它是不變量, 取決於流形的複結構。這就是流形的第一陳氏類 (first Chern class)。Kähler-Einstein 度量的存在意味著：第一陳氏類必須與 Kähler 類成正比。這爲 Kähler-Einstein 度量的存在提供了一個重要的可積條件。

我在 1970 年冬天看到這個問題, 當時沒有人認爲這可能是對的, 幾乎沒有幾何學家清楚知道如何在流形上證明存在定理。大多數幾何學家都試圖給出 Calabi 猜想的反例, 因爲認爲它太好了以致不像是對的。

上述 Calabi 猜想意味著, 對於第一陳氏類爲零的緊緻 Kähler 流形, 在每個 Kähler 類中恰存在一個 Ricci 曲率爲零的 Kähler 度量。

Calabi 的問題讓我感到非常興奮, 不僅是因它符合我將單值化理論推廣到高維度 Kähler 流形的強烈企圖心, 也源於我對廣義相對論裡愛因斯坦方程某個現象的極大興趣: *重力必定是由流形的拓樸結構所造成, 而未必源自物質分布。*

後來, Candelas、Horowitz、Strominger 和 Witten 將 Ricci 曲率爲零的 Kähler 流形命名爲 Calabi-Yau 流形。



Calabi-Yau Manifold

最簡單的 Calabi-Yau 流形是橢圓曲線、abelian 多樣體 (varieties) 和 K3 曲面。數論學者和代數幾何學家已長期研究這些流形。Calabi-Yau 流形是這些流形的自然推廣。之後, 弦理論的發展, 大大豐富了 Calabi-Yau 流形的整個課題, 是運用古典手法無法預料到的。

Francesco Severi
(1879～1961)

但在 Calabi-Yau 流形得到物理學家的關注之前, 我已經能夠利用 Kähler-Einstein 流形的性質來解決代數幾何中的幾個重要問題。一個非常重要的成果就是證明 Severi 猜測: 在投影平面 (projective plane) 上只有一個複結構。

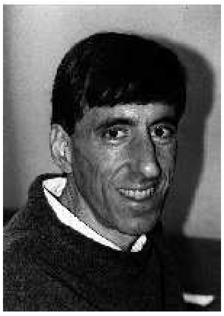
我差不多花了六年解決 Calabi 猜想 (在我相信它是正確的之後)。爲了解決這個問題, 我花了三年時間準備技術性的估計。鄭紹遠和我發展了流形上的非線性分析。我們把重點放在與實 (real) Minkowski 問題及仿射幾何 (affine geometry) 相關的實 (real) Monge-Ampère 方程。

我相信這是一個轉捩點, 幾何分析開始受到數學界關注。在非常短的時間內, 藉由非線性偏微分方程, 解決了幾何中的幾個重要問題; 它們應該被視爲幾何分析的主要發展。

顯著的進展是 Sacks-Uhlenbeck 關於最小二維球 (minimal two-spheres) 存在性的工作, Schoen-Yau 的正質量猜想的證明, Meeks-Yau 對 Dehn's Lemma 的幾何版本的證明, Siu-Yau 對 Frenkel 猜想的證明, 及 Richard Hamilton 對 Ricci 流令人讚歎的工作。所有這些工作基本上都在 1970 年代完成。

1980 年代, 由於 Uhlenbeck, Taubes 和 Donaldson 的工作, 規範場論 (gauge theory) 在一般流形上的基本特性引起了關注。Donaldson-Uhlenbeck-Yau 證明了 Hermitian Yang-Mills connection 在斜率穩定的 (slope-stable) 全純叢的的存在性。Donaldson 使用反自對偶 (anti-self-dual) connections 的模空間, 爲四維流形建立新的拓樸不變量。

Uhlenbeck (1942∼)



Taubes (1954∼)

Donaldson (1957∼)

在 1980 和 1990 年代, 當然有更多幾何分析方面的活動, 特別是那些由物理和應用數學的想法啟發的工作。一個顯著的發展是 Witten 在 Morse 理論的工作, 激發了 Floer, Fukaya 等人的工作。而 Seiberg-Witten 的工作已成爲幾何和拓樸非常有威力的工具; 這工作部分奠基於 Cliff Taubes 關於僞全純曲線 (psudo-holomorphic curves) 的存在性結果。

流形的單值化理論一如既往令人興奮。如果我們不假設度量爲 Kähler, 則存在性理論變得困難, 因爲我們須處理非線性偏微分方程組。愛因斯坦度量的大多數存在定理, 或者可簡化爲 Kähler 幾何, 或者利用對稱約化 (symmetry reduction), 或者結合這兩種想法。而 Cliff Taubes 和 Dominic Joyce 使用奇異擾動 (singular perturbation) 來構造有趣的度量。

但是, 大多數以這種方式構建的愛因斯坦度量, 具有非負純量曲率。長期以來, 不清楚是否有拓樸障礙, 使 Ricci 曲率爲負的度量存在, 直到 Zhiyong Gao 和我在三維球體上構造 Ricci 曲率爲負的度量。一下子, 我們可以大量構造這些流形, 因此我們認爲我們已經對負 Ricci 曲率流形有根本的瞭解, 同時我認爲維數大過 2 的任何流形都應該有 Ricci 曲率爲負的度量。後面這個命題由 Lochkamp 證明了。

雖然有許多不同的曲率弱於 Ricci 曲率, 但純量曲率是其中最重要的。兩個最重要的研究方向是：

- Yamabe 和 Trudinger 提出的 Yamabe 問題, 已由 Aubin 和 Schoen 解決。
- 正純量曲率流形的分類很重要, 但不完整。

這些與正質量猜想有關, 依賴兩個重要工具：

- Lromnerowicz 以旋量 (spinor) 做論證, Gromov-Lawson 延續之。
- 另一個是 Schoen-Yau 奠基於穩定最小曲面的論證。

另外, 基於 $SU(2)$ 群作用, Lawson-Yau 構建了純量曲率爲正的度量。

1978年, 在解決正質量猜測的過程中, Schoen-Yau 觀察到：純量曲率爲正的兩個流形的

連通和 (connected sum), 仍然允許純量曲率為正的度量。緊接著, Schoen-Yau 發現, 在一個曲率為正的流形中, 對餘維 (codimension) 為 3 的子流形進行手術 (surgery) 後, 仍然允許如此的度量。

隨後, Gromov-Lawson 聲稱同樣的結果; 而 Stephan Stolz 觀察到, 在許多情況下, 基於手術的拓樸結果, 對正純量曲率流形的分類大有助益。純量曲率為正的度量與廣義相對論之初始數據集合密切相關。這關係是 Schoen-Yau 因解決 Jiang 方程而找到的。初始數據集的完整參數化, 對於理解愛因斯坦方程的相位空間, 將是非常重要的。

Robert Bartnik 邁出非常重要的一步, 但是仍然有很多等待進行的工作。AdS / CFT (亦即 anti-de-Sitter /conformal field theories) 的理論中也出現了純量曲率為正的度量。我與 Witten 的論文中解釋了這類度量的重要性, 是在漸近雙曲型的愛因斯坦流形之共形邊界 (conformal boundary) 討論。這方向的大部分理論仍有待建構。

我簡要概述了 : 一部分的幾何分析, 在發展過程中, 如何與幾何、非線性偏微分方程及數學物理互動。我個人的經驗是, 這是一個極具深度的優美主題, 幾乎涉及數學的所有分支。

—演講者丘成桐為哈佛大學講座教授—

2018 International Workshop on Hyperbolic and Kinetic Problems: Theory and Applications

日　　期 : 2018 年 7 月 10 日 (星期二) ∼ 2018 年 7 月 14 日 (星期六)

地　　點 : 台北市大安區羅斯福路四段1號　天文數學館 6 樓

詳　　見 : http://www.math.sinica.edu.tw/www/file_upload/conference/201807-HKP/index.html