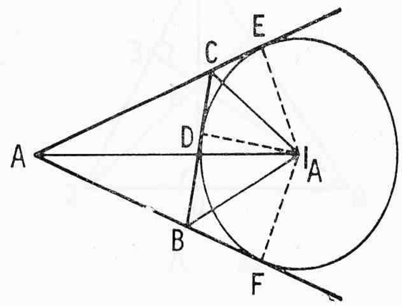
$b=\overline{CA}$, $c=\overline{AB}$。

證明:



圖十

如圖十所示:

$$\because\ \overline{DI_A}=\overline{EI_A}=\overline{FI_A}$$

$$\therefore\ a\triangle BCI_A : a\triangle CAI_A : a\triangle ABI_A$$

$$=(\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{DI_A}):(\frac{1}{2}\overline{CA}\cdot\overline{EI_A}):(\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{FI_A})$$

$$=\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}=a:b:c$$

由例 1 知 $(-a)\overrightarrow{AI_A}+b\overrightarrow{BI_A}+c\overrightarrow{CI_A}=\overrightarrow{O}$

上高中時，老師講到定理 6，在證明時未用定理 3，一時間，我有些沮喪。想想自己學了定理 3，卻無法派上用場，也實在是很枉然的。現在，經過自己的探討之後，所得到的結論，也令我驚嘆不已！不僅得到了定理 6 的簡捷證明，而且也得到了定理的一個甚佳的證明方法。

——本文作者現就讀師範大學數學系

π 値的餘弦求法

洪信安

對於 π 的歷史，可以追溯到西元前兩千年，那時巴比倫人所知道的 π 是，3 又1/8 而埃及人則把 $4\times(8/9)^2$ 當作 π，直到無限的觀念萌芽生根之後，才有 $m\to\infty$，則

$$\pi=2^m\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{}$$

(共 m 個平方根)

的極精密的 π 值出現，而尤拉 (Euler) 更發現

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots,$$

至於

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots,$$

也是他發現的，此外尚有

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\cdots$$

等不同的求法，本文則以淺近的觀念介紹另一種 π 的求法。令單位圓之內接正 2^n 邊形周長 S_n，則

$$S_n=2^n\times2\times1\times\sin\frac{360°}{2\times2^n}=2^{n+1}\sin\frac{180°}{2^n}$$

當 $n\to\infty$，則圓周長 $S=S_n$，故

$$\pi=\frac{S}{\text{直徑}}=\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{180°}{2^n}$$

但

$$2^n\sin\frac{180°}{2^n}=2^n\left(\frac{\sin\frac{180°}{2^{n-1}}}{2\cos\frac{180°}{2^n}}\right)$$

$$=\frac{2^{n-1}\sin\frac{180°}{2^{n-1}}}{\cos\frac{180°}{2^n}}$$

$$=\frac{2^{n-2}\sin\frac{180°}{2^{n-2}}}{\cos\frac{180°}{2^{n-1}}\cos\frac{180°}{2^n}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{2^{n-k}\sin\frac{180°}{2^{n-k}}}{\cos\frac{180°}{2^{n-k+1}}\cos\frac{180°}{2^{n-k+2}}\cdots\cos\frac{180°}{2^n}}$$

(但 n, $k\in N$, $n>1$

故得

$$\pi=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2\sin\frac{180°}{2}}{\cos\frac{180°}{2^2}\cos\frac{180°}{2^3}\cos\frac{180°}{2^4}\times\cdots\times\cos\frac{180°}{2^n}}$$

$$=\frac{2}{\cos\frac{180°}{2^2}\cos\frac{180°}{2^3}\cos\frac{180°}{2^4}\times\cdots}$$

——本文作者為高雄中學高二學生