疊圜問題

施養進

I. 疊圓圜的遊戲

有一種古老而富趣味性的玩具：7個不同直徑的圓圜按大小順序套在一木棍上，最大的圜在最底層，形成一圓錐體（如圖1）。我們希望把這些圓圜全部移到第③號木棍上（仍成一圓錐體），一次僅能移動一個圜，有②號木棍可爲補助之用；但在移動過程中，不得將大圜置於小圜上。

試問：**最少要移動幾次才能完成？**

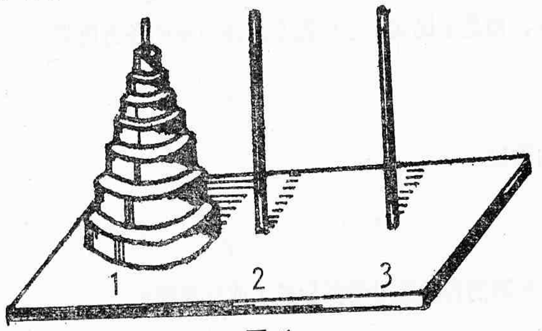


圖-1

答案是127次。如果我們拿七個圜一個一個地移來移去，恐怕很容易搞得糊里糊塗，而且也不知道是否有更快的移法，所以應先把問題簡化：

(1)只有一個圜時，當然1次就完成。

(2)2個圜時，先把小圜移至②號棍，將大圜移至③號棍，再將小圜置於大圜上——3次完成。

(3)3個圜時，將圜1 ⟶（移至）③號棍……1
圜2 ⟶②棍……………………2
圜1 ⟶②棍……………………3
圜3 ⟶③棍……………………4
圜1 ⟶①棍……………………5
圜2 ⟶③棍……………………6
圜1 ⟶③棍……………………7

（7次完成如圖2）

由上可發現：前3步驟即把1，2兩圜移至②棍，步驟4把圜3移至第③棍，末3步驟再將1，2圜移至③棍上：

$3+1+3=7$（移動2個圜須3次）

(4)同理，4個圜時，先把上面3個移至②棍（移法同(3)，只是把②棍當③棍，③棍當②棍）〔註1°〕將第4圜移至③棍，再將②棍上的3個圜依次移至③棍：

$7+1+7=15$

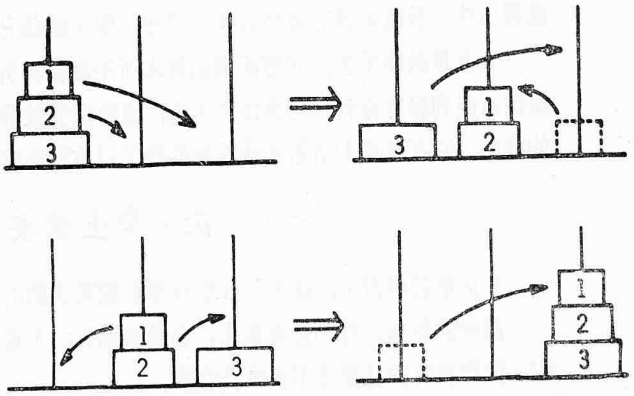


圖-2

(5)設 n 表示圜數，a_n 表 n 個圜疊完所須移動次數

則 $a_1=1$

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1}+1 \\
&= 2[2a_{n-2}+1]+1 \\
&= 2^2a_{n-2}+2+1 \\
&= 2^3a_{n-3}+2^2+2+1 \\
&= 2^4a_{n-4}+2^3+2^2+2+1 \\
&\cdots\cdots \\
&= 2^{n-1}a_1+2^{n-2}+\cdots\cdots+2+1 \\
&= 2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots\cdots+2+1
\end{aligned}
$$

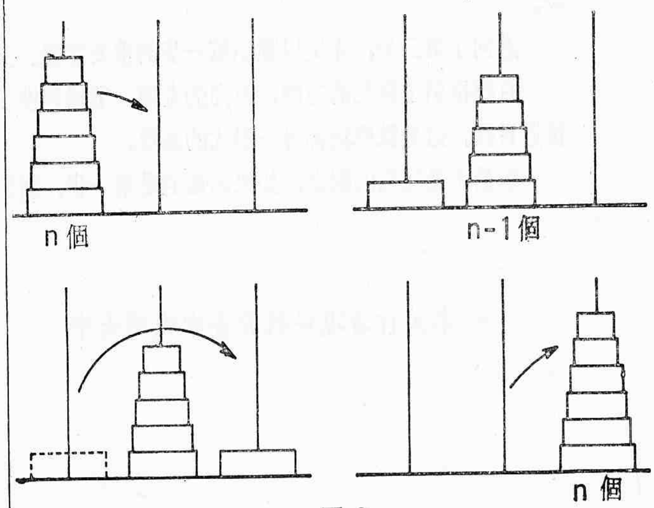


圖-3

〔註1°〕玩這種遊戲有一點需注意：當 n 爲奇數時，第一個圜要先「攻」③棍，若 n 爲偶數，則先攻②號棍，方爲正確。

$$=\frac{1(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

所以 7 個圓時，$a_7=2^7-1=127$（次）

II. 當棍子數增加時的情形

也許有人會想到，如果有 4 枝棍子，次數是否會少些？是否還有一簡潔的公式可求？ 5 枝、6 枝又如何？ 或許 k 枝棍子的情形亦可得知。如此一般化的過程甚爲複雜，且讓我們詳細討論之。

令 k 表棍數，$k=4$ （此時第②③棍爲輔助用）

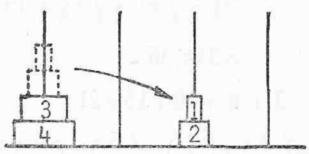
(1) $\left.\begin{array}{l} a_1=1 \\ a_2=3 \end{array}\right\}$ 均不必利用到③號棍，故與 $k=3$ 時相同。

(2) $n=3$ 時，若再按 $k=3$ 時之方法移圓，則未利用到③號棍，非最快的移法。

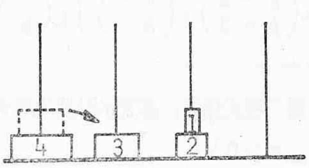
應將 圓 1 ⟶②棍
圓 2 ⟶③棍
圓 3 ⟶④棍
圓 2 ⟶④棍
圓 1 ⟶④棍 5 次完成

(3) $n=4$ 時

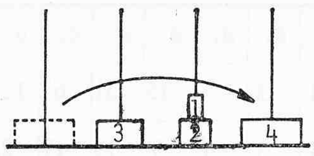
將 圓 1 ⟶②棍……1
圓 2 ⟶③棍……2
圓 1 ⟶③棍……3
圓 3 ⟶②棍……4
圓 4 ⟶④棍……5
圓 3 ⟶④棍……6
圓 1 ⟶②棍……7
圓 2 ⟶④棍……8
圓 1 ⟶④棍……9 9 次完成



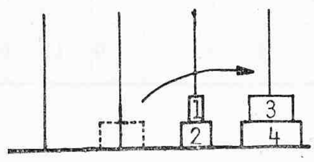
1~3



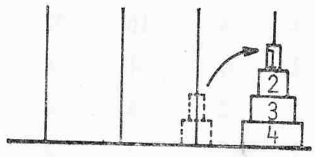
4



5



6



7~9

圖-4

其中 步驟

$\left\{\begin{array}{ll} 1\sim3 & \text{將圓 } 1,\ 2 \longrightarrow ③ \\ 4 & \text{圓 } 3 \longrightarrow ② \end{array}\right.$

5 圓 4 ⟶④

$\left\{\begin{array}{ll} 6 & \text{圓 } 3 \longrightarrow ④ \\ 7\sim9 & \text{圓 } 1,\ 2 \longrightarrow ④ \end{array}\right.$

與前面情形相同，只是把上面 3 個圓先分配套到二輔助棍上，待第 4 圓到④棍「臥底」後，再把前 3 個圓依次疊上即可。

(4) n 個圓時，亦是先把上面的 $n-1$ 個圓分配到二輔助棍上；至於如何分配，才能使移動次數儘量減少（例如 a_5 時取 2，2；a_7 取 3，3 等）分法十分麻煩而無一定之規律，故省略之。

III. 利用階差求疊圓次數公式

如此，我們可以確定：當有木棍 k 根，n 個圓圓時疊法須先將上面 $n-1$ 個圓分配到 $k-2$ 根輔助棍上，第 n 圓到第 k 棍臥底，再把前 $n-1$ 個圓移到 k 棍上。

(7) 今將 k 與 a_n 值關係列表如下：

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}
③	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023											
④	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49	65	81	97	113	129	161	193	225	257	289	321
⑤	1	3	5	7	11	15	19	23	27	31	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	127
⑥	1	3	5	7	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	57	65	73	81	89	97
⑦	1	3	5	7	9	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71

表-①

(2)由表中各行，可得許多不規則之數列，注事其階差:

	a_2-a_1	a_3-a_2	a_4-a_3	a_5-a_4	a_6-a_5	a_7-a_6	a_8-a_7	a_9-a_8	$a_{10}-a_9$	$a_{11}-a_{10}$	$a_{12}-a_{11}$	$a_{13}-a_{12}$	$a_{14}-a_{13}$			
③	2	4	8	16	32	64	128									
④	2	2	4	4	4	8	8	8	8	16	16	16	16	…		
⑤	2	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8	8	…	
⑥	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	8	

表-②

可見各數列之階差均爲 2 之乘冪數。

$k=4$ 時　階差爲 2 的有 2 個。$4(2^2)$ 有 3 個，$8(2^3)$ 有 4 個，$16(2^4)$ 有 5 個……

$k=5$ 時　階差爲 2 的有 3 個，$4(2^2)$ 有 6 個，$8(2^3)$ 有 10 個，$16(2^4)$ 有 15 個……

含2乘冪數之個數 \ k	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨……	k
2^1	1	2	3	4	5	6	7……	$\binom{k-2}{k-3}$
2^2	1	3	6	10	15	21		$\binom{k-1}{k-3}$
2^3	1	4	10	20	35			$\binom{k}{k-3}$
2^4	1	5	15	35				$\binom{k+1}{k-3}$
2^5	1	6	21					$\binom{k+2}{k-3}$
2^6	1	7						$\binom{k+3}{k-3}$
2^7	1	⋮						⋮

表-③

上面這個三角形似乎很眼熟，若每一行上頭各加一個 1，再順時針旋轉 45°，就成爲現在的巴斯噶三角形了。

(3)現在要求：有 k 根棍子，n 個圓圓，疊完所需的最少移動次數。

設爲 ${}^k a_n$

我們先取一個比 n 小（$\leq n-1$），而爲表③中，k 那一行前幾個數之和

如 ${}^5 a_{36}$ 則取

$$s=3+6+10+15$$
$$=\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}$$
$$=34<36 \qquad \text{〔註2°〕}$$

而

$$3+6+10+15+21$$
$$=\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}$$
$$=55>36$$

$$\therefore \quad s=\binom{k-2}{k-3}+\binom{k-1}{k-3}+\binom{k}{k-3}$$

〔註 2°〕$\binom{n}{m}$ 爲二項式係數，亦表示巴斯噶三角形中第 n 列第 m 項（$n\geq m\geq 0$）

$$\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

又 $\binom{0}{0}=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

$$+\cdots\cdots+\binom{m}{k-3}$$

$$=\sum_{i=k-2}^{m}\binom{i}{k-3}$$

且 $\quad s\leq n-1<s+\binom{m+1}{k-3}$

$$\left.\begin{array}{l}a_2-a_1\quad=2\\ a_3-a_2\quad=2\\ a_4-a_3\quad=2\end{array}\right\}\text{第一羣}\binom{k-2}{k-3}\text{個}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vdots\qquad 4\\ \vdots\qquad 4\end{array}\right\}\text{第二羣}\binom{k-1}{k-3}\text{個}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{s+1}-a_s\ =2^{m-k+3}\}\text{第 }(m-k+3)\text{ 羣}\binom{m}{k-3}\text{個}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l}a_{s+2}-a_{s+1}=2^{m-k+4}\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\\ a_n\ -a_{n-1}=2^{m-k+4}\end{array}\right\}\text{第 }(m-k+4)\text{ 羣 }(n-1-s)\text{ 個}$$

$$a_n-a_1=\binom{k-2}{k-3}2+\binom{k-1}{k-3}2^2+\cdots\cdots$$

$$+\binom{m}{k-3}2^{m-k+3}+(n-1-s)2^{m-k+4}$$

$$\therefore\ {}^ka_n=\sum_{i=k-2}^{m}\binom{i}{k-3}2^{i-k+3}+[n-1-\sum_{i=k-2}^{m}\binom{i}{k-3}]\cdot 2^{m-k+4}+1$$

其中 $\quad s=\sum_{i=k-2}^{m}\binom{i}{k-3},\quad s\leq n-1<s+\binom{m+1}{k-3}$

k, n 爲已知

或 $\quad n-1-\binom{m+1}{k-3}<s\leq n-1$

m 由前式得知。

(4) 而當 $k=3$ 時

$$s=\sum_{i=1}^{m}\binom{i}{0}=\sum_{i=1}^{m}1=m,\ n-1-\binom{m+1}{0}=n-2$$

$$n-2<m\leq n-1,\qquad m\in N\qquad\therefore\ m=n-1$$

$$\therefore\quad {}^3a_n=\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i}{0}2^i+[n-1-\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i}{0}]2^n+1$$

$$=2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}+0+1$$

$$=2^n-1$$

可見 $k=3$ 時之簡單公式僅爲此式之特殊情形之一。

(5) 例: ${}^6a_{19}=?$

〔解〕

$$18-\binom{m+1}{3}<\frac{4\cdot3\cdot2+5\cdot4\cdot3+\cdots+m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}\leq 18$$

$$\left.\begin{array}{lll}\text{右} & 4\cdot3\cdot2+5\cdot4\cdot3+\cdots\cdots & \\ & +m(m-1)(m-2)\leq108 & \Rightarrow m\leq5\\ \text{左} & 108<4\cdot3\cdot2+\cdots\cdots & \\ & +(m+1)\cdot m\cdot(m-1) & \Rightarrow m\geq5\end{array}\right\}m=5$$

$$\therefore\quad {}^6a_{19}=\sum_{i=4}^{5}\binom{i}{3}2^{i-3}+[19-1-\sum_{i=4}^{5}\binom{i}{3}]2^3+1$$

$$=\binom{4}{3}2+\binom{5}{3}2^2+[18-\binom{4}{3}-\binom{5}{3}]2^3+1$$

$$=8+40+32+1=81\qquad\text{(參閱表①)}$$

IV 另外有一種「九連環」的玩具，與這種疊圜玩具大概有親族關係。九連環的原理是移出前 $n-2$ 個環，才可移出第 n 個環。所以有奇數個環，須先解一個；有偶數個環，就先移 2 個出來。它的公式是

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{3}(2^{n+1}-1) & n\text{ 爲奇數}\\ \frac{1}{3}(2^{n+1}-2) & n\text{ 爲偶數}\end{cases}$$

讀者可以自證

——本文作者現就讀建國中學高二