高中生對「數學歸納法」的困惑

王湘君

一、前　言

高中數學教材第一册，數及其性質一章，介紹皮阿諾 Peano 有關自然數的五個公設，其中公設五：若 $S\subset N$，而且 S 是有下列兩個性質：(i) $1\in S$

(ii) $k\in S\Longrightarrow k+1\in S$

則 $S=N$。（稱爲數學歸納法原理）

並說可以利用這原理來證明有關自然數的命題。初學的人對這原理本身的意義，很難理解。同時，很疑惑爲什麼一個有關自然數的命題，滿足了公設五中的兩個條件，便足以證明對任何自然數，皆成立?

二、本　文

以下是我在課堂上的講解。

我們常會遇到一些有關自然數的命題，諸如：

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2,$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

等對所有的自然數皆成立。首先，我們不能用驗證法，一一去驗證它成立，因爲有無限多! 再說，我們也不能從幾個特別的成立，就下結論說一般的情形也成立。因爲，稍具數學常識的人都知道，凡是數學上的定理或公式，都是經過嚴格的邏輯證明的。而一般的結論才是有價值的。爲了證明上述的問題，我們必須想辦法! 我們先看下面的一個「比喩」。

現在這裡有一大羣孩童，排成一直線，並編好順序，做傳球的遊戲。這個遊戲有兩個規則：(i) 球首先在第一號人的手裡(ii) 規定任何一個拿到球的人，都會傳給後面一號的人。問這個遊戲的結果是什麼? 學生都同意這裡的每一個人都曾拿到球。我們來試着把這傳球的遊戲，改寫成數學能應用的語句。

若對每一自然數 n，有一敍述 E_n，且 E_n 具有下列二性質：

(i) E_1 爲眞

(ii) 設 E_k 爲眞，能推至 E_{k+1} 亦爲眞

則對每一自然數 n，E_n 均爲眞。

學生也能接受這種轉換，我們打算再把上面的敍述轉換成公設五的形式。

假設想證一個式子或一個性質 $E(n)$，對所有的自然數皆成立，就先設所有使 $E(n)$ 成立的自然數 n 所成的集合爲 S，對 S，首先，(i) 驗證 $1\in S$ 是否成立，(ii) 再證，在 $k\in S$ 的假設下，$k+1\in S$ 確實成立，那麼 $S=N$。當我們熟悉了這原理以後，我們可以不必每次都標明一個集合 S，可以直接先驗證 $E(1)$ 是否成立，若成立，再驗證 $E(k)\Longrightarrow E(k+1)$ 是否成立。我們舉幾個例子來說明這種證明方法。

例 1

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,\ \forall n\in N$$

證：①$n=1$ 時，左式$=1^3=1$，右式$=(12/2)^2=1$，故原式成立。

②設 $n=k$ 時，原式成立，卽

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

當 $n=k+1$ 時，

$$\begin{aligned}左式&=1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3\\&=(k+1)^2\left[\frac{k^2+4^4(k+1)}{4}\right]\\&=(k+1)^2\frac{(k+2)^2}{4}\\&=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2\end{aligned}$$

原式亦成立

故由數學歸納法知，原式對所有的自然數皆成立。

有關自然數 n 的不等式，亦可用數學歸納法證明之。以下我們講幾個有關 n 的不等式的例子。

例 2：

$$p>-1,\forall n\in N\Longrightarrow(1+p)^n\geq 1+np$$

證：①$n=1$ 時，左式$=(1+p)^1$，右式$=1+p$，故原式成立。

②設$n=k$時，原式成立，即 $(1+p)^k\geq 1+kp$

當$n=k+1$時，

$$(1+p)^{k+1}=(1+p)^k(1+p)$$
$$\geq(1+kp)(1+p)=1+(k+1)p+kp^2$$
$$\geq 1+(k+1)p\,(\because\ kp^2\geq 0)$$

故$h=k+1$時，原式亦成立。

由數學歸納法知，原式對所有的自然數皆成立。

例 3:

$$a,b>0,\forall n\in N\Longrightarrow\frac{a^n+b^n}{2}\geq\frac{(a+b)^n}{2}$$

證: ①$n=1$時，左式$=\dfrac{a+b}{2}$，右式$=\dfrac{(a+b)}{2}$

②設$n=k$時，原式成立，即

$$\frac{(a^k+b^k)}{2}\geq\frac{(a+b)^k}{2}$$

當$n=k+1$時，

$$\text{右式}=\left[\frac{(a+b)}{2}\right]^{k+1}=\left[\frac{(a+b)}{2}\right]^k\cdot\frac{(a+b)}{2}$$
$$\leq\frac{(a^k+b^k)}{2}\cdot\frac{(a+b)}{2}$$

欲證

$$\frac{(a^k+b^k)}{2}\cdot\frac{(a+b)}{2}\leq\frac{(a^{k+1}+b^{k+1})}{2}$$

採用相減法:

$$\frac{(a^k+b^k)}{2}\cdot\frac{(a+b)}{2}-\frac{(a^{k+1}+b^{k+1})}{2}$$
$$=\frac{(-a^{k+1}-b^{k+1}+ab^k+a^kb)}{4}=\frac{[a^k(b-a)+b^k(a-b)]}{4}$$
$$=\frac{(a-b)(b^k-a^k)}{4}\leq 0$$

因爲 (i) 當$a\geq b$，$a^k\geq b^k$ (ii) 當$a<b$，$a^k<b^k$

故$n=k+1$時，原式亦成立。

由數學歸納法原理知，原式對所有的自然數皆成立。

與自然數有關的命題，有時並非對一切自然數皆成立，而爲大於某一特定數的一切自然數，此時仍可用數學歸納法。形式如下:

$\forall n\in N$，$n\geq k$，有一敍述 $p(n)$，滿足下列二條件:

① $p(k)$ 爲眞 ② $p(m)$ 爲眞$\Longrightarrow p(m+1)$ 爲眞，$m\geq k$

則 $\forall n\geq k$，$p(n)$ 恆爲眞。

例 4:

試證 $n^{n+1}>(n+1)^n,\forall n\geq 3,n\in N$

證: ①$n=3$時，左式$=3^4=81$，右式$=4^3=64$，故原式成立。

②設$n=k$時$(k\geq 3)$原式成立，即$k^{k+1}>(k+1)^k$ (A)

當$n=k+1$時，欲證 $(k+1)^{k+2}>(k+2)^{k+1}$ (B)

由(A)式不易證得(B)式，現把(A)變形爲

$$k>\left(\frac{k+1}{k}\right)^k \qquad (A')$$

把(B)式變形爲

$$k+1>\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} \qquad (B')$$

觀察比較 (A'), (B') 兩式，試着把 (A') 兩邊乘以$(k+1)$，得

$$(k+1)\cdot k>\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\cdot(k+1)\Longrightarrow$$
$$k+1>\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}>\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}$$
$$\left(\because\ \frac{k+1}{k}>\frac{k+2}{k+1}\right)\Longrightarrow(k+1)^{k+2}>(k+2)^{k+1}$$

故$n=k+1$時，原式成立。

由數學歸納法知，原式對大於或等於3之一切自然數，皆成立。

◎數學歸納法，還有其他的形式，用來對付比較棘手的問題。（第一歸納法不能解決的問題。）其他的形式如下:

$\forall n\in N$，有一敍述 $p(n)$，若能滿足下列二條件。

①$p(1),p(2)$ 爲眞。

②設 $p(k),p(k+1)$爲眞，可導致 $p(k+2)$ 爲眞。

則 $p(n)$ 對所有的自然數皆爲眞。

例 5:

$$\forall n\in N\Longrightarrow\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}\in N$$

證: 爲了敍述簡潔，必須做一個形式變換。

令 $\begin{cases}1+\sqrt{5}=x\\1-\sqrt{5}=y\end{cases}\Longrightarrow x+y=2,xy=-4$

則原命題變爲，試證

$$\frac{x^n-y^n}{2^n\sqrt{5}}\in N,\ \forall n\in N$$

①$n=1$時，

$$\frac{x-y}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=1\in N$$

$n=2$時，

$$\frac{x^2-y^2}{2^2\sqrt{5}}=\frac{(x-y)(x+y)}{2^2\sqrt{5}}=\frac{2\cdot(2\sqrt{5})}{2^2\sqrt{5}}=1\in N$$

（必須驗證$n=1$，$n=2$時皆成立，因爲兩個成立，才能導致第3個成立）

②設$n=k$，$k+1$時成立，即

$$\frac{x^k-y^k}{2^k\sqrt{5}}\in N$$

且

$$\frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{2^{k+1}\sqrt{5}}\in N$$

當 $n=k+2$ 時,

$$\frac{x^{k+2}-y^{k+2}}{2^{k+2}\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(x^{k+1}-y^{k+1})(x+y)+xy^{k+1}-x^{k+1}y}{2^{k+2}\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2\cdot(x^{k+1}-y^{k+1})}{2^{k+2}\sqrt{5}}+\frac{xy(y^k-x^k)}{2^{k+2}\sqrt{5}}$$

$$=\frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{2^{k+1}\sqrt{5}}+\frac{4(x^k-y^k)}{2^{k+2}\sqrt{5}}\in N \quad \text{原命題成立}$$

故由數學歸納法知，原式對所有的自然數皆成立。

數學歸納法尚有另一種「變形」

$\forall n\in N$，有一敍述 $p(n)$，若能滿足下列二條件:

①$p(1)$ 爲眞

②設$p(1),p(2),\cdots,p(k)$皆眞，則可導致 $p(k+1)$ 爲眞

則 $p(n)$ 對所有的自然數皆爲眞。

例 6: 試證自然數的整序性: $S\subset N, S\neq\phi$，則 S 有最小元素。

證:

①若 $1\in S$，∵ 1 是自然數系中最小的，故 1 爲 S 中最小的元素。

②設 $p\in S$，$p\leq k$，S 皆有最小的元素。若 $k+1\in S$，則有下列兩種可能情形:

(i) $k+1$ 就是 S 中最小的元素。

(ii) $k+1$ 不是 S 中最小的元素，則 S 含有小於 $k+1$ 的元素 p 此時 $p\leq k$，由假設中知道，S 有最小的元素。

由數學歸納法可得證。

——本文作者任教於師大附中