如何準備大專聯考（一）

王 秋 夫

聯考制度實施有年，數學考題題型計有下列演變。⑴從民國 39 年至 55 年，差不多採用十題計算證明題之方式。在此一階段中，學生對於數學之根基若不很好，很難拿分。⑵從民國 56 年到民國 61 年，這一階段中，(56)年首先採用選擇題(五選一)之型態，造成學生對數學投機心理之開始，各種考場投機和拿分之技巧也應運而生，聯招會不得不對全部寫同一答案者，視爲零分計算，這一階段中由於出題教授，未能及時察覺，以致很多題目，皆可用代值法，代答法，分類勘誤法或正確的作圖，卽可做出，補習班之名師，卽以此些花招，大獲其利，數學教育差點因此導致破產，所幸此階段中還保留兩題計算或證明題，爲數學教育留一點元氣。⑶從民國 62 年到 66 年，由於教材的再度改革，黃武雄教授及「中央研究院數學研究所」及「臺大數學系」之一部分教授，親自到彰化中學試敎和全省各高中巡廻演講，使數學界又恢復了一點生氣，黃武雄教授所極力提倡之整體總合教學和題組式之試題，在此一階段之命題中，佔了很大之份量，惜國內各中學敎師在升學壓力相當沈重下，無法發揮此項觀點，而學生在短短地幾十分鐘裏，無論程度高低與否，無法適應此種冗長而又未敎過之題組式之考題，造成亂猜反而比做更有效之事實，很多成績很好之學生因而喪失信心，使學生研讀數學之興趣大大地減低。雖然在民國 62 年首度出現多重選擇題及倒扣， 但此舉只使學生分數相對的降低， 中上程度之同學， 有時得分反不如靠着第六感或他法亂猜者，因此在此階段中，放棄數學之呼聲最高，不僅乙丁組之大部分同學放棄讀數學，就連甲丙組同學亦有漸漸放棄數學之想法。⑷從民國 66 年至 68 年，在這一階段中由於民國(66)年夜間部聯招出了一份較易被老師和同學們接受之考題和題型，使得(67)年考題在形式上有了劃時代之改變，雖然那年因爲放棄數學的人太多，而無法使得分相對的提高，然而總算使今後命題之敎授有一新的方向可循，試題一方面可顧及到深淺適中，和防止亂猜；一方面又具題組型試題之優點，強調每一題目都必須動手算才能得分。相信此舉可促使數學敎學趨向正常，並使學生不再有放棄數學之心理。

然而，我認爲多年來之命題有一共同之缺憾就是⑴內容無法涵蓋整個高中三年之課程，出題重點常偏重某幾册上，容易造成投機和敎學之困擾。⑵乙丁組的試題常超出課程標準之範圍，深度上與甲丙組不相上下，似乎值得改進。⑶若不考定理和其證明之過程，很可能使正常敎學受到困擾，影響以後學生深造之基礎能力。

由於(67)(68)年在考題內容上有很大之改變，因此傳統之代值法，代答法和分類勘誤法等等已無法適用，聯考所強調的就是用最簡單，最土的方法，動手算去解題，本文想就歷屆聯考出題之動向，分類整理和分析，提供給各位先進出題或敎學和同學們進修之參考。

1. 要注意各重要定理及性質之研習

有許多人認爲電腦閱卷不會考定理，故老師們在敎定理時，同學們大都不太想去注意聽講，這個現象到高三更甚，殊不知這是項嚴重之錯失，聯考並不是沒有考過定義，定理之例子。

例 1: 令 g 爲正切函數tan，又令 f 爲 arctan（卽$\tan^{-1}$），f 之定義域爲實數軸，值域爲 $(-\pi/2,\pi/2)=\{x|-\pi/2<x<\pi/2\}$，則(A) g 的定義域是 $\{\theta|\theta\doteqdot(\pi/2$ 之奇數倍$)\}$(B) g 的反函數是cot(C) g 是個「一

對一，映成」函數(D) f 是個「一對一，映成」函數(E) fg 是恒同函數，即 $f(g(x))=x$（x 非 $\pi/2$ 的奇數倍）（62年甲乙丙丁）

解答：(A),(D)

例 2：設 E 表坐標平面，$\boldsymbol{R}$ 表全部實數所成之集合，若 P_1, P_2 爲 E 上任意兩點，其坐標分別爲 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，又令 $f(p_1, p_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，則(A) f 爲由 $E\times E$ 映至 $\boldsymbol{R}$ 的函數(B) f 之值域爲之 $\boldsymbol{R}$ 部分集合(C) f 爲由 E 映至 $\boldsymbol{R}^+$ 之函數，此處 $\boldsymbol{R}^+=\{x|x\in\boldsymbol{R},\ x>0\}$ (D) f 爲多項函數。（59年夜甲丙）

解答：(A),(B)

例 3：下列命題對質數 p 爲僞：

(A) p 可除盡 p 和任意正整數的最小公倍數(B)有二數 m，n，均不能被 p 除盡，但其積 mn 卻可被 p 除盡(C)若 p 不能除盡整數 c，則必有整數 a，b，使 $ap+bc=1$ (D)若 q 爲小於 p 之正整數，則 p 必能整除 $c\,(p, q)$(E) p 和任意整數之最大公因（約）數或爲 1，或爲 p（57年甲丙）

解答：(B)

例 4：有下列三命題：

(A)若 a，b 均爲有理數，則 $a+b$ 亦爲有理數。

(B)若 a，b 均爲無理數，則 $a+b$ 亦爲無理數。

(C)若 a 爲有理數，b 爲無理數，則 $a+b$ 爲無理數。

判斷各命題之眞僞：　A 爲□，B 爲□，C 爲□（60年甲乙丙丁）

解答：(A),(C)爲眞，(B)爲僞

例 5：設二分式（均不爲零）的和不爲零，則(A)二分式之和必爲一眞分式(B)二假分式之和必爲一假分式(C)二眞分式之和必爲一眞分式(D)眞假二分式之和必爲一眞分式（58夜甲丙）

解答：(C)

例 6：設 a，b，$c\in\boldsymbol{R}$，$a\neq 0$，命 $f(x)=ax^2+bx+c$，其判別式 $D=b^2-4ac$，則對所有實數 x，$f(x)>0$ 之充要條件爲(A) $a>0$，$D<0$ (B) $a>0$，$D=0$ (C) $a>0$，$D>0$ (D) $a<0$，$D<0$ (E) $a<0$，$D>0$（59年甲乙丙丁）

解答：(A)

例 7：設 C_2 爲一切 2 階方陣所成之集合，（各方陣之元均爲複數），而 $\underline{0}$ 爲 2 階零方陣，下列敍述何者爲眞？(A)若 $A, B\in C_2$，且 A, B 有乘法反元素 A^{-1}, B^{-1}，則 AB 必有乘法反元素爲 $B^{-1}A^{-1}$ (B)若 A，$B\in C_2$ 則 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$(C) 若 $A, B\in C_2$，而 A, B 之轉置方陣爲 A^*, B^*，則 AB 之轉置方陣爲 A^*B^*，(D)若 $A\in C_2$ 則方程式 $X^2-A=\underline{0}$ 在 C_2 中至多有二個根(E)若 $A, B\in C_2$，且 $AB=\underline{0}$，則 $A=\underline{0}$ 或 $B=\underline{0}$（58臺大夜）

解答：(A)

基於以上之考題差不多是簡單之定義和定理之命題，因此同學們可按照下面的示範，自行把高中三年中較重要的定理，模擬命題。

例 1: 設隨機變數X,Y互相獨立，在證明$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$之過程中不須用到下列何性質？(A)$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)(B)E(cX)=cE(X)(C)E(XY)=E(X)E(Y)$, X,Y互相獨立(D)$Var(X)=E((X-E(X)))^2(E)Var(cX)=c^2(X)$

解答 1. 選(E)

2. $Var(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2=E(X^2)+E(2XY)+E(Y^2)-[E(X)+E(Y)]^2$

$=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-[E(X)]^2-2E(X)E(Y)-[E(Y)]^2$

$=[E(X^2)-(E(X))^2]+[E(Y^2)-(E(Y))^2]$

$=Var(X)+Var(Y)$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$E(cX)=cE(X)$

$\because$ X,Y互相線性獨立

$\therefore$ $E(XY)=E(X)E(Y)$

2. 要注意定理和公式之活用

聯考很多考題都是鑽定理和公式之漏洞，甚至要幾個公式和定理融合應用才能解出，故對重要而常用之定理和公式，一定要確實了解，融會貫通才可。

例 1: 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{vmatrix}$$

=(A) 0 (B)48(C)-48(D)288(E)-288 (66 年甲乙丙丁)

解答: 1. 選(D)

分析: 1. 此題爲 Vandermonde 行列式之應用

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\cdots\cdots 1 \\ x_1 & x_2 & x_3\cdots\cdots x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\cdots x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1}\cdots x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i,j=1}^{n}(x_j-x_i) \text{（其中} 1\leq i<j\leq n\text{）}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})$$

2. 但是此題乍看之下，不是 Vandermonde 行列式，必須先提出公因子，並注意轉置行列式的值與原行列式的值相等。若是僅對 Vandermonde 行列式有模糊印象，就胡亂代入，即有可能的錯誤發生。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{vmatrix}$$

$$=(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot1=12$$

3. 以公式表示上述關係，即

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

$$=abcd\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

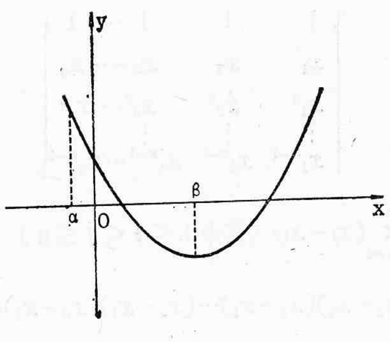
$$=abcd(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

例 2: 設 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a, b, c\in \boldsymbol{R}$ 且 $a>0$，又 $[\alpha, \beta]$ 爲實數軸上之一有限閉區間，則(A) f 在 $[\alpha, \beta]$ 上有最小值(B) f 在 $[\alpha, \beta]$ 上有最大值(C) f 在 $[\alpha, \beta]$ 上有最小值，而且其最小值爲 $f(\alpha)$ 或 $f(\beta)$ (D) f 在 $[\alpha, \beta]$ 上有最大值，而且其最大值是 $f(\alpha)$ 或 $f(\beta)$ (E) f 在整個實數軸上有一最大值（66 年甲乙丙丁）

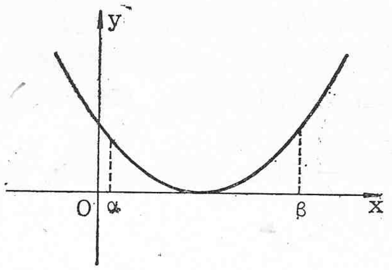
解答: 1 選(A), (B), (D)

分析: 1. 一般研習二次曲線 $f(x)=ax^2+bx+c$，$a>0$，a，b，$c\in \boldsymbol{R}$ 之圖形時，大都只注意

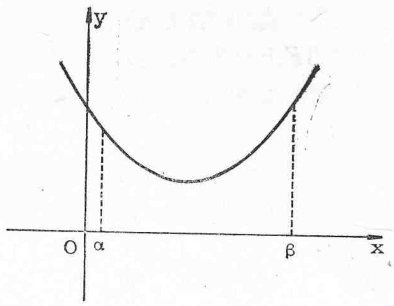
(1) $a>0$，$b^2-4ac>0$



(2) $a>0\,,b^2-4ac=0$



(3) $a>0\,,b^2-4ac<0$



很少注意連續函數在閉區間內必有最大、最小值，且 f 在$[\alpha,\beta]$之最大值必在端點上，即其最大值爲 $f(\alpha)$ 或 $f(\beta)$

例 3: 設 $\alpha,\beta\in C$，若 $\alpha^2+\beta^2=0$，則 $\alpha=0$ 且 $\beta=0$ 試判定其眞僞（59 年甲乙丙丁）

解答: 僞

分析: 1. 通常很多同學忽略了定理所給之條件，而做錯的很多，
即 $\forall\alpha,\beta\in \boldsymbol{R}$，若 $\alpha^2+\beta^2=0$ 則 $\alpha=\beta=0$ 必成立
但推廣到 $\forall\alpha,\beta\in C$ 若 $\alpha^2+\beta^2=0$ 則 $\alpha=\beta=0$ 就不成立了
例如 $\alpha=1,\beta=i$，$\alpha^2+\beta^2=1-1=0$

例 4: 若方程組

$$x+y+z=0$$
$$ax+by+cz=0$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=0$$

有異於 $x=y=z=0$ 的解，則必：(A) $a=b=c$
(B) $a+b+c=1$ (C) a,b,c 爲 0 或 1 (D) a,b,c 不完全相異 (E)以上皆非（56年甲乙丙丁）

解答：選(D)

分析: 1. 此題若對公式「$\forall a,b\in \boldsymbol{R}$，若 $ab=0$，則 $a=0$ 或 $b=0$」不重視「或」字者很容易得到 $a=b=c$ 之解

例 5: 設 $x,y\in \boldsymbol{R}$ 且 $xy=4$，$x+y=-11$，求$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ 之值爲(A) -7 (B) -14 (C) -15 (D) 12 (E) 15（57夜聯）

解答: 選(C)（註：當 $a<0$ 時，$\sqrt{a}=\sqrt{-a}i$。此項約定，需先令全體學生知曉）。

分析: 1. 此題若不注意當 $x<0$，$y<0$ 時 $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$ 就會導致錯誤即爲錯誤。

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}=-11+2\sqrt{xy}=-11+2\cdot 2=-7$$

例 6: 試判斷下列各敍述之眞僞，(A) $\sqrt{1-\cos^2x}=\sin x$ (B) $\log((1-\cos 2\theta)/2)=2\log\sin\theta$
(C) $\sqrt[3]{1-3\cos^2x+3\cos^4x-\cos^6x}=\sin^2x$（54 年甲乙丙丁）

解答: (A)(B)爲僞(C)爲眞

分析: 1. 此題涉及公式① $\forall x\in \boldsymbol{R}\Longrightarrow\sqrt{x^2}=|x|$ ②若 $x\geq 0$，$\sqrt{x^2}=x$ ③若 $x\leq 0$，$\sqrt{x^2}=-x$
2. $\log_aN\in \boldsymbol{R}\Longleftrightarrow a>0,\ a\neq 1,\ N>0$

例 7: 關於幾何之證明，下述五事中何者爲誤? (A)有些命題，可有一個以上不同之證明(B)證明中的名詞，有些可以沒有意義。(C)證明滿足條件P的點的軌跡如圖形F時，不但要證明滿足P的點都在F上，而且還要證明F上的點都滿足P(D)從結論倒推至假定的「解析法」，只能視爲幫助思考的工具，而不能視爲嚴格的證明(E)證明的每個步驟中所用的命題，皆須曾經證明過。(56 年甲乙丙丁)

解答: 選(E)

由以上的例子知聯考出題，常針對同學們背公式之漏洞，一不小心，正墮入其陷阱中。這種例子實在太多，只要細心觀察定可收集很多，我亦做如下之示範例題:

例 1: 設方程組

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

令

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \triangle_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$\triangle_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}\quad \triangle_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

則「方程組有無限多組解」爲「$\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$」的

(A)充要條件(B)充分條件(C)必要條件(D)非充分非必要條件(E)以上皆非

例 2: 同例 1 題設; 「方程組無解」爲「$\triangle=0$ 且 $\triangle_x, \triangle_y, \triangle_z$ 有一不等於 0」的(A)充要條件(B)必要條件(C)充分條件(D)充分非必要條件(E)非充分亦非必要條件

解答: 例 1: 選(B); 例 2: 選(B)

例 3: 下列何者爲 $\boldsymbol{R}[x]$ 映至 $\boldsymbol{R}[x]$ 之函數:

(A)令每一多項式對應其本身之常數項(B)每一多項式對應其次數(C)每一多項式對應其加法反元素(D)每一多項式對應其乘法反元素(E)每一多項式對應 $\boldsymbol{R}[x]$ 中之加法單位元素

解答: 選(A), (C), (E)

分析: 1. 其中(C)又爲從 $\boldsymbol{R}[x]$ 映至 $\boldsymbol{R}[x]$ 之一對一函數。

例 4: 若$a, b\in \boldsymbol{R}^+$ (正實數)，則“$a+b/2=\sqrt{ab}\Longleftrightarrow a=b$”這個原因是(A)$\forall a, b\in\boldsymbol{R}$, $ab=0\Longleftrightarrow a=0$ 或 $b=0$ (B) $\boldsymbol{R}$中有阿基米德性質(C)可用舒瓦茲不等式證明(D) $\boldsymbol{R}^+$ 中算術平均數大於或等於幾何平均數(E)$\forall a, b, c\in Q$, $a>b$ 且 $b>c\Longrightarrow a>c$

解答: 選(A)

例 5: 試問下列那一情況是使用數學歸納法之最佳時機? (單選)

(A)題目中使用的未知數都是正數(B)題目中有「$\forall\, n\in N$都成立」的句子(C)題目中的唯一變數若代 1 時顯然成立(D)題目中有一常數$\in N$(E)題目的答案型式已列出時

解答: 選(B)

例 6: 設$<a_n>$, $<b_n>$都收斂，而且$\forall\ n\in N\ b_n\neq 0$，則我們還不能說$<a_n/b_n>$是收斂，這個原因是: (A)$\lim_{n\to\infty}a_n/b_n=\lim_{n\to\infty}a_n/\lim_{n\to\infty}b_n$, $\forall <a_n>, <b_n>$(B)$\lim_{n\to\infty}a_n/b_n\neq\lim_{n\to\infty}a_n/\lim_{n\to\infty}b_n$, $\forall <a_n>, <b_n>$(C)可能存在$n\in N$, $a_n=0$ (D)$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$, $\forall <a_n>, <b_n>$(E)即使$\forall n\in N, b_n\neq 0$但還可能有$\lim_{n\to\infty}b_n=0$

解答: (E)

例 7: 下列命題何者爲眞? (A)若X, Y爲二可加方陣，且$X+Y$可自乘，則$(X+Y)^n=X^n+C_1^nX^{n-1}Y+\cdots+Y^n$（二項式展開）(B)若$X, Y$爲可逆方陣，且爲可加，則$X+Y$亦爲可逆(C)若$X, Y$爲可逆方陣，且爲可乘，則$X\cdot Y$亦爲可逆(D)若$X, Y$互爲逆方陣（乘法反元素），則$X^2, Y^2$亦互爲逆方陣(E)若$X, Y$爲矩陣，$XY$與$YX$皆爲可乘，且$XY=I$，則$YX=I$

解答: 選(C)(D)

3. 注意閱讀能力之培養和以解決日常生活有關之問題

聯考從民國(65)年起首度出現了黃武雄教授所強調之題組式試題，當年一下子出了 23 分此種考題，學生在心理上未能完全適應之情況下，眞正做對的相信很少，該年度之數學成績也相對的降低了些，而(66)年題組式之題目分數更提高到 43 分之多，題目敍述過分冗長，造成學生望卷興嘆，放棄數學之聲迭起，雖然(67)年試題深度放簡單了些，題型也有了大幅度之改變，然學生在聯考中之數學成績仍無顯著地改觀，誠爲命題教授，始料所未及。然此種命題之方式在八十年代中，將會成爲教授命題之範式，仍是無可置疑的。我們只是希望教授能採取漸進而可被接受的情形下適度的出現此類題目。（當然在此筆者竭誠地希望教授先進們，能夠常常著書介紹有關之知識和學說，以供中學教師和學生參考）。

例 1: 某工廠招考技術人員，考試分智力測驗、口試及技能測驗三項，今有甲、乙、丙三應考人員，其成績如下表:

應考人員 \ 項目	甲	乙	丙
智力測驗 (P)	72	86	78
口　　試 (Q)	82	76	78
技能測驗 (R)	86	74	80
平均成績 (A)	81	78	79

因廠方重視三項分數之情形不同對平均成績之計算法，採用以x乘p，y乘Q, z乘R後，再以$x+y+z$除以諸積之和而得其平均成績A卽$(xP+yQ+zR)/(x+y+z)=A$ (a)試由上表求$x:y:z$ (b)若$x+y+z=1$，求x, y, z之值（61 三專）

解答: (a)$x:y:z=3:2:5$ (b)$x=3/10$, $y=1/5$, $z=1/2$

例 2: 在x軸上之點$x=-1.2$（公尺）處，有一光源強度爲 100（國際燭光），另在點$x=0.8$處亦有一光源其強度爲I，今在兩光源間，放置某一儀器，使它能接受兩個光源之輻射，它所受到的輻射與光源強度正比，但與到光源之距離之平方成反比，今假定調整這儀器的位置x，使得它所受到的兩方的輻射相同，則I爲(A)$I(x)=100(x+0.8)^2/(x-1.2)^2$ (B)$I(x)=100(x+1.2)^2/(x-0.8)^2$ (C)$I(x)=100(x-0.8)^2/(x+1.2)^2$，如果儀器的裝置，只允許$|x|\leq 0.6$，則它能夠量度的光源強

度I也就有個限制: $m\leq I(x)\leq M$, 試求出m與M, 則(D)$M\leq 540$(E)$m\leq 1.3$ (65 年甲丙)

解答: 選(C), (E)

例 3: 假設地球是個圓球，半徑爲6400（公里），我們以地心爲原點，南北兩極的連線卽地軸爲z軸，向北爲正，赤道面爲 xy 坐標平面，過地軸截零度經線的平面爲 xz 平面，此經線以東之y坐標爲正，試求甲地（東經120°北緯 40°）之直角坐標（x, y, z）到三位有效數字。

(1)(A) $x=2450$(B) $x=4250$(C) $y=-4250$(D) $y=2450$(E) $z=4115$

(2)又設（這是個洲際飛彈的計算問題）乙地爲（東經 60° 北緯 40°）試計算自乙地到甲地的（最短的）地面距離（兩位有效數字），今設答案爲$(a+\frac{b}{10})\times 10^3$ 公里，則(A) $a\in\{1,3,5,7,9\}$(B) $a\in\{4,5,6,7\}$(C) $a\in\{0\}$(D) $b\in\{0\}$(E) $b\in\{2,3,6,7\}$ (67 年甲丙)

解答: (1)選(A), (E)(2)選(A), (B), (D)

例 4: (1)對任意一個從$\boldsymbol{R}$到$\boldsymbol{R}$的函數 $f(x)$，我們可相應地定義一個函數 $g(x)$，如$g(x)=f(-x)$，則①若$g=f$，則稱f爲偶函數②若$g=-f$，則稱f爲奇函數③若某一從$\boldsymbol{R}$到$\boldsymbol{R}$的函數可表爲一個偶函數與一個奇函數之和，則稱此函數爲T型函數，下列敍述何者爲眞: (A)所有從$\boldsymbol{R}$到$\boldsymbol{R}$的函數都是T型函數(B)假設 $h_1(x)+k_1(x)=h_2(x)+k_2(x)$，其中$h_1(x)$與$h_2(x)$都是偶函數，$k_1(x)$與$k_2(x)$ 都是奇函數，則 $h_1(x)=h_2(x)$，$k_1(x)=k_2(x)$ (C)多項函數 $P(x)$ 若其次數爲奇，則爲奇函數(D)$\cos x$ 是偶函數(E)奇函數乘奇函數必得奇函數。

(2)續上題，設 $f(x)$ 是個T型函數，因而是一個偶函數 $h(x)$ 與一個奇函數 $k(x)$ 之和，現我們想找一組實常數a，b，c，d，使得$h=af+bg$，$k=cf+dg$，下列敍述何者爲眞? (A)這種常數a，b一定存在(B)這種常數c，d一定存在，(C)當f爲奇函數時a，b，c，d，恰有一組解答(D)當f不爲奇函數時a，b，c，d，恰有一組解答 (E)今對某T型函數，f合題意之 a，b，c，d恰有一組解答，則必 $ad-bc=1$ (66 年甲乙丙丁)

解答: (1)選(A)(B)(D) (2)選(A)(B)

由上面之例子知，此種考題，在課本及參考書中皆沒有，而必須同學們在考場中，以極短時間內領悟而做出來，相當於英文試題中之閱讀測驗，事實上除非程度很好之同學，否則實在很不容易，因此同學必須加強此種練習。

例 1: 有獎儲蓄劵共發行十萬張，每張 200 元，每月對獎一次，計開獎 24 次（不受已中獎的限制）二年後無息還本，其獎金如下:

頭獎 1 名，獨得 120,000 元，貳獎 3 名，各得 10,000 元，叁獎 8 名，各得5,000元，末獎（末尾三字相同者，有 2 組）各得 200 元(A)任購一張每月對獎一次中獎之機率大於 1/500 (B)任購一張每一月之期望值爲 2.3 元(C)任購一張每月之期望值折算爲利息，則月利率爲 1.15% (D)任購一張 24 次均中頭獎之機率爲 10^{-120}(E)任購一張均不中獎之機率大於$\frac{1}{2}$

解答: 選(A), (B), (C), (D), (E),

例 2: (1)某飛彈基地發現敵飛彈來襲，以反飛彈基地爲座標系之原點，單位長爲 1 公里，由雷達追踪得知敵飛彈之方向固定爲$(-2,-2,-1)$，速率爲 3 馬克（3 倍音速）於 t 時刻到達 $(41,46,73)$ 之位置，現打算於 t 時刻發射反飛彈加以攔截，假設反飛彈之速率爲 5 馬克，發射角（方向角）爲 α，β，γ，且於距離基地 d 公里之高空中命中敵飛彈，則(A) d 爲一整數(B) d 爲 5 之倍數(C) d 爲一

質數(D) d 爲完全平方數(E) d 爲偶數。

(2)續上題，所求之方向餘弦 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$=(A)$(2/5, \sqrt{5/5}, 4/5)(B)(3/7, 6/7, 2/7)(C)(7/9, 4/9, 4/9)(D)(6/11, 9/11, 2/11)(E)(3/13, 4/13, 12/13)$

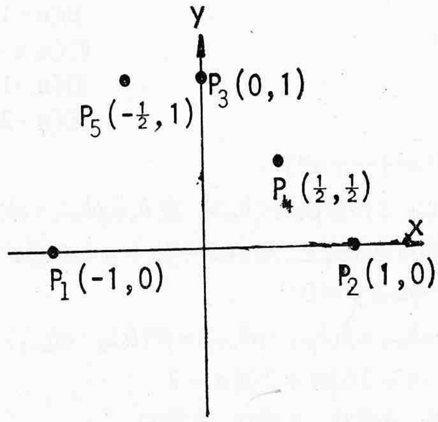
解答：(1)選(A)(B) (2)選(E)

例 3：設電力公司，對一般家庭用電戶，每月收費標準如下：用電在 20 度以內，以 20 度計算，超過 20 度時，以實際用電度數計算，每度 0.91 元，但若超過 100 度時，超過部分每度一元，另收電錶租金 8 元，若每戶本月份用電 x 度，付電費 y 元，而 $y=a|x-20|+b|x-100|+cx+d$，其中 a, b, c, d 爲常數，則 (A) $a=b$ (B) $a+b=c$ (C) $x=0 \Longrightarrow y=0$ (D) $x=50 \Rightarrow y=53.5$ (E) $x=120 \Rightarrow y=119$

解答：選(B), (D), (E)

例 4：下列函數均通過如圖的三點 P_1, P_2, P_3

$$f_1(t)=\cos\frac{\pi t}{2}, f_2(t)=1-t^2, f_3(t)=\sqrt{1-t^2}$$



茲有下二個判斷準則：

Ω_1： $\mu=f(t)$ 稱爲描述過 $P_i(x_i, y_i)$，$i=1, 2, 3, 4, 5$

五點的最佳函數模型，若 $\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{5}|f(x_i)-y_i|^2}$ 爲最小

Ω_2： $\mu=f(t)$ 稱爲描述過 $P_i(x_i, y_i)$，$i=1, 2, 3, 4, 5$ 五點之最佳函數模型，

若 $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{5}|f(x_i)-y_i|$ 最小

f_1, f_2, f_3 三者中 Ω_1 型最佳者以 W_1 表之，Ω_2 型最佳者以 W_2 表之，則 (A)$W_1=f_1$(B)$W_2=f_1$(C)$W_2=f_2$(D)$W_2=f_3$(E)$W_1=f_3$

解答：(A), (B), (C), (D)

例 5：在地圖上取單位長爲 1 公里之正交座標系以表示颱風中心 P 之動態，如清晨六時 P 自 $A(60, -60)$ 向 $B(10, 40)$ 作每小時 $\sqrt{1000}$ 公里的等速直線運動，於上午 t 時 P 到達 x 軸上點 $C(m, 0)$，此後受二點氣壓氣團 $D(10, 0)$，$E(-30, 0)$ 之影響，開始保持 $CD+CE=PD+PE$ 之關係，繼續作曲線運動，如 $x+20 \leq 0$ 爲陸地，$x+20>0$ 爲海洋，P 登陸之地點爲 $F(h, k)$，求 $|h|+|k|$ 之值至

小數點以下一位後四捨五入得個位數字爲 q，十位數字爲 p，則(A) $p\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $p\in\{2,3,5,7\}$ (C) $p\in\{8,9\}$ (D) $q\in\{2,4,6,8\}$ (E) $q\in\{4,9\}$

解答：選(A),(B),(D),(E)

例 6：一醉漢漫步於住家和懸崖之間，每一步或趨向住如或趨向懸崖，趨向住家之機率2倍於趨向懸崖的機率，設住家離懸崖100步，醉漢離家90步（醉漢均保持在住家到崖邊的垂直線上），則醉漢安全回家之機率可求算如下：

1. 設醉漢在離家m步時，安全回家之機率爲 $f(m)$ 則 $(f(0),f(100))=$ (A)$(0,1)$ (B)$(1,0)$ (C)$(0,0)$ (D)$(2/3,1/3)$ (E)$(1/3,2/3)$
2. 在 1. 之情況下，設想醉漢跨出第一步後的情形：若跨向住家，則以後安全回家之機率爲 x，若跨向懸崖，則以後安全回家之機率爲 y，則(A) $x=f(m-1)$ (B) $x=f(m+1)$ (C) $y=f(m+1)$ (D) $y=f$ $f(m-1)$ (E) $y=f(m-2)$
3. 按照 2. 的設想可得 $f(m)=\alpha f(m+1)+\beta f(m-1)$ ……（＊），其中$(\alpha,\beta)=$ (A)$(1/2,1/2)$ (B)$(1/3,2/3)$ (C)$(2/3,1/3)$ (D)$(3/4,2/3)$ (E)$(1,1)$
4. 上述方程式（＊）稱爲差分方程式，要解這個差分方程式，可進行如下：考慮滿足 $a_n-\alpha a_{n-1}=\beta$（常數）的階差數列$\langle a_n\rangle$，可用移位消去法算出 a_n 如下：

$$\begin{aligned} a_n&=\alpha a_{n-1}+\beta\\ \alpha a_{n-1}&=\alpha^2a_{n-2}+\beta\cdot\alpha\\ \alpha^2a_{n-2}&=\alpha^3a_{n-3}+\beta\cdot\alpha^2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +\ \alpha^ka_n&=\alpha^la_1+\beta\cdot\alpha^m\\ \hline \therefore a_n&=\alpha^la_1+\beta(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^m) \end{aligned}$$

其中 $(l,m)=$ (A)$(n,n-1)$ (B)$(n-1,n-1)$ (C)$(n,n-2)$ (D)$(n-1,n-2)$ (E)$(n-2,n-1)$

5. 再考慮滿足 $b_n=pb_{n-1}+qb_{n-2}$ 之階差數列$\langle b_n\rangle$，設 $b_n=pb_{n-1}+qb_{n-2}$ 可改寫成 $b_n-\alpha b_{n-1}=\beta(b_{n-1}-\alpha b_{n-2})$，則$\alpha,\beta$適爲下列何方程式之二根 (A)$x^2+px+q=0$ (B)$x^2-px+q=0$ (C)$x^2+px-q=0$ (D)$x^2-px-q=0$ (E)$x^2-qx+p=0$
6. 最後由遞迴關係，得 $b_n-\alpha b_{n-1}=\beta(b_{n-1}-\alpha b_{n-2})=\beta^2(b_{n-2}-\alpha b_{n-3})=\cdots=\beta^k(b_2-\alpha b_1)$（常數），其中$k$值爲(A) n (B) $n-1$ (C) $n+1$ (D) $n+2$ (E) $n-2$

解答：1 選(B)　2 選(A)(C)　3 選(B)　4 選(D)　5 選(D)　6 選(E)

——本文作者任教於嘉義高中