四元數與三維空間

蔡天鉞

在數與幾何間，我們常將實數對應到直線（一維空間），複數對應到平面（二維空間）。這中間最大不同之處，就是直線或平面上的點只有加法運算，而實數和複數除了加法外尚有乘法運算，甚至這兩者還構成一「體」。因此，是否亦可找到一個新的數系，使其和三維空間相對應，而此數系之加法、乘法具有如實數或複數中加法、乘法之全部性質，即有「體」的一些條件。若不能，會缺乏那些性質？本文即在此作一簡略之介紹，其內容取材自 1979 年 6 月份 The Mathematical

Gazette 雜誌中 Douglas Quadling所作: *Q for quaternions* 一文及徐氏基金會出版，詹進吉譯，賴東昇校閱，數學之內容方法及意義（三）中第20章，超複數部分。

設 $C=\{a+bi\,|\,a,b\in \boldsymbol{R},\ i=\sqrt{-1}\}$ $\boldsymbol{R}$: 實數，則C中每一元素具有下列二性質:

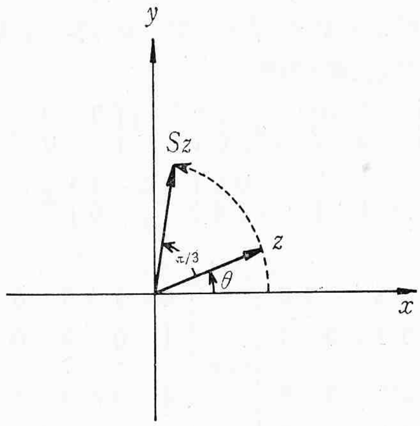
1. 可以代表坐標平面上的一點，即在 $a+bi\longleftrightarrow(a,b)$
2. 在乘法運算下，$z'=Sz$，S：代表一個算子（operator)，具有旋轉和放大（或縮小）雙重性質。此時若將每一複數 z 表爲 $re^{i\theta}$ 之形式，則更易看出。

例 1:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=r(\cos\theta+i\sin\theta)=e^{(\pi/3)i},\ z=a+bi=re^{i\theta}, \text{ 則}$$

$$Sz=e^{(\pi/3)i}\cdot re^{i\theta}=re^{(\pi/3+\theta)i},$$

此時S表一旋轉。

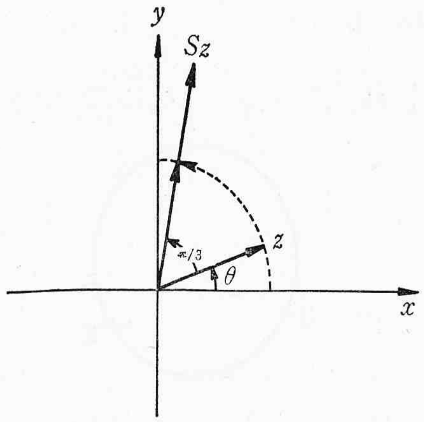


例 2:

$$S=1+\sqrt{3}i=2e^{(\pi/3)i},\quad z=re^{i\theta},\quad \text{則}$$

$$Sz=2e^{(\pi/3)i}\cdot re^{i\theta}=2re^{(\pi/3+\theta)i}$$

此時S具有旋轉和放大雙重性質。



現若將一複數$\alpha+\beta i$，表爲另一種形式，即與2×2階矩陣相對應時，即

$$\alpha+\beta i\longleftrightarrow\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\ \alpha,\beta\in\boldsymbol{R},\ i=\sqrt{-1}$$

$$S=p+qi=\begin{bmatrix}p & -q\\ q & p\end{bmatrix}=p\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+q\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=pI+qJ,\ J^2=-I$$

若用極式表示法

$$p=r\cos\theta,\ q=r\sin\theta$$

則
$$S=\begin{bmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

亦可看出S具有放大和旋轉兩項功能。

若將

$$\alpha+\beta i\longleftrightarrow\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\ 中,$$

$\alpha,\beta\in \boldsymbol{R}$ 改爲 $\alpha,\beta\in \boldsymbol{C}$ 時,

即 $\alpha=a+ci,\quad \beta=b+di, a, b, c, d\in \boldsymbol{R},\quad i=\sqrt{-1}$ 得

$$\begin{bmatrix} a+ci & -b-di \\ b+di & a+ci \end{bmatrix}$$

但此表示法有一缺陷，即雖α, β均不爲零，但其行列式值卻可能爲零，而無法找到反矩陣。爲修正此項缺陷，故將 $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ 修改爲 $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{bmatrix}$，$\alpha^*, \beta^*$ 分別表 α, β 之共軛複數，則其行列式值 $\alpha\alpha^*+\beta\beta^*=|\alpha|^2+|\beta|^2=a^2+b^2+c^2+d^2$ 只有當$\alpha=\beta=0$ 時才會爲零。此種行列式值不爲零之矩陣具有反矩陣之性質恰可和不爲零之複數具有反元素相對應。

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+ci & -b+di \\ b+di & a-ci \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

再將上式諸矩陣中之1，0，i 分別以 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$表之

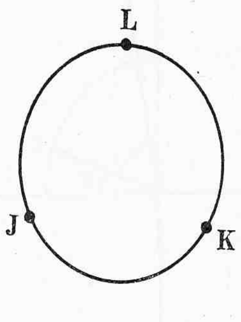
得

$$a\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)+b\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)+c\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)+d\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

記爲$Z=a\mathbf{I}+b\mathbf{J}+c\mathbf{K}+d\mathbf{L}$,，此時$Z$即所謂四元數 (quaternion)

其中 a，b，c，$d\in\boldsymbol{R}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathbf{L}$ 具有下列性質:

1. $\mathbf{J}^2=\mathbf{K}^2=\mathbf{L}^2=-\mathbf{I}, \mathbf{I}^2=\mathbf{I}$
2. $\mathbf{KL}=\mathbf{J}, \mathbf{LJ}=\mathbf{K}, \mathbf{JK}=\mathbf{L}$
3. $\mathbf{LK}=-\mathbf{J}, \mathbf{JL}=-\mathbf{K}, \mathbf{KJ}=-\mathbf{L}$



四元數體系是歷史上第一個出現的超複數體系，它是由愛爾蘭的數學家 Hamilton 於上一世紀中期所介紹的。

令Q表所有四元數所成之集合，在其上定加法和乘法兩運算，設

$$Z_1=a_1\mathbf{I}+b_1\mathbf{J}+c_1\mathbf{K}+d_1\mathbf{L}$$

$$\text{定義}\quad\begin{aligned}Z_2&=a_2\mathbf{I}+b_2\mathbf{J}+c_2\mathbf{K}+d_2\mathbf{L}\\ Z_1+Z_2&=(a_1+a_2)\mathbf{I}+(b_1+b_2)\mathbf{J}+(c_1+c_2)\mathbf{K}+(d_1+d_2)\mathbf{L}\\ Z_1\cdot Z_2&=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)\mathbf{I}+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)\mathbf{J}\\&\quad+(a_1c_2+c_1a_2+d_1b_2-b_1d_2)\mathbf{K}+(a_1d_2+d_1a_2+b_1c_2-c_1b_2)\mathbf{L}\end{aligned}$$

則加法，乘法具有下列性質:

1. 任意二數之加法、乘法唯一確定（卽為完善定義）。
2. 加法、乘法具結合性，亦卽
$$(Z_1+Z_2)+Z_3=Z_1+(Z_2+Z_3),(Z_1Z_2)Z_3=Z_1(Z_2Z_3)$$
3. 加法有單位元素 0，乘法有單位元素 1，
$$0=0\mathbf{I}+0\mathbf{J}+0\mathbf{K}+0\mathbf{L},\ 1=1\mathbf{I}+0\mathbf{J}+0\mathbf{K}+0\mathbf{L}$$
4. (i) 每一數均有加法反元素。
若 $Z=a\mathbf{I}+b\mathbf{J}+c\mathbf{K}+d\mathbf{L}$，則 $-Z=-a\mathbf{I}-b\mathbf{J}-c\mathbf{K}-d\mathbf{L}$ 且 $Z+(-Z)=0$
(ii) 每一數 $Z\neq 0$，則有乘法反元素
$$Z^{-1}=\frac{a\mathbf{I}-b\mathbf{J}-c\mathbf{K}-d\mathbf{L}}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$
5. 加法有交換性，卽 $Z_1+Z_2=Z_2+Z_1$
6. 乘法對加法有分配性，卽 $Z_1(Z_2+Z_3)=Z_1Z_2+Z_1Z_3$

以上這些性質和實數、複數中之加法、乘法的性質相比較，除了缺少乘法交換性外，其餘性質都具備了！現再看看四元數是否具有複數所具有的兩種性質: 卽代表了位置與算子性質，並與二維空間相對應。因每一四元數具有 $a\mathbf{I}+b\mathbf{J}+c\mathbf{K}+d\mathbf{L}$ 之形式，若取 $b\mathbf{J}+c\mathbf{K}+d\mathbf{L}$ 稱為純四元數（類似純虛數）或簡稱向量部分，則恰可與三維空間之一點 (b,c,d) 相對應。事實上，亦可將 Q 視為佈於 $\boldsymbol{R}$ 之四維空間，令 P 為 O 和純四元數所構成之集合，則 P 變為佈於 $\boldsymbol{R}$ 之三維向量子空間，此時可得到下列性質:

1. 在三維空間中之兩點 P_1,P_2，分別由純四元數 Z_1,Z_2 表之，卽 $\overrightarrow{OP_1}\longleftrightarrow Z_1$ $\overrightarrow{OP_2}\longleftrightarrow Z_2$ 則 Z_1,Z_2 之乘積中的 $\mathbf{I}-$ 分量為 $-\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$（內積），$\mathbf{J},\mathbf{K},\mathbf{L}$，分量分別為 $\overrightarrow{OP_1}\times\overrightarrow{OP_2}$ 之三個分量。

證明:

設 $Z_1=a_1\mathbf{J}+b_1\mathbf{K}+c_1\mathbf{L},Z_2=a_2\mathbf{J}+b_2\mathbf{K}+c_2\mathbf{L}$

則
$$\begin{aligned}Z_1Z_2&=(a_1\mathbf{J}+b_1\mathbf{K}+c_1\mathbf{L})(a_2\mathbf{J}+b_2\mathbf{K}+c_2\mathbf{L})\\&=-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)\mathbf{I}+(b_1c_2-c_1b_2)\mathbf{J}+(c_1a_2-a_1c_2)\mathbf{K}\\&\quad+(a_1b_2-b_1a_2)\mathbf{L}\end{aligned}$$

且 $\overrightarrow{OP_1}=(a_1,b_1,c_1)$，　$\overrightarrow{OP_2}=(a_2,b_2,c_2)$

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$
$$\overrightarrow{OP_1}\times\overrightarrow{OP_2}=(b_1c_2-b_2c_1,c_1a_2-c_2a_1,a_1b_2-a_2b_1)$$

2. 若 $Z=a\mathbf{J}+b\mathbf{K}+c\mathbf{L}$ 是純四元數，則 $Z^2=-(a^2+b^2+c^2)\mathbf{I}$，若 $a^2+b^2+c^2=1$ 時，得 $Z^2=-\mathbf{I}$，此時記為 $\hat{Z}$，事實上，單位球面上任一點皆可滿足 $Z^2=-\mathbf{I}$ 之性質，而不只是 $\pm\mathbf{J},\pm\mathbf{K},\pm\mathbf{L}$ 而已。
3. 若 $OP_1=OP_2=1$，$\angle P_1OP_2=90^\circ$，若 $\hat{Z}_1=\overrightarrow{OP_1},\hat{Z}_2=\overrightarrow{OP_2},\hat{Z}_1\hat{Z}_2$ 所對應之點為 P_3，則 $OP_3=1$，且 $\hat{Z}_1,\hat{Z}_2,\hat{Z}_1\hat{Z}_2$ 構成一右手系直角坐標系。

以上是四元數所表現之「位置」性質，另看其當為算子之性質，將其分為放大和旋轉兩部分:

一、放大:

對每一純四元數 $Z=a\mathbf{J}+b\mathbf{K}+c\mathbf{L}$，取 $S=r\mathbf{I}$ 則 $SZ=(r\mathbf{I})(a\mathbf{J}+b\mathbf{K}+c\mathbf{L})=ra\mathbf{J}+rb\mathbf{K}+rc\mathbf{L}$，此時 S 具有放大之性質。

二、旋轉:

設$\hat{U}=a\mathbf{J}+b\mathbf{K}+c\mathbf{L}$，且$\hat{U}^2=-1$，$\overrightarrow{OP}=Z$，將$\overrightarrow{OP}$以$\hat{U}$爲軸旋轉一角度$\theta$，得$\overrightarrow{OP'}=Z'$時，則$Z'=RZR^{-1}$，其中 $R=\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{I}+\sin\frac{\theta}{2}\hat{U}$

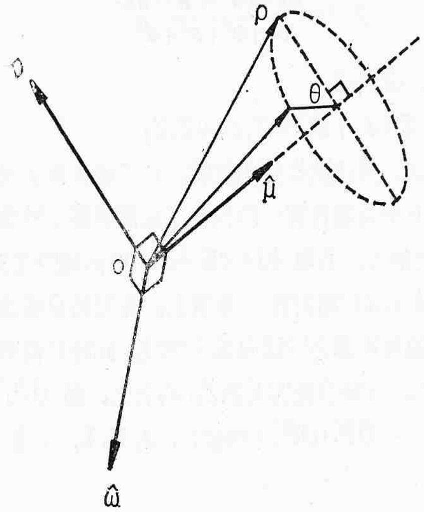
證明:

若 $$R=\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{I}+\sin\frac{\theta}{2}\hat{U} \quad \text{時}$$

則 $$R^{-1}=\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{I}-\sin\frac{\theta}{2}\hat{U}$$

∵ $$\begin{aligned}&(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{I}+\sin\frac{\theta}{2}\hat{U})(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{I}-\sin\frac{\theta}{2}\hat{U})\\ &=\cos^2\frac{\theta}{2}\mathbf{I}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\hat{U}-\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\hat{U}+\sin^2\frac{\theta}{2}\mathbf{I}\\ &=\mathbf{I}\end{aligned}$$

如圖所示，設純四元數$\hat{V}$與$\hat{U}$垂直，且$\hat{V}^2=-1$，$\hat{W}=\hat{U}\ \hat{V}$則$\hat{U},\hat{V},\hat{W}$恰可構成一直角坐標系。



設$\overrightarrow{OP}=Z=a\hat{U}+b\hat{V}$

則$$\begin{aligned}RZR^{-1}&=(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{I}+\sin\frac{\theta}{2}\hat{U})(a\hat{U}+b\hat{V})(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{I}-\sin\frac{\theta}{2}\hat{U})\\ &=(a\cos\frac{\theta}{2}\hat{U}-a\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{I}+b\cos\frac{\theta}{2}\hat{V}+b\sin\frac{\theta}{2}\hat{W})(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{I}-\sin\frac{\theta}{2}\hat{U})\\ &=a\cos^2\frac{\theta}{2}\hat{U}-a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{I}+b\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\hat{V}+b\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\hat{W}\\ &\quad+a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{I}+a\sin^2\frac{\theta}{2}\hat{U}+b\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\hat{W}-b\sin^2\frac{\theta}{2}\hat{V}\\ &=a\hat{U}+b\cos\theta\hat{V}+b\sin\theta\hat{W}\end{aligned}$$

由上知$\overrightarrow{OP'}$乃是由$\overrightarrow{OP}$繞軸$\hat{U}$旋轉一角度θ而得，而R扮演了算子之性質。

從以上可知，四元數亦具有類似於複數之位置和旋轉、放大之性質，此亦是四元數產生之原來之原因。同時四元數中之加法和乘法亦具有複數中之加法和乘法之放大部分性質，除了乘法交換性沒有外。但也因此因素及像$x^2+1=0$之解有無限多解而阻礙了它的應用，也因而顯示出複數系之特殊地位。

——本文作者就讀於師大數學研究所