

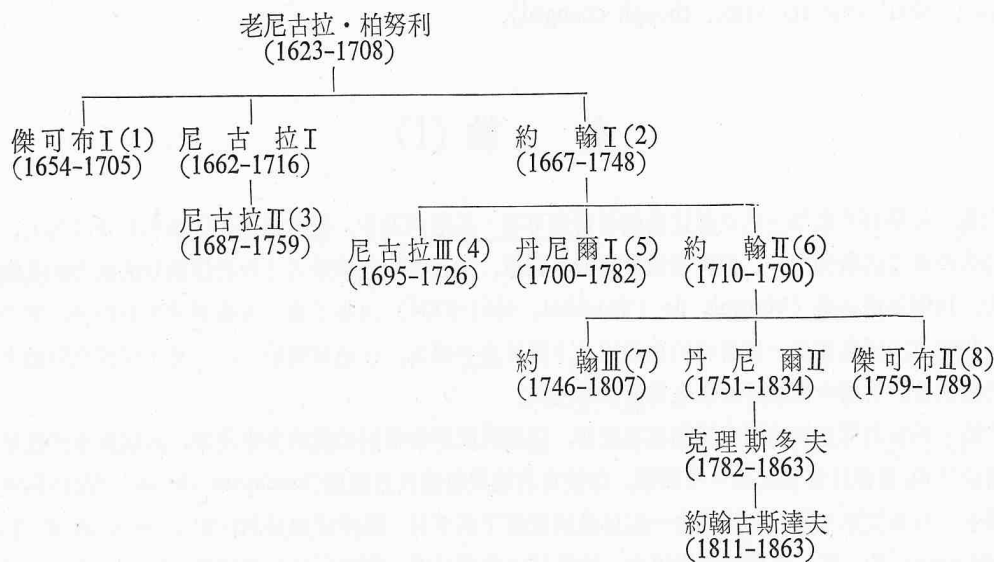
數學世家——柏努利家族

戴久永

前 言

世居瑞士的柏努利家族 (Bernoulli family) 是數學史和科學史上最傑出的家族之一，他們從十七、十八兩世紀以來，三代中出現了八位非常了不起的數學家和科學家，柏努利家族在十七、十八世紀的微積分的發展和應用上扮演著領導的角色，即使是對現代數學演變作最簡明的敘述，也無法把他們的貢獻一筆帶過。

柏努利家族是於 1583 年爲了躲避天主教徒對新教徒的大屠殺而由安特衛普 (Antwerp, 現爲比利時北部的一海港) 逃亡的許多新教家族之一。他們最初逃至法蘭克福，後來再遷往瑞士，在貝塞爾 (Basel) 地方定居下來，柏努利家族的先祖並與貝塞爾地方最古老的家族之一通婚，成爲一個大商人。以下我們先將柏氏家族十七、十八世紀的世系表列出，然後再對他們加以個別介紹。



在世系表中最上面的老尼古拉·柏努利就像他的祖父和曾祖父一樣是個大商人。除了他曾祖父之外，其他的先祖都是與商人的女兒結婚，並且累積了大批的財富。柏氏家人除了經商之外也有人脫離家族經商的傳統而從醫。數學天賦可能早已溶入這個精明的商人家族的血統中，但是它的顯現卻是突發的。

當萊伯尼茲關於微積分的論文發表於 Acta eruditorum 後，傑可布·柏努利 I (Jacob Bernoulli I, 1654-1705) 和約翰·柏努利 I (Johann Bernoulli I, 1667-1748) 兩兄弟就專注數學研究而成爲數學家，他們是最早體認到微積分的威力並且應用這工具於各類問題的少數數學家之一。從 1687 年直至他去世爲止，傑可布一直是貝塞爾大學的數學講座。約翰本是個醫生，後來也改行成爲數學家。於 1697 年成爲格羅寧根大學 (Groningen University) 的數學教授，在傑可布於 1705 年去世之後，約翰繼承他兄長在貝塞

爾大學的數學講座職位，一直到他去世為止。這兩兄弟經常彼此刻薄地互責互謔但是卻一直保持與萊伯尼茲交換意見並且相互交換意見。

傑 可 布 (I)

傑可布·柏努利對數學有很多貢獻，最重要的包括解析幾何、機率論和變分學(calculus of variation)三大方面。他的機率論著作 *Ars conjectandi*；在他去世後八年即 1713 年才出版，該書內涵所包括理論有些至今仍甚具價值，廣泛地應用於保險業，統計和對遺傳的數學研究。

傑可布一項研究就是他大大地豐富了微積分學。他繼續萊伯尼茲的工作，對各種鏈線(catenary curves)作了相當詳盡的研究。這些傑可布所研究的數學後來廣泛地應用於建造吊橋和高電壓線路。在傑可布解決這類問題時，它們是新且困難的問題，如今卻成爲初等微積分教科書或力學教科書中的練習題。

在數學上有好些東西冠着傑可布·柏努利的名字，例如在統計和機率論上的「柏努利分配」和「柏努利定理」；微分方程上的「柏努利方程式」；數論中的「柏努利數」和「柏努利多項式」，以及微積分上的「柏努利雙扭線」。傑可布·柏努利在1690年刊登於 *Acta eruditorum* 上關於等容曲線(isochrone curve)問題的解答中，我們首度見到 integral (積分) 這個字以微積分的意味出現。萊伯尼茲原先稱積分學爲 calenus summatorius, 1696 年萊伯尼茲和約翰·柏努利協議改稱它爲 culus integralis。

傑可布·柏努利的箴言是 Invito patre sidera verso (Against my father's will I study the stars)——以諷刺的口語紀念他父親徒然地阻止他學習數學和天文。他對於等角螺線(equi-angular spiral)在各種變換下的再生性深感興趣，因而效尤阿基米德，要求把這螺線刻在他的墓碑上，並且附註 Eadem mutata resurgo (I shall arise the same, though changed)。

約 翰 (I)

約翰·柏努利在數學上的貢獻比他的哥哥傑可布·柏努利還多。雖然他是個善妒和好爭吵的人，卻是他那時代最成功的教師之一。他對微積分有很多貢獻，並且在引起歐陸人士對於微積分的威力的賞識頗具影響力。1696年洛必塔(Marquis de l'Hospital, 1661-1704) 出版了第一本微積分的教科書，實際上是約翰·柏努利所編寫而在一種奇特的金錢協議下讓於洛必塔的。在這種情形下，計算不定式 $0/0$ 的方法在後來的微積分教科書中被錯誤地命名爲洛必塔法則。

約翰·柏努利所從事的研究範圍相當廣博，包括與反射和折射相關的光學現象，曲線族垂直投射的決定，解析三角，冪數計算和其他一些問題。他較有名的貢獻是對於捷線(brachysto chrone)問題的研究——重力場上一有重質點在兩已知點間由一點以最快速度下落至另一點所成曲線的決定，該曲線實爲擺線(cycloid curve)的一弧。這個問題傑可布·柏努利也曾探討過。擺線同時也是同線(tauto chrone)問題的解答——決定一曲線使一有重質點無論由曲線上的那一點開始均在同一時間區間內到達曲線上固定點。

約翰·柏努利有強烈的愛與憎。萊伯尼茲和尤拉是他心目中的神，牛頓則深爲他所憎惡及大大地低估。約翰是個精力充沛、頭腦清晰的人，在他八十高齡臨死的前幾天仍然勤奮不倦。

尼 古 拉 (I)

尼古拉 (I) (Nicolaus I, 1662-1716) 也深具數學天賦，就像他的兄弟傑可布(I)及約翰(I)一樣，開始時選錯行。他十六歲就得到貝塞爾大學哲學的博士學位，並且在二十歲時得到法學的最高學位。在他

成為聖彼得堡的數學教授之前，他原是伯恩（Bern）的法學教授。他去世時曾獲得俄國凱瑟琳女王特賜國葬的殊榮。

尼古拉（III）

約翰·柏努利有三個兒子，尼古拉（III），丹尼爾（I）和約翰（II），均為十八世紀著名的數學家 and 科學家，尼古拉（III）（1695-1726）在數學上很早就已露頭角，不幸於受聘至聖彼得堡學術院（St. Petersburg Academy）後才八個月就溺水而亡。他發表過曲線，微分方程和機率方面的論文。有一個機率論上有名的問題，由於是他在聖彼得堡所提出，後來均稱其為彼得堡詭論（Petersburg paradox）。問題如下：某甲投擲一枚硬幣，倘若第一次就擲得正面，則得 1 便士；在第二次才擲得正面，得 2 便士；第三次才擲得正面，可得 4 便士，如此類推。試問他的期望值應為若干？數學理論顯示某甲的期望值應為無限大，為一個實際上不可能的結果。

丹尼爾（I）與約翰（II）

約翰（I）本想強迫他的第二個兒子丹尼爾（I）（1700-1782）從商，但是丹尼爾（I）卻寧願學醫，於 1721 年得到醫藥方面的學位。丹尼爾在 11 歲時就跟比他僅大 5 歲的哥哥尼古拉（III）學幾何，他是約翰·柏努利三個孩子中最出名的一個。丹尼爾和尤拉是相當親密的好友，有時也是友好的對手。正如尤拉一樣，丹尼爾·柏努利曾經十度贏得法國學術院的獎金（有少數幾次是與其他競爭者合得）。1725 年（當時他僅 25 歲）丹尼爾就繼承了大哥尼古拉（III）在聖彼得堡的職位。但是當時的聖彼得堡仍是過着相當簡陋野蠻的生活，使他深感不適，因此在七年後第一次有機會離開時就趕快回到貝塞爾。在貝塞爾大學他曾任解剖學和植物學的教授，後來因對科學發生興趣，改為擔任物理學的教授，成為毫無保留地接受牛頓的宇宙觀的第一個非英籍科學家。他專注全力於機率，天文物理和流體力學方面的研究。在機率論方面他曾提出或然率期望值（moral expectation）的概念。在他 1738 年出版的 *Hydrodynamica* 一書中，出現了流體力學的原理，在現今的初等物理學教科書上稱為「柏努利原理」。他並發表了有關潮汐的論文；建立氣體動能理論，研究絃的振動，並且是偏微分方程的拓荒者，以及許多其他應用數學上的問題，因此有人稱丹尼爾·柏努利為數學物理的奠基者。約翰的幼子約翰（II）（1710-1790）也是開始時並非專攻數學而是習法律的。他在繼承父親約翰（I）在貝塞爾大學的數學教授職位之前，原是擔任修辭學教授（professor of eloquence）的職位。他的論著主要是物理，他曾三度奪得巴黎獎金（通常能奪得一次就足以令數學家大感滿足了），他尤其對熱和光的數學理論感興趣。

尼古拉（II）

另外還有一位尼古拉（II）（1687-1759）是傑可布（I）和約翰（I）的侄子，也在數學界頗有名氣。這個尼古拉曾擔任過巴杜亞大學（Padua University）的數學講座，這個職位曾為伽利略所有。尼古拉（II）寫了許多關於幾何和微分方程方面的論文，後半世則改教授邏輯和法律。

約翰（III）

約翰（II）的長子約翰（III）（1746-1807）重踏家族開始時選錯行的覆轍，跟他的父親一樣學醫。13 歲時就得到哲學的博士學位。19 歲時被任命為柏林的皇家天文學家。他著有天文、機率學理、循環小數和不定方程式方面的論文。

傑 可 布 (II)

約翰 II 的另一子傑可布 II (1759-1789) 開始時習法，在 21 歲時一度改爲實驗物理，後來轉爲學習數學，成爲聖彼得堡學術院的數學和物理部門的一員。他的早夭 (30 歲時失足淹死) 結束了他本來極有希望的事業。我們對他的瞭解不多，只知道他是和尤拉的孫女結婚。

結 論

由於數學界的人才輩出，柏努利家族的子孫紛紛改習其他的學科，並且在各方面均有相當優異的表現，只是不像以上所談及的幾位那麼出色就是了。

關於有名的柏努利家族，人們盛傳著許多傳說和軼事，其中有一個故事是這樣的：丹尼爾·柏努利年青的時候，有一次出外旅行，遇見一位陌生人，兩個人談得很投機，於是柏氏自我介紹說：「我是丹尼爾·柏努利。」那人聽了，就用一種諷刺的口氣說「我是牛頓 (Isaac Newton, 1642-1727)」。這句話使丹尼爾終身引以爲榮，認爲是他所得到最大的恭維。

參 考 資 料

1. E. T. Bell: *Men of Mathematics*, Simon and Schuster New York 1937
2. Howard Eves: *An Introduction to the History of Mathematics*, 3rd edition, Holt, Rinehart and Winston 1964
3. Isaac Asimov: *Isaac Asimov's Biographical Encyclopedia of Science and Technology*, New Revised edition, Avon Books 1972

——本文作者現任教於交大運輸管理系