4205（廖賀田先生提供）

(1)對正實數 r，規定

$$C_r=\left\{ z \,\middle|\, \left|\frac{z-1}{z+1}\right|=r \right\}$$

試證當 $r\neq 1$ 時，

$$C_r=\left\{ z \,\middle|\, \left|z-\frac{1+r^2}{1-r^2}\right|=\frac{2}{|1-r^2|} \right\}$$

(2)對實數 θ，規定

$$l_\theta=\left\{ z \,\middle|\, arg\,\frac{z-1}{z+1}=\theta \right\}$$

在 $\theta\neq k\pi$（k 爲整數）時，試證 $l_\theta\cup l_{\theta+\pi}\cup\{1,-1\}$ 可表爲 $\{z\,|\,|z-\alpha|=\rho\}$，並將 α，ρ 用 θ 表出。

(3)若映射

$$T:\ C\longrightarrow C$$

滿足

$$\text{(v)}\quad T(l_\theta)=l_{\theta+A},\quad \forall\,\theta\ \text{（此處}A\text{爲定數）}$$

$$\text{(vi)}\quad T(C_r)=C_r,\quad \forall\,r$$

你能否想像T如何“搬動”平面上的點？並請將 $T(z)$ 用明顯的公式表出。

(4)若映射

$$T':\ C\longrightarrow C$$

滿足

$$\text{(vi)}\quad T'(l_{B/2+\theta})=l_{B/2-\theta},\quad \forall\theta\qquad \text{（此處}B\text{爲定數）}$$

$$\text{(vii)}\quad T'(C_r)=C_r,\qquad \forall\,r$$

你能否想像 T' 如何“搬動”平面上的點？並請將 $T'(z)$ 用明顯的公式表出。

(5)若將(3)中之 T 記爲 p_A，將(4)中之T記爲 n_B，試問 $p_A\circ p_B$, $p_A\circ n_B$, $n_A\circ p_B$, $n_A\circ n_B$ 的結果如何？（提示：考慮$w=(z-1)/(z+1)$）。