坡里雅算術

林福來

一堆東西，算一算，共有多少個，這是最基本的算術，如果這堆東西，又分成許多種類，數一數，共有多少種，這也是算術。坡里雅算術，就是一種計算一堆東西裏面，共有多少種類的方法。這套算術涵蓋了三位數學家：邦塞 (Burnside)，坡里雅 (Polya) 及第普魯英 (De Bruijn) 的貢獻。比較公平的稱呼應該是邦塞——坡里雅——第普魯英算術。他們三人，前後分別就不同層次的這類問題，找到了計算的公式。本文的目的，就是要以實例來解說這些計算公式。以及它們的用法。至於公式是如何導出的，僅在文末提供一些參考資料供有興趣的讀者自行閱讀。

邦　塞　算　式

一堆東西，分成若干種類，欲知共有多少種類；計算前，我們必需先知道這堆東西到底是怎樣分類的，其中的兩個東西，要如何分辨它們是同一類還是不同類？能夠分辨了，才能開始去數。邦塞研究這種問題後，他找到了一計算公式，只要我們知道分類的原則，利用此原則，經由簡單的計算，卽可算出共有多少種類，而不必眞正去數。我們以下面的例子來解說，邦塞的計算公式。

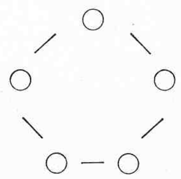
例 1:

設有單面磨光的寶石三種：紅寶石、藍寶石、黃寶石、各有若干個。以它們鑲成含有五顆寶石的項鍊，問共有多少種？

兩條這種項鍊，如果經過旋轉後，其中的一條會變成另一條，那麼這兩條項鍊自然視爲同一種。這就是此問題中的分類原則。

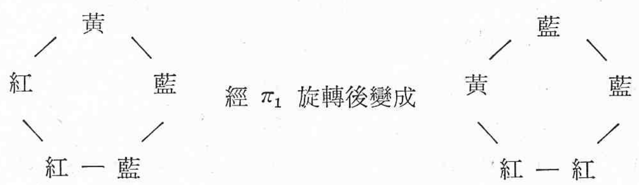
首先我們來算未分類前，共有多少條項鍊：

每一條項鍊都含五顆寶石，如圖



其中的每一顆都可以是紅、藍、黃寶石中的一種。因此，如果不將經旋轉可變成同一種的分類原則列入考慮，而以D代表所有這種項鍊所成的集合，那麼D中就共有 $3^5=243$ 個元素。

對於 D 中的項鍊，將一條變成另一條的旋轉，共有五種，分別以 $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ 代表逆時針方向旋轉 $0°, 72°, 144°, 216°, 288°$。例如：



令$G=\{\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4\}$，$G$中的每一元素都是將 D 映至D的對射，稱爲D的置換（或重排），G叫做D的一置換羣。

D中的項鍊，分類的原則，可以改述爲:

設 $x,y\in$D，x,y 表同一種項鍊$\Longleftrightarrow$有一$\pi\in$G 使得$\pi(x)=y$。

如果以符號"$x\sim y$"來表示項鍊x，y是同一種，那麼

$$x\sim y\Longleftrightarrow 有一\ \pi\in G\ 使得\ \pi(x)=y$$

設$x\in D$，令〔x〕代表D中所有跟x同一種的項鍊所成的集合，即〔x〕$=\{y\in D\mid x\sim y\}$。例如:

設 x:
```
    紅
  ／  ＼
黃      紅
  ＼  ／
  黃—藍
```
，x_1:
```
    紅
  ／  ＼
紅      藍
  ＼  ／
  黃—黃
```
，x_2:
```
    藍
  ／  ＼
紅      黃
  ＼  ／
  紅—黃
```
，

x_3:
```
    黃
  ／  ＼
紅      黃
  ＼  ／
  藍—紅
```
，x_4:
```
    黃
  ／  ＼
黃      紅
  ＼  ／
  藍—紅
```

則 x,x_1,x_2,x_3,x_4 都屬於〔x〕。

D中的元素x，y，所導出的〔x〕與〔y〕可能相等或不相交。比如，上面例子中的x，x_1，這是D中相異的元素，但是

$$[x]=[x_1]$$

如果y爲
```
    黃
  ／  ＼
紅      黃
  ＼  ／
  紅—黃
```
那麼〔x〕$\cap$〔y〕$=\phi$，這道理很明顯，因爲x含有二紅、二黃，一藍五顆寶石，而y則含有3紅，2黃五顆寶石，不管將y怎樣旋轉都不可能使其變成〔x〕中的元素，反之亦然。

再以符號 $D/\sim$ 代表所有不同的〔x〕所成的集合。即

$$D/\sim=\{[x]\mid x\in D\}$$

那麼 $D/\sim$中的每一元素〔x〕就是一種項鍊，不同的元素代表不同種的項鍊。因此原問題已轉化爲:

計算 $D/\sim$中元素的個數。

邦塞算式就是計算 $D/\sim$的元素個數的公式:

$$\#(D/\sim)=\frac{1}{\#(G)}\sum_{\pi\in G}\psi(\pi)$$

其中 $\psi(\pi)=\#\{x\in D\mid \pi(x)=x\}$。

換句話說，$\psi(\pi)$ 是指D中所有經過π映射後，映至自己的元素的個數。

利用邦塞算式解例1之前，先舉一個簡單的例子，來說明此算式的內涵。

例 2: 設$D=\{a,b,c,d,e\}$，π_0,π_1 爲D上的二置換，定義爲:

$$\begin{array}{c|ccccc} D & a & b & c & d & e \\ \pi_0 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & a & b & c & d & e \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} D & a & b & c & d & e \\ \pi_1 & \searrow & \swarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & a & b & c & d & e \end{array}$$

令$G=\{\pi_0,\pi_1\}$，則G是D的一置換羣。

利用邦塞算式，計算 $\#(D/\sim)$:

因爲a，b，c，d，e經 π_0 映射後都不變，所以 $\psi(\pi_0)=5$，又因c，d，e經 π_1 映射後都不變，而a，b則互換，所以 $\psi(\pi_1)=3$。

因此

$$\#(D/\sim)=\frac{1}{\#(G)}(\psi(\pi_0)+\psi(\pi_1))=\frac{1}{2}(5+3)=4$$

實際上，因爲 $\pi_1(a)=b$，所以$a\sim b$，因此 $[a]=[b]$。

$$D/\sim=\{[a],[c],[d],[e]\}$$

故

$$\#(D/\sim)=4$$

觀察例2，利用邦塞算式計算 $\#(D/\sim)$ 的過程，在 $(5+3)/2$ 中的5是指D中的所有元素的個數，3是指c，d，e這三個。因爲 c,d,e 中的每一個，都獨自成一種，在$5+3$中，它們都出現兩次，所以乘以前面的 $1/2$ 就表示這三個元素，以G爲分類標準，共分成三類。另外，a，b各只在“5”中出現一次，這兩個元素，以G爲分類標準，由於 $\pi_1(a)=b$，所以a，b屬同一類，“5”中的這兩個乘以$\frac{1}{2}$，正表示「兩個算是一類」。

經過這番解釋，大概對邦塞算式都有點認識了，接着就利用它來幫忙解決例1：

計算 $\psi(\pi_i)$，$i=0,1,2,3,4$，顯然地，$\psi(\pi_0)=243$。這是因爲 π_0 是恒等映射，D中的每個元素經 π_0 映射後都不變。

再算 $\psi(\pi_1)$：設$x\in D$，如果x中所含的五顆寶石，有兩種或兩種以上的顏色，那麼 $\pi_1(x)\neq x$。例如，設x爲　　　　　　　　　　　則 $\pi_1(x)$ 爲

```
        紅                        紅
      ／  ＼                    ／  ＼
    紅      紅。              紅      黃
     ＼    ／                  ＼    ／
     紅 — 黃                   紅 — 紅
```

此時黃寶石的位置改變了，對D而言，x與 $\pi_1(x)$ 爲兩個相異的元素。反之，如果x所含五顆寶石都同色，那麼 $\pi(x)=x$。因此 $\pi_1(x)=x\Longleftrightarrow x$ 所含的五顆寶石都同色。在D中，這種項鍊共有三條，卽全部是黃寶石，全部是藍寶石以及全部是黃寶石。因此

$$\psi(\pi_1)=3$$

同理，

$$\psi(\pi_2)=\psi(\pi_3)=\psi(\pi_4)=3$$

將 $\psi(\pi_i)$，$i=0,1,2,3,4$ 代入邦塞算式，得

$$\begin{aligned}\#(D/\sim)&=\frac{1}{\#G}(\psi(\pi_0)+\psi(\pi_1)+\psi(\pi_2)+\psi(\pi_3)+\psi(\pi_4))\\&=\frac{1}{5}(243+3+3+3)\\&=51\end{aligned}$$

卽以單面寶石三種，鑲含5顆寶石的項鍊、共有 51 種。

費瑪小定理——例1的應用。

若 p 爲一質數，a 是任意自然數。則(1) $p \mid a$ 或(2) $p \mid a^{p-1}-1$，卽 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$。

證明: 考慮有單面磨光的寶石 a 種，各若干個，以它們來鑲含有 p 個寶石的項鍊，仿照例 1 的解法，知項鍊的種類共有

$$\frac{1}{p}[a^p+\underbrace{a+a+\cdots\cdots+a}_{p-1\text{個}}]$$

$$=\frac{1}{p}[a^p+(p-1)a]$$

$$=\frac{1}{p}[a(a^{p-1}-1)+pa]$$

因爲項鍊的種類數爲一整數，所以

$$p|a(a^{p-1}-1)+pa$$

$$\Longrightarrow p|a(a^{p-1}-1)$$

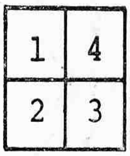
$$\Longrightarrow p|a \text{ 或 } p|a^{p-1}-1$$

上述的證明方法，是將欲證明的結果，拿一實際問題與之對照因而得到結論，這種方法通常叫做**組合技巧**。這是數學分枝——**組合理論**內很重要的解題方法。

坡里雅算式

設 D 是一有限集合，G 是 D 上的一置換羣，以 G 爲標準將 D 分類，邦塞算式告訴我們如何計算 D 中的元素共有多少種類。如果另外還有一有限集合 R，那麼 D 映到 R 的所有函數，也可以用 G 爲標準，將其分類，坡里雅算式就是告訴我們如何計算所有的函數共有多少種的方法。仍然以例子來解說。

例 3: 設有一 2×2 的棋盤，如圖



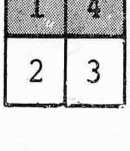
欲塗上黑、白兩種顏色，問共有多少種塗法?

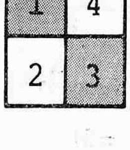
二塗法，如果經過旋轉後，其中一塗法變成另一塗法，那麼此二塗法視爲同一種塗法。這是塗色方法的分類原則。

例 3 這問題，數字很小，可以直接計算:

不同的塗法有「全黑」，「三黑一白」，「三白一黑」「全白」各一種，另有「二黑二白」兩種，總共有六種。

二黑二白的兩種塗法如下:





斜線代表黑色，空白代表白色。

現在換一個角度來處理這問題:

設 $D=\{1,2,3,4\}$，代表棋盤的四個位置

$R=\{b,w\}$ 代表顏色黑 (b) 與白 (w)。

考慮D映至R的函數；每一此種函數都可視爲是一塗法，卽將棋盤的四個位置，塗上該位置的像所代表的顏色。例如；

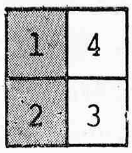
$$\begin{array}{c|cccc} D & 1 & 2 & 3 & 4 \\ f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ R & b & b & w & w \end{array}$$

所對應的塗法是

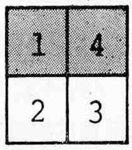
不過不同的函數可能對應同一種塗法，例如:

設 $\begin{array}{c|cccc} D & 1 & 2 & 3 & 4 \\ f_1 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ R & b & b & w & w \end{array}$ $\quad\begin{array}{c|cccc} D & 1 & 2 & 3 & 4 \\ f_2 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ R & w & b & b & w \end{array}$

它們所對應的塗法分別爲:



f_1



f_2

將 f_2 所對應的塗法塗好後的棋盤，逆時針方向旋轉 90°，就變成 f_1 的塗法，所以 f_1, f_2 對應同一種塗法。換句話說二函數若只差一旋轉，則所對應的塗法是同一種。

令$\mathscr{F}=\{f \mid f: D \xrightarrow{\text{函數}} R\}$，代表$D$映到$R$的所有函數。

$G=\{\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3\}$，其中 π_0,π_1,π_2,π_3 分別代表以棋盤中心逆時鐘方向旋轉 $0°, 90°, 180°, 270°$。

則 $$f_1, f_2 \in \mathscr{F}, f_1 \sim f_2 \Longleftrightarrow \text{有一} \pi \in G \text{使得 } f_1 = f_2 \circ \pi$$

其中符號“$f_1 \sim f_2$”表示 f_1 與 f_2 所對應的塗法相同。

令〔f〕表示$\mathscr{F}$中所有與f對應相同塗法的函數所成的集合。同樣地，對$\mathscr{F}$中的任二元素 f_1, f_2，恆有〔f_1〕=〔f_2〕或〔f_1〕$\cap$〔f_2〕$=\phi$。

令 $$\mathscr{F}/\sim=\{[f] \mid f \in \mathscr{F}\}$$

則$\mathscr{F}/\sim$中的每一元素都恰代表一種塗法。例 3 的問題，就是要求 $\#(\mathscr{F}/\sim)$。

坡里雅在 1936~7 年，研究出計算 $\#(\mathscr{F}/\sim)$ 的公式。在坡里雅演繹此公式的過程中，他同時發現一個能將各種不同的塗法都列舉出來的式子，這是邦塞算式中所無法表現的。像例 3 中，二黑二白有兩種不同的塗法，而三黑一白則只有一種塗法，坡里雅可以在他研究所得的公式中，清清楚楚地顯示出來。由於這層偉大的突破，我們才偏袒地以「坡里雅算術」當做標題。由於坡里雅的列舉式，涉及的預備知識較廣，本文不準備討論，有興趣的讀者，請參閱〔4〕第五章。以下將介紹坡里雅計算 $\#(\mathscr{F}/\sim)$ 的公式:

首先，需要一些預備知識:

設$D=\{a, b, c, d, e\}$

$$\pi_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & d & e & c \end{pmatrix} \qquad \pi_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & d & e & d \end{pmatrix}$$

則 π_1, π_2 都是D的置換。

其中符號$\pi_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & d & e & c \end{pmatrix}$代表 $\pi_1 \left| \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & a & d & e & c \end{array} \right.$

在置換 π_1 中，$\pi_1(a)=b$，$\pi_1(b)=a$，稱 a，b 是 π_1 的**一循環**，以 (a,b) 表之。(a,b) 含兩個元素，稱其長度爲2。另外，$\pi_1(c)=d$，$\pi_1(d)=e$，$\pi_1(e)=c$，稱 c，d，e 爲 π_1 的一循環，以(c,d,e) 表之，長度3。即 π_1 共含二循環，長度分別是2和3。此時，我們以 x_2x_3 來代表 π_1 的循環結構式。x_2 中的足碼2及其次冪1代表長度2的循環有1個。準此，π_2 中共有兩個長度1的循環 (a) 和 (b)，以及長度3的循環1個，即 (c,d,e)，因此 π_2 的循環結構式爲 $x_1^2x_3$。

在例3中，$G=\{\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3\}$ 中的元素可表示成:

$\pi_0=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 共有長度1的循環四個，故循環結構式爲 x_1^4

$\pi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 只有長度4的循環一個，即 $(1\ 2\ 3\ 4)$ 故循環結構式爲 x_4

$\pi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 共有長度2的循環兩個，即 $(1\ 3),(2,4)$，故循環結構式爲 x_2^2

$\pi_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$(1\ 2\ 3\ 4)$ 是唯一的循環，循環結構式爲 x_4

如果將 $x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots$ 等都視爲變數，那麼 π_i, $i=0,1,2,3$, 的循環結構式都是一單項式。π_0,π_1,π_2,π_3 所導出的單項式，利用多項式的加法運算，將它們加起來，得一多項式：

$$x_1^4+x_4+x_2^2+x_4=x_1^4+x_2^2+2x_4$$

將此多項式除以 $\#(G)$，其結果稱爲G的循環指式，以 $P_G(x_1x_2,\cdots\cdots)$ 表之。例3中，$G=\{\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3\}$ 的循環指式爲

$$P_G(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{4}(x_1^4+x_2^2+2x_4)$$

坡里雅的計算公式就是:

$$\#(\mathscr{F}/\sim)=P_G(\#[R],\#[R],\#[R],\cdots\cdots).$$

換句話說，將 $P_G(x_1,x_2,\cdots\cdots)$ 中的每一個變數 x_i 都以 $\#[R]$ 替代，所得的結果就是從D到R的函數的種類數。

利用這公式，來計算例3

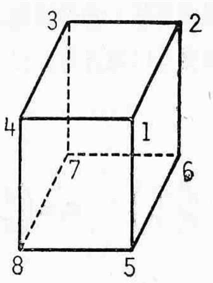
$$\#(\mathscr{F}/\sim)=\frac{1}{4}(2^4+2^2+2\cdot 2)=6$$

與直接計算所得的結果相同。

利用坡里雅式，再來算一個比較難以直接計算的例子。

例 4: 將一正立方體的八個頂點，塗以黑、紅兩種顏色，不同的塗法有多少? 兩種塗法，若只差一旋轉，則視爲同一種塗法。

設 $D=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 代表立方體的八個頂點如圖



$R=\{b,r\}$ 代表黑 (b)，紅 (r) 兩種顏色

$$\mathscr{F}=\{f \mid \text{函數 } f: D \longrightarrow R\}$$

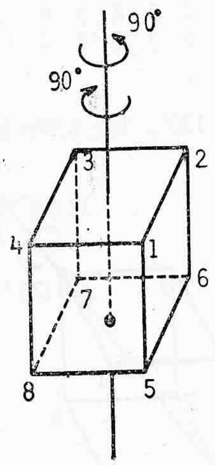
G 爲對應於正立方體的所有可能的旋轉。則 G 爲 D 上的一置換羣，G 中的旋轉可分成下列五種:

(i) π_0: 代表立方體不動。即

$$\pi_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

其循環結構式爲 x_1^8。

(ii) 以通過立方體兩對面的中心的直線爲軸，旋轉 90°；此種旋轉共有 6 種。如圖

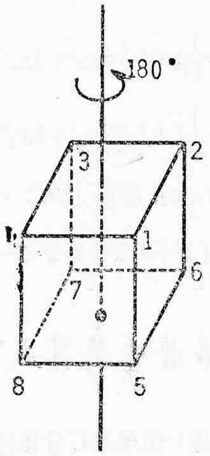


例如

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&2&3&8&5&6&7\end{pmatrix}$$

爲其中的一種，它是將上圖順時鐘方向旋轉 90° 每一此種旋轉的循環結構式都是 x_4^2。

(iii) 與 (ii) 的軸相同，但旋轉 180°，共有 3 種。如圖:

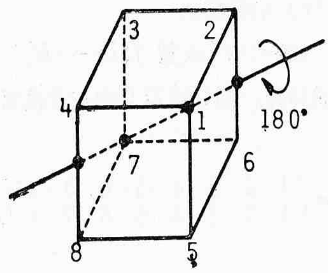


例如:

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&1&2&7&8&5&6\end{pmatrix}$$

此種旋轉的循環結構式都是 x_2^4。

(iv) 以過兩個對邊中點的連線爲軸，旋轉 180°；共有 6 個此種旋轉;



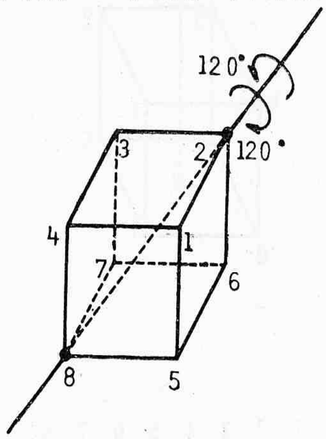
（此軸未經 1, 7 兩頂點）

例如:

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

此種旋轉的循環結構式都是 x_2^4。

（v）以過兩個對頂點連線爲軸，旋轉 120°；共有 8 個此種旋轉；



例如:

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8\end{pmatrix}$$

此種旋轉的循環結構式都是 $x_1^2x_3^2$。

因此G的循環指式爲

$$P_G(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{24}[x_1^8+6x_4^2+3x_2^4+6x_2^4+8x_1^2x_3^2]$$

$$=\frac{1}{24}[x_1^8+9x_2^4+8x_1^2x_3^2+6x_4^2]$$

所求的塗法數，利用坡里雅公式將 x_1, x_2, x_3, x_4，都以〔$\#R$〕$=2$ 代入得:

$$\#[\mathscr{F}/\sim]=\frac{1}{24}[2^8+9\cdot 2^4+8\cdot 2^2\cdot 2^2+6\cdot 2^2]=23$$

第普魯英算式

邦塞算式計算的是有限集合D，被其上的一置換羣G分類後的種類數。坡里雅算式則是計算有限集合D映至有限集合R的所有函數所成的集合 $\mathscr{F}$，被D上的一置換羣G分類後的函數種類。坡里雅所探討的這問題，再往深一層看，我們可以考慮如果 D 及 R 上各有一置換羣G及H，以G和H當做 $\mathscr{F}$ 的分類標準，那麼 $\mathscr{F}$ 共分成多少種類呢？有沒有一個類似於邦塞算式及坡里雅算式的計算公式，可以簡單地算出 $\mathscr{F}$ 的種類？這問題，數學家們經過二十年的探索，終於在 1956 年，被第普魯英解決了。第普魯英所得到的計算公式中引用了偏導數運算，這與原問題可說是風馬牛不相干的概念，第普魯英這層天才的聯想，

確實偉大。

以下我們還是以實例來解說第普魯英算式。

例 5: 設有五本書，其中兩本相同，其餘三本都相異，將這五本書分給四位小朋友，小朋友中有兩位是雙胞胎兄弟，雙胞胎兄弟所分到的書，一本換一本，交換前與交換後的分法視爲同一種，問分法有多少種?

設　$D=\{a,b,c,d,e\}$ 代表五本書，a，b 是相同的兩本。

$R=\{$甲、乙、丙、丁$\}$ 代表四位小朋友，甲、乙是雙胞胎。

$\mathscr{F}=\{f\mid$ 函數 $f: D \longrightarrow R\}$

則$\mathscr{F}$中的每一個f都對應一分法。不過不同的函數所對應的分法可能是同一種。例如

(i) 設

$$f_1\left|\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{丙} & \text{丁} & \text{丙} & \text{丙} & \text{甲} \end{array}\right. \qquad f_2\left|\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{丁} & \text{丙} & \text{丙} & \text{丙} & \text{甲} \end{array}\right.$$

因爲a，b是相同的書，那一本給丙，那一本給丁都一樣，所以 f_1, f_2 代表同一種分法。f_1 與 f_2 只差一D上的置換

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & c & d & e \end{pmatrix}$$

(ii) 設

$$f_3\left|\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{甲} & \text{丙} & \text{乙} & \text{丁} & \text{丙} \end{array}\right. \qquad f_4\left|\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{乙} & \text{丙} & \text{甲} & \text{丁} & \text{丙} \end{array}\right.$$

f_3 將a，c分別分給甲，乙，f_4 將a，c分別分給乙、甲，其他三本分法相同。因爲分給甲、乙的書可以交換，所以 f_3, f_4 所代表的分法也相同。此時 f_3, f_4 只差R上的一置換

$$\begin{pmatrix} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} & \text{丁} \\ \text{乙} & \text{甲} & \text{丙} & \text{丁} \end{pmatrix}$$

由 (i), (ii) 這兩個例子，我們知道，f_1 和 f_2 代表同一種分法，是因a，b可以互換，所以應該考慮D上的置換羣$G=\{\pi_0, \pi_1\}$，其中

$$\pi_0=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} \qquad \pi_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & c & d & e \end{pmatrix}$$

而 f_3 和 f_4 代表同一種分法是因甲、乙所分得的書，一本換一本，換前換後的分法相同，所以還得考慮影響分法的R上的置換羣 $H=\{h_0, h_1\}$，其中

$$h_0=\begin{pmatrix} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} & \text{丁} \\ \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} & \text{丁} \end{pmatrix} \qquad h_1=\begin{pmatrix} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} & \text{丁} \\ \text{乙} & \text{甲} & \text{丙} & \text{丁} \end{pmatrix}$$

G與H就是$\mathscr{F}$的分類標準;

設f，$g\in\mathscr{F}$，$f\sim g$（代表同一種分法）$\Longleftrightarrow$有一$\pi\in G$及$h\in H$使得 $h\circ f=g\circ\pi$，如下圖:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & R \arrow[d, "h"] \\ D \arrow[r, "g"'] & R \end{tikzcd}$$

比如說，(i) 中的 f_1, f_2 代表同一種分法。是因爲

$$h_0\circ f_1=f_2\circ\pi_1$$

而 (ii) 中的 f_3, f_4 代表同一種分法是因

$$h_1\circ f_3=f_4\circ\pi$$

令〔f〕表示$\mathscr{F}$中所有與f代表同一種分法的所有函數所成的集合。同樣地，對$\mathscr{F}$中的任二元素f,g，恆有〔f〕=〔g〕或〔f〕∩〔g〕$=\phi$。

令
$$\mathscr{F}/\sim=\{[f]\,|\,f\in\mathscr{F}\}$$
那麼$\mathscr{F}/\sim$中的每一元素恰是所求的一種分法。例 5 就是要計算 $\#(\mathscr{F}/\sim)$。

第普魯英所導出的計算公式是:

$$\#(\mathscr{F}/\sim)=P_G\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ \frac{\partial}{\partial z_2},\ \frac{\partial}{\partial z_3},\ \cdots\cdots\right)\cdot P_H(e^{z_1+z_2+z_3+\cdots\cdots},e^{2(z_2+z_4+z_6+\cdots\cdots)},e^{3(z_3+z_6+z_9+\cdots\cdots)})$$

其中偏導數在 $z_1=z_2=z_3=\cdots\cdots=0$ 取值。

這公式是將 G 的循環指式 $P_G(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots)$ 中的變數 x_i 分別以偏導數 $\partial/\partial z_i$ 替代，得到一算子；將H的循環指式 $P_H(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots,)$ 中的變數 x_i 分別以指數 $e^{i(z_i+z_{2i}+z_{3i}+\cdots\cdots)}$ 替代，得一指數函數；再將由 P_G 所得的偏導運算作用在由 P_H 所得的函數上，偏導數作用後再代 $z_1=z_2=z_3=\cdots\cdots=0$，即得欲求的$\mathscr{F}/\sim$的元素個數。

第普魯英算式，初看相當複雜，但眞正運用由於偏導數是對指數函數作用，然後又在特定點 0 取值，所以運算過程並沒有想像中那般困難了。現在就利用第普魯英算式來解決例 5：

先求G,H的循環指式:

因爲

$$\pi_0=\begin{pmatrix}a&b&c&d&e\\a&b&c&d&e\end{pmatrix},\ \text{循環結構式爲 } x_1^5$$

$$\pi_1=\begin{pmatrix}a&b&c&d&e\\b&a&c&d&e\end{pmatrix},\ \text{循環結構式爲 } x_1^3x_2$$

$$h_0=\begin{pmatrix}\text{甲}&\text{乙}&\text{丙}&\text{丁}\\\text{甲}&\text{乙}&\text{丙}&\text{丁}\end{pmatrix},\ \text{循環結構式爲 } x_1^4$$

$$h_1=\begin{pmatrix}\text{甲}&\text{乙}&\text{丙}&\text{丁}\\\text{乙}&\text{甲}&\text{丙}&\text{丁}\end{pmatrix},\ \text{循環結構式爲 } x_1^2x_2$$

所以

$$P_G(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1^5+x_1^3x_2)$$

$$P_H(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1^4+x_1^2x_2)$$

因此

$$P_G\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ \frac{\partial}{\partial z_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^5}{\partial z_1^5}+\frac{\partial^3}{\partial z_1^3}\ \frac{\partial}{\partial z_2}\right)$$

$$\begin{aligned}&P_H(e^{z_1+z_2+\cdots\cdots},e^{2(z_2+z_4+\cdots\cdots)})\\&=\frac{1}{2}(e^{4(z_1+z_2+\cdots\cdots)}+e^{2(z_1+z_2+\cdots\cdots)}\cdot e^{2(z_2+z_4+\cdots\cdots)})\\&=\frac{1}{2}(e^{4(z_1+z_2+\cdots\cdots)}+e^{2z_1+4z_2+\cdots\cdots})\end{aligned}$$

分別將 $P_G(\partial/\partial z_1,\partial/\partial z_2)$ 右邊的各偏導數，作用在 P_H 上:

$\partial^5/\partial z_1^5|_{z_1=0}$ 作用在 P_H 上，得 4^5+2^5。

$$\frac{\partial^3}{\partial z_1^3}\cdot\frac{\partial}{\partial z_2}\Big|_{z_1=z_2=0}\begin{cases}\text{作用在 } P_H \text{ 右邊括號內的第一項 } e^{4(z_1+z_2+\cdots\cdots)}\text{，得 } 4^3+4\\\text{作用在 } P_H \text{ 右邊括號內的第二項 } e^{2z_1+4z_2+\cdots\cdots}\text{，得 } 2^3\cdot 4\end{cases}$$

故

$$\#(\mathscr{F}/\sim)=P_G\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ \frac{\partial}{\partial z_2}\right)\cdot P_H(e^{z_1+z_2+\cdots\cdots},e^{2(z_2+z_4+\cdots\cdots)})$$

$$=\frac{1}{4}(4^2+2^5+4^3\cdot 4+2^3\cdot 4)$$

$$=336.$$

卽將5本書，其中兩本相同，另三本相異，分給4位小朋友，其中兩位是雙胞胎，分法共有336種。

參　考　資　料

從邦塞開始，經坡里雅的承先啓後，到第普魯英爲止，他們在不同的時期，分別探討一系列的數數問題中的一環，環環銜接，層層漸進地追求得最優的計算公式，最後累積成一套完美的數數理論。這正是數學家們致力追求圓美的範例。

坡里雅算術這套理論，在圖形學與布爾代數，是相當重要的計算工具。有興趣的讀者；請進一步參閱下列參考資料。

Golomb 的論文〔3〕對邦塞算式有詳盡的介紹。坡里雅算式的原始資料是〔6〕，第普魯英算式的原始論文是〔2〕。本文內容，主要取材自〔4〕，另外〔5〕也涉及一些。〔1〕這本書的第五章，介紹坡里雅算術，內容很豐富，〔7〕中含坡里雅算式的一些應用。

〔1〕Beckenbach, E.F.: *Applied Combinatorial Math.*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.

〔2〕De Bruijn, N.G.: *Generalization of P'olya's Fundamental Theorem in Enumerative Combinatorial Analysis,* Ned. Akad. We*tenschap.*, *Proc.* Ser. A62, Indag. Math., 21: 59-79 (1956).

〔3〕Golomb, S.W.: *A Mathematical Theory of Discrete Classification,* proc. Fourth London Symp. Inform. Theory, Butterworth & Co., Ltd., London, 1961.

〔4〕Liu, C.L: *Introduction to Combinatorial Mathematics,* 九章出版社印行。

〔5〕Liu, C.L: *Elemets of Discrete Mathematics.* 宏明圖書公司印行。

〔6〕Pólya, G.: *Kombinatorische Anzahlbestimmungen. für Gruppen,* Graphen und Chemische. Verbindungen, Acta. Math, 68: 145-254, (1937)

〔7〕Pólya, G: *Sur* les *Types des Propositions Composées,* J. Symbolic Logic, 5: 98-103 (1940).

——本文作者現任教於師大數學系