數學傳播　41卷4期, pp. 92-96

# 模型引領 生成自然

鄒黎明 · 鄒　瑜 · 浦敘德

**摘要**: 解題研究是教師的一種重要能力, 模型引領是解決難題的一種手段, 多角度思考往往能夠發現新的解題方法, 在新的思考的基礎上可以發掘一些比較有價值變式, 對於教學中理清題目的內在聯繫有意想不到的效果。

**關鍵字**: 模型引領, 生成自然。

## 1. 試題呈現

**案例**: 如圖 1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形, $\angle BAC=\angle DAE=90°$, $AB=AC=2$, $O$ 爲 $AC$ 中點, 若點 $D$ 在直線 $BC$ 上運動, 連接 $OE$, 則在點 $D$ 運動過程中, 線段 $OE$ 的最小值是爲 (　　)

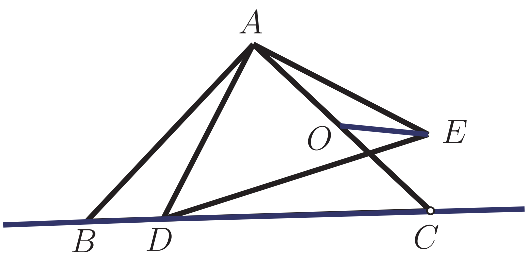


圖1

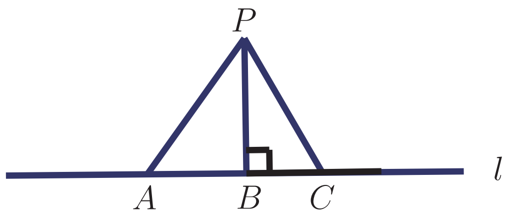


圖2

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) 1　(D) $\sqrt{2}$ (錫山區2016八年級數學上期末試卷)

本文對於這個習題的解題思路進行解析, 同時得到這個習題的一些變式。解題研究是教師的一種重要能力, 模型引領是解決問題的一種手段, 多角度思考往往能夠發現新的解題方法, 在新的思考的基礎上可以發掘一些比較有價值變式, 對於教學中理清題目的內在聯繫有意想不到的效果。

## 2. 模型引領

**分析**: 這個題目的思路源於對於運用“垂線段最短”模型的理解;

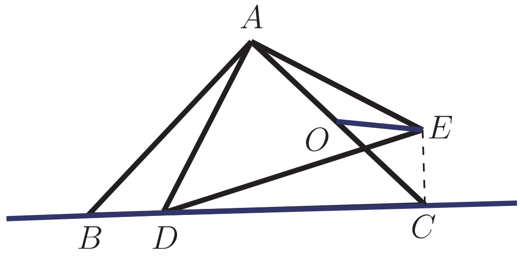


圖3

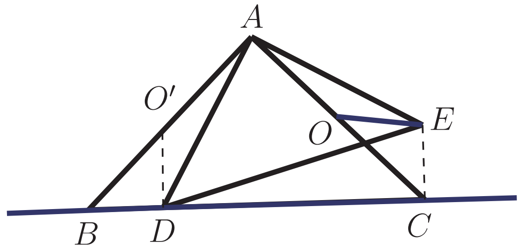


圖4

如圖2, 直線外一個定點 $P$, 一條定直線 $l$, 點 $A$、$B$、$C$ 在直線 $l$ 上, 如果 $PB\perp$ 直線 $l$, 則 $PB$ 的長最小。順著這個模型的特徵, 我們知道點 $O$ 是定點, 就是要得到點 $E$ 在一條定直線上移動。許多學生在這裡卡殼了, 有的人認爲 $OE\perp AC$ 時, 這樣得到最小值爲 1, 得出錯誤選擇之 $C$; 這個圖形中有旋轉全等圖形, 如圖 3, 連接 $CE$, 因爲 $\triangle ABC$、$\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形, 得到 $AB=AC$, $AD=AE$, $\angle BAC=\angle DAE$, 所以 $\angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$, 得到 $\angle BAD=\angle CAE$, 由“SAS”得到 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$, 這裡得到的東西可以有兩個截然不同的思考途徑;

**途徑**1: 這是大多數能夠解答出來的同學的方法, 我們把求 $\triangle ACE$ 中 $OE$ 的最小值, 轉化爲求 $\triangle ACE$ 的邊 $AC$ 上的中線的最小值, 更加進一步的是從 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$, 作出 $\triangle ABD$ 中 $AB$ 邊上的中點 $O'$, 連接 $O'D$, 這樣 $OE=O'D$, 變爲求 $O'D$ 的最小值問題, 這個思路產生就是我們希望找到定直線, 顯然 $BC$ 是定直線, $O'$ 是定點, 我們知道只要 $O'D\perp BC$, $O'D$ 的長取得最小值, 這時, $\angle B=45°, \angle BDO'=90°$, 得到 $\angle BO'D=45°=\angle B$, $O'D=BD=m$, 由畢氏定理, $2m^2=1$, $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 那麼, 得到正確選擇之 B;

**途徑**2: 我們從 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$, 可以得到 $\angle B=\angle ACE=45°$, 得到 $\angle BCE=90°$, 即 $CE\perp BC$, 這樣直線 $CE$ 就是定直線, 顯然只要 $OE\perp CE$, $OE$ 的長取得最小值, 這時 $\angle ACE=45°$, $\angle OEC=90°$, 得到 $\angle EOC=45°=\angle ACE$, 得到 $OE=CE=m$, 由畢氏定理, $2m^2=1$, $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 那麼, 得到正確選擇之 B; 這個思路簡單但是反而想到的同學比較少, 主要是把直線 $CE$ 判斷出定直線, 學生可能沒有意識到;

**點評**: 這兩個途徑都是由模型引領, 雖然兩個途徑利用的定直線有所不同, 但是都是朝著尋找定

直線來展開的。

## 3. 生成自然

當出現途徑 2 這個思路, 我們自然想到了如下變式:

### 3.1. 線聯

**變式**1: 如圖 5, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形, $\angle BAC = \angle DAE = 90°$, $AB = AC = 2$, $F$ 爲 $DE$ 中點, 若點 $D$ 在直線 $BC$ 上運動, 連接 $CF$, 則在點 $D$ 運動過程中, 線段 $CF$ 的最小值是爲 _________。

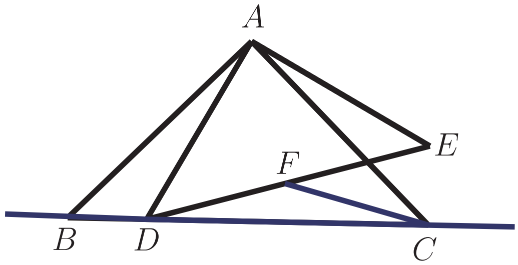

圖5

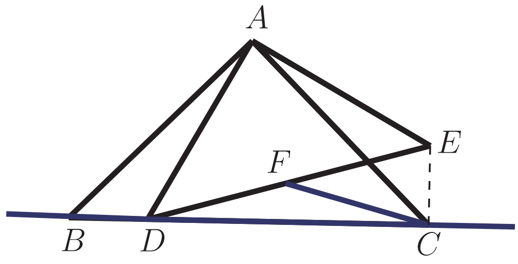

圖6

**分析**: 連接 $CE$, 可以得到 $\angle DCE = 90°$, 已知 $F$ 是 $DE$ 的中點, 得到 $CF = \dfrac{1}{2}DE$, 下面只要研究 $DE$ 長的最小值, 因爲 $DE = \sqrt{2}AD$ , 所以只要研究 $AD$ 的最小值, 這樣, 只要 $AD\perp BC$, $AD$ 取得最小值, 同時, $DE$ 取得最小值, 也就是 $CF$ 取得最小值。當 $AD\perp BC$ 時, $AD = \sqrt{2}$, $DE = 2$, $CF = 1$, 得到線段 $CF$ 的最小值是爲 1。

**變式**2: 如圖 1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形, $\angle BAC = \angle DAE = 90°$, $AB = AC = 2$, $O$ 爲 $AC$ 中點, 若點 $D$ 在直線 $BC$ 上運動, 連接 $OE$, 則在點 $D$ 從點 $B$ 運動到點 $C$ 過程中, 線段 $OE$ 掃過的區域面積爲 _________。

**分析**: 如圖 3, 連接 $CE$, 可以得到 $\angle DCE = 90°$, $BD = CE$, 點 $D$ 從點 $B$ 運動到點 $C$, 移動的路徑長等於 $BC = 2\sqrt{2}$, 從 $CE = BD$, 點 $E$ 在直線 $CE$ 上移動的路徑長也是 $2\sqrt{2}$, 又從 $OE\perp CE$, $OE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $OE$ 掃過的區域面積爲 $\dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$。

**點評**: 如果沒有想到上面途徑 2, 也許我們想不到這兩個很有價值的變式, 變式的自然生成依賴於多思善想, 小題目裡面也是有解題的一些大見解。

## 3.2. 面融

**變式**3: 如圖 7, $\triangle ABC\sim\triangle ADE$, $\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$, $AB=6$, $AC=8$, $O$ 爲 $AC$ 中點, 若點 $D$ 在直線 $BC$ 上運動, 連接 $OE$, 則在點 $D$ 運動過程中, 線段 $OE$ 的最小值是爲 ________。

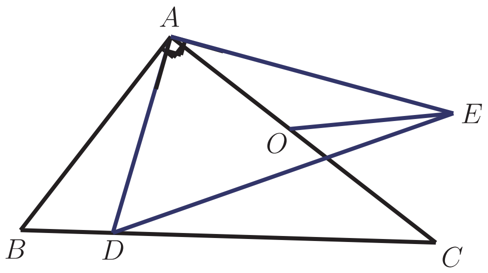


圖7

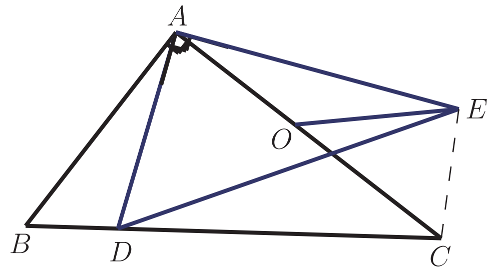


圖8

**分析**: 如圖 8, 連接 $CE$, $\triangle ABC\sim\triangle ADE$, 得到 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$, 得到 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}$, 從 $\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$, 得到 $\angle BAD=\angle CAE$, 得到 $\triangle ABD\sim\triangle ACE$, 得到 $\angle B=\angle ACE$, 從 $\angle BAC=90^\circ$, 得到 $\angle B+\angle ACB=90^\circ$, 得到 $\angle ACB+\angle ACE=90^\circ$, 得到 $CE\perp BC$, 線段 $OE$ 取得最小值, 只要 $OE\perp CE$, 這樣 $\angle OEC=\angle BAC, \angle OCE=\angle B$, 得到 $\triangle OEC\sim\triangle CAB$, 得到 $\dfrac{OE}{CA}=\dfrac{OC}{BC}$, 由畢氏定理得到 $BC=10$, 因爲 $O$ 是 $AC$ 中點, $OC=4$, 得到 $OE=\dfrac{8\times 4}{10}$。即線段 $OE$ 的最小值是爲 3.2。

**變式**4: 如圖9, $\triangle ABC\sim\triangle ADE$, $\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$, $AB=6$, $AC=8$, $F$ 爲 $DE$ 中點, 若點 $D$ 在直線 $BC$ 上運動, 連接 $CF$, 則在點 $D$ 運動過程中, 線段 $CF$的最小值是爲 ________。

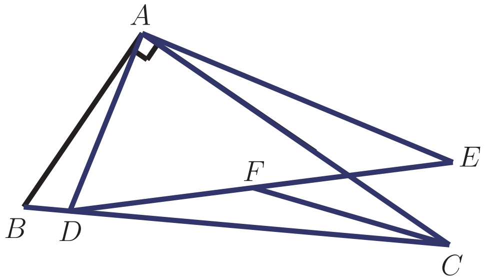


圖9

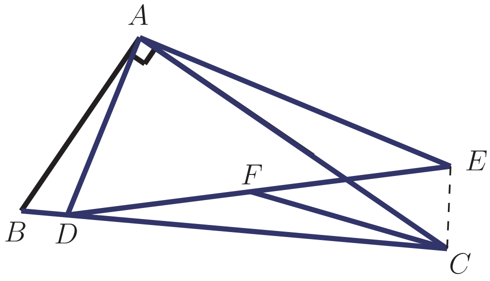


圖10

**分析**: 如圖 10, 連接 $CE$, 從 $\triangle ABC\sim\triangle ADE$, 得到 $CE\perp BC$, 從 $F$ 是 $DE$ 中點, 得到 $CF=\dfrac{1}{2}DE$, 於是只要求 $DE$ 的最小值, 考慮到 $\triangle ADE\sim\triangle ABC$, 也就是 $\triangle ADE$ 形狀不變, 也就是只要 $AD$ 取得最小值, 這樣, 得到 $AD\perp BC$, 所以 $\angle ADE+\angle EDC=90^\circ$, 結合 $\angle B+\angle ACB=90^\circ$, $\angle B=\angle ADE$, 得到 $\angle EDC=\angle ACB$, 又 $\angle ECD=\angle BAC=90^\circ$, 所以 $\triangle DCE\sim\triangle CAB$, 從對應中線的比等於相似比, $BC=10$, $\triangle ABC$ 斜邊上中線長爲 5, 得到

$$\frac{CF}{5}=\frac{DC}{AC}=\frac{AC}{AB}=\frac{8}{10}$$

得到 $CF=4$, 所以線段 $CF$ 的最小值是爲 4。

**點評**:變式3、4把等腰直角三角形的條件改爲兩個相似的直角三角形, 把全等部分的習題聯想到相似部分的習題, 從方法上找到瞭解決的共性, 對於學生的解題能力的提高有事半功倍的效果。

## 5. 反思

我們在教學之餘, 對於習題進行"點全、線聯、面融"式研究題目, 得到的教學資源極大的豐富了課堂內涵, 這些題組如果能夠合理的滲透在教學中其效果是顯然的。

## 參考文獻

1. 鄒黎明, 浦敘德。從一道新的格點中考作圖題的結構談起。中國數學教育, 第10期, 2016。
2. 浦敘德, 鄒黎明。借助曲尺模型探究一類最值問題。數學教學, 第4期, 2016。

—本文作者鄒黎明、鄒瑜任教中國江蘇省無錫市碩放中學, 浦敘德任職中國江蘇省無錫市新吳區教師發展中心—