數學傳播 41卷4期, pp. 89-91

# 關於初等對稱多項式的一類恒等式

吳 波・陳騎勇

下面這兩個恒等式是我們所熟知的:

(i) $(1-x_1x_2)^2+(x_1+x_2)^2=(1+x_1^2)(1+x_2^2)$;

(ii) $(1+x_1x_2)^2-(x_1+x_2)^2=(1-x_1^2)(1-x_2^2)$.

本文中我們將這兩個恒等式推廣到一般情形。

**定理** 1: 關於 $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ 的 $k$ 次初等對稱多項式記作 $\sigma_n^k$, 即: $\sigma_n^0=1$, $\sigma_n^1=\sum\limits_{l=1}^n x_l$,

$$\sigma_n^2=\sum_{1\le l<m\le n}^n x_lx_m,\cdots,\sigma_n^n=\prod_{m=1}^n x_m,$$

則

$$\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\sigma_n^{2k}\right)^2+\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k\sigma_n^{2k+1}\right)^2=\prod_{k=1}^n(1+x_k^2).$$

**證明**: 構造函數

$$f(x)=\prod_{k=1}^n(x-x_k), \tag{1}$$

而 $1+x_k^2=(x_k+i)(x_k-i)$, 因此由 (1) 式有:

$$\prod_{k=1}^n(1+x_k^2)=\prod_{k=1}^n(i-x_k)\cdot\prod_{k=1}^n(-i-x_k)=f(i)\cdot f(-i). \tag{2}$$

另一方面, 由根與係數關係知 (1) 式可展開為:

$$f(x)=\sum_{k=0}^n(-1)^k\sigma_n^k x^{n-k}. \tag{3}$$

而由 (3) 式有:

$$\begin{aligned}
f(i) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_n^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} i^{2k}\sigma_n^k i^{n-k} = i^n\sum_{k=0}^{n} i^k\sigma_n^k \\
&= i^n(\sigma_n^0 + i\sigma_n^1 - \sigma_n^2 - i\sigma_n^3 + \sigma_n^4 + i\sigma_n^5 - \cdots + \sigma_n^n i^n) \\
&= i^n((\sigma_n^0 - \sigma_n^2 + \sigma_n^4 - \sigma_n^6 + \cdots) + i(\sigma_n^1 - \sigma_n^3 + \sigma_n^5 - \sigma_n^7 + \cdots)) \\
&= i^n\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\sigma_n^{2k} + i\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k\sigma_n^{2k+1}\right). \qquad (4)
\end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned}
f(-i) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_n^k(-i)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} i^{2k}\sigma_n^k i^{3(n-k)} = i^{3n}\sum_{k=0}^{n} i^{-k}\sigma_n^k \\
&= i^{3n}\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\sigma_n^{2k} - i\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k\sigma_n^{2k+1}\right). \qquad (5)
\end{aligned}$$

(4)、(5) 兩式相乘可得:

$$f(i)\cdot f(-i) = \left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\sigma_n^{2k}\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k\sigma_n^{2k+1}\right)^2.$$

將上式代入 (2) 式即知定理 1 的結論成立。 □

上面的證明正好印證了法國數學家 Jacques Hadamard 的一句名言:「連接實數域中兩個真理之間的最短路徑是通過複數域」。

在定理 1 中, 如果諸 $x_m = 1$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, 則 $\sigma_n^k = C_n^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, 因此有:

**推論**:

$$\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k C_n^{2k}\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k C_n^{2k+1}\right)^2 = 2^n.$$

用同樣的方法, 還可以將本文開頭提到的恒等式 (ii) 推廣到一般情形, 即:

**定理** 2: 記號同定理 1, 則

$$\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\sigma_n^{2k}\right)^2 - \left(\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\sigma_n^{2k+1}\right)^2 = \prod_{k=1}^{n}(1 - x_k^2).$$

**證明**: 同定理 1 的證明中所設, 則

$$\prod_{k=1}^{n}(1-x_k^2)=\prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\cdot\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\cdot\prod_{k=1}^{n}(-1-x_k)$$
$$=(-1)^n\cdot f(1)\cdot f(-1). \tag{6}$$

而

$$f(1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_n^k=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\sigma_n^{2k}-\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\sigma_n^{2k+1}, \tag{7}$$

$$f(-1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_n^k(-1)^{n-k}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\sigma_n^k=(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\sigma_n^{2k}+\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\sigma_n^{2k+1}\right). \tag{8}$$

(7)、(8) 兩式相乘得:

$$f(1)\cdot f(-1)=(-1)^n\left(\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\sigma_n^{2k}\right)^2-\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\sigma_n^{2k+1}\right)^2\right).$$

將上式代入 (6) 式即知定理 2 的結論成立。 □

若 $x_m\in\mathbf{R}$ 且 $|x_m|<1$, 則 $\prod\limits_{k=1}^{n}(1-x_k^2)>0$, 由定理 2 可得:

**推論**: 若 $x_m\in\mathbf{R}$ 且 $|x_m|<1$ $(m=1,2,\ldots,n)$, 則

$$\left|\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\sigma_n^{2k}\right|>\left|\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\sigma_n^{2k+1}\right|.$$

一般地, 如定理 1、2 的證明過程所示, 如能將 $h(x)$ 在複數域內徹底分解, 那麼就可使用這種方法把 $\prod\limits_{k=1}^{n}h(x_k)$ 用 $\sigma_n^k$ $(k=0,1,2,\ldots,n)$ 表示出來。

—本文作者任教中國重慶市長壽龍溪中學—