數學傳播 41卷4期, pp. 78-88

商式定理

陳建燁

壹、前言

談到多項式除法, 大家都知道有所謂的「餘式定理」。但是對於多項式除法所得的「商式」, 一般能想到的, 就是除法原理 $f(x)=g(x)\cdot Q(x)+R(x)$, 其中用符號代表的商式 $Q(x)$, 但 $Q(x)$ 有更具體的表達式嗎? 或者說, 商式的係數存在著特定的規律嗎? 經過一番探索之後, 發現在特定的條件下, 答案是肯定的。

在這篇文章中, 將從一個很基本的多項式除法出發, 使用完全齊次對稱多項式的性質, 將 x^n 除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 所得商式與餘式的係數, 完全用 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 來表達, 得到並證明所謂的「**多項式除法基本定理**」: **設** $p_1,p_2,\ldots,p_m$ **全相異, 且** $n\ge m\ge 2$, **則**

$$x^n=\left[\prod_{1\le i\le m}(x-p_i)\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{n-m}h_j(p_1,p_2,\ldots,p_m)\cdot x^{n-m-j}\right]+\sum_{j=1}^{m}p_j^n\cdot\frac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(x-p_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(p_j-p_i)}$$

特別地, 就商式的係數而言, 可得所謂的「**商式定理**」:

設 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ **全相異, 且** $n\ge m\ge 2$, **則** x^n **除以** $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ **所得的商式的係數, 恰為** $p_1,p_2,\ldots,p_m$ **構成的「完全齊次對稱多項式」**$h_j(p_1,p_2,\ldots,p_m)$, **其中次數** j **由** 0 **到** $n-m$。

貳、本文

一、定義、記號與已知公式:

1. **完全齊次對稱多項式** (Complete Homogeneous Symmetric Polynomial)

定義: $h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\ge 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$, 稱爲「變數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的 k 次完全齊次對稱多項式」。特別地, $h_0(a_1,a_2,\ldots,a_n)=1$, 且 $h_k(a)=a^k$。

例: $h_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$ 。

例: $h_2(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ 。

例: $h_3(a,b)=a^3+b^3+a^2b+ab^2$ 。

2. **拉格朗日插值型式**

定義: $L_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^k}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}(a_i-a_j)}$, 稱爲「變數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的 k 次拉格朗日插值型式」。

註: 以分子的次方來定義 L 的下標。

例:

$$\begin{aligned}L_2(a_1,a_2,a_3)&=\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i^2}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq 3\\ j\neq i}}(a_i-a_j)}\\&=\frac{a_1^2}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{a_2^2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{a_3^2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\end{aligned}$$

例:

$$L_2(a,b,c)=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

3. $h-L$ **轉換公式**: $h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=L_{k+n-1}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ (**其中** $n\geq 2,\ k\geq 0$)

說明: 此一公式, 可將「完全齊次對稱多項式」與「拉格朗日插值型式」互相轉換。以下舉例說明公式的精神與用法, 在附錄中證明 $L_3(a,b,c)=h_1(a,b,c)$ 供讀者參考, 而詳細證明請見參考資料 [1]。

例:

$$L_{k+1}(a,b)=\frac{a^{k+1}}{a-b}+\frac{b^{k+1}}{b-a}=\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}=a^k+a^{k-1}b+\cdots+ab^{k-1}+b^k=h_k(a,b),$$

此爲 $n=2$ 的情形。

例: 對於

$$L_6(a,b,c)=\frac{a^6}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^6}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^6}{(c-a)(c-b)},$$

有 3 個變數 a,b,c, 先看出 $n=3$。再由 $k+(n-1)=6$, 得 $k=4$。於是有 $L_6(a,b,c)=h_4(a,b,c)$。也可以這樣看, $\dfrac{a^6}{(a-b)(a-c)}$ 的分母的次方之所以是 2, 是因爲變數個數爲 3, 用 a 分別去減 b,c 所產生。而整個分式化簡之後所得齊次式的次數爲 4, 可看成用分子的 6 次方, 減去分母的 2 次方而得。

再舉一例, 對於

$$\begin{aligned}L_9(a,b,c,d)=&\frac{a^9}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^9}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^9}{(c-a)(c-b)(c-d)}\\&+\frac{d^9}{(d-a)(d-b)(d-c)},\end{aligned}$$

首先, 有 4 個變數 a,b,c,d, 則 $n=4$。接著, $\dfrac{a^9}{(a-b)(a-c)(a-d)}$ 的分母的次方是 3, 分子的次方是 9, 所以化簡後所得齊次式的次數爲 $9-3=6$, 於是有 $L_9(a,b,c,d)=h_6(a,b,c,d)$。也就是說, L 與 h 的下標之差, 恰爲變數個數減 1。

一般地, 對於 $L_{k+n-1}(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^{k+n-1}}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}$, 有 n 個變數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$。$\dfrac{a_i^{k+n-1}}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}$ 的分母的次方是 $n-1$, 分子的次方是 $k+(n-1)$, 相減所得的 k, 即爲化簡後所得的齊次式的次數, 即 $L_{k+n-1}(a_1,a_2,\ldots,a_n)=h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)$。

由於 L 與 h 的下標之差, 恰爲變數個數減 1, 因此 $h-L$ 轉換公式, 也可寫成:

$$L_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=h_{k-(n-1)}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

例: $L_9(a,b,c,d)=h_{9-(4-1)}(a,b,c,d)=h_6(a,b,c,d)$ 。

在本篇文章的主要工作中, 用到 $h-L$ 轉換公式的情形:

(1) $L_k(a,b,c)=h_{k-2}(a,b,c)$ (於第6頁)

(2) $L_n(p_1,p_2,\ldots,p_m,x)=h_{n-m}(p_1,p_2,\ldots,p_m,x)$
($L_n(p_1,p_2,\ldots,p_m,x)$ 有 $m+1$ 個變數 $p_1,p_2,\ldots,p_m,x$, L 的下標爲 n,
則 h 的下標爲 $n-(m+1-1))=n-m$) (於第7頁)

(3) $L_{n+4}(\alpha,\beta,\gamma)=h_{n+2}(\alpha,\beta,\gamma)$ (於第9頁)

4. 基本對稱多項式

定義: $e_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ 0\le\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\le 1}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$, 稱爲「變數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的 k 次基本對稱多項式」。

例: $e_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ 0\le\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\le 1}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$ 。

例: $e_0(a,b,c)=1,\ e_1(a,b,c)=a+b+c,\ e_2(a,b,c)=ab+bc+ca,\ e_3(a,b,c)=abc$ 。

例: $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-e_1(a,b,c)x^2+e_2(a,b,c)x-e_3(a,b,c)$ 。

二、探索過程:

1. 從 $x^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})+a^n$ 出發, 有:

$$x^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})+a^n \tag{1}$$
$$x^n=(x-b)(x^{n-1}+bx^{n-2}+\cdots+b^{n-2}x+b^{n-1})+b^n \tag{2}$$

設 $a\neq b$, 將 $(1)\times\dfrac{x-b}{a-b}+(2)\times\dfrac{x-a}{b-a}$,

可得等號的左邊爲 $x^n\cdot\left(\dfrac{x-b}{a-b}+\dfrac{x-a}{b-a}\right)=x^n\cdot 1=x^n$

而等號的右邊爲

$$\begin{aligned}
&(x-a)(x-b)\Big(\frac{1}{a-b}x^{n-1}+\frac{a}{a-b}x^{n-2}+\frac{a^2}{a-b}x^{n-3}+\cdots+\frac{a^{n-2}}{a-b}x+\frac{a^{n-1}}{a-b}\Big)+a^n\cdot\frac{x-b}{a-b}\\
&+(x-b)(x-a)\Big(\frac{1}{b-a}x^{n-1}+\frac{b}{b-a}x^{n-2}+\frac{b^2}{b-a}x^{n-3}+\cdots+\frac{b^{n-2}}{b-a}x+\frac{b^{n-1}}{b-a}\Big)+b^n\cdot\frac{x-a}{b-a}\\
&=(x-a)(x-b)\Big(\frac{a-b}{a-b}x^{n-2}+\frac{a^2-b^2}{a-b}x^{n-3}+\cdots+\frac{a^{n-2}-b^{n-2}}{a-b}x+\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\Big)\\
&\quad+\Big(a^n\cdot\frac{x-b}{a-b}+b^n\cdot\frac{x-a}{b-a}\Big)\\
&=(x-a)(x-b)\Big[x^{n-2}+(a+b)x^{n-3}+\cdots+(a^{n-2}+a^{n-3}b+\cdots+b^{n-2})\Big]\\
&\quad+\Big(a^n\cdot\frac{x-b}{a-b}+b^n\cdot\frac{x-a}{b-a}\Big)\\
&=(x-a)(x-b)\Big[h_0(a,b)x^{n-2}+h_1(a,b)x^{n-3}+\cdots+h_{n-3}(a,b)x+h_{n-2}(a,b)\Big]\\
&\quad+\Big(a^n\cdot\frac{x-b}{a-b}+b^n\cdot\frac{x-a}{b-a}\Big)
\end{aligned}$$

至此, 可得

$$\begin{aligned}x^n=&(x-a)(x-b)\Big[h_0(a,b)x^{n-2}+h_1(a,b)x^{n-3}+\cdots+h_{n-2}(a,b)\Big]\\&+\Big(a^n\cdot\frac{x-b}{a-b}+b^n\cdot\frac{x-a}{b-a}\Big).\end{aligned}$$

註: 上式相當於

$$\begin{aligned}x^n=&(x-a)(x-b)\Big(\frac{a-b}{a-b}x^{n-2}+\frac{a^2-b^2}{a-b}x^{n-3}+\cdots+\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\Big)\\&+\frac{a^n-b^n}{a-b}x-(ab)\cdot\Big(\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\Big)\end{aligned}$$

在上式中, 以 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 與 $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 代入, 由費氏數列的 Binet 公式, 可得 $x^n=(x^2-x-1)\cdot(F_1x^{n-2}+F_2x^{n-3}+\cdots+F_{n-2}x+F_{n-1})+F_nx+F_{n-1}$, 此式說明了 x^n 除以 x^2-x-1 所得的商式係數, 恰爲著名的費氏數列。

2. 從 $x^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})+a^n$ 出發, 有:

$$x^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})+a^n \tag{1}$$

$$x^n=(x-b)(x^{n-1}+bx^{n-2}+\cdots+b^{n-2}x+b^{n-1})+b^n \tag{2}$$

$$x^n=(x-c)(x^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+c^{n-2}x+c^{n-1})+c^n \tag{3}$$

設 a,b,c 全相異, 將 $(1)\times\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+(2)\times\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+(3)\times\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$, 可得等號的左邊爲 $x^n\cdot\Big[\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\Big]=x^n\cdot 1=x^n$, (註1)

而等號的右邊爲

$$\begin{aligned}&(x-a)(x-b)(x-c)\Big(\frac{1}{(a-b)(a-c)}x^{n-1}+\frac{a}{(a-b)(a-c)}x^{n-2}+\cdots+\frac{a^{n-1}}{(a-b)(a-c)}\Big)\\&\quad+a^n\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+(x-b)(x-a)(x-c)\Big(\frac{1}{(b-a)(b-c)}x^{n-1}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}x^{n-2}+\cdots\\&\quad+\frac{b^{n-1}}{(b-a)(b-c)}\Big)+b^n\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+(x-c)(x-a)(x-b)\Big(\frac{1}{(c-a)(c-b)}x^{n-1}\\&\quad+\frac{c}{(c-a)(c-b)}x^{n-2}+\cdots+\frac{c^{n-1}}{(c-a)(c-b)}\Big)+c^n\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\\&=(x-a)(x-b)(x-c)\Big[L_2(a,b,c)x^{n-3}+L_3(a,b,c)x^{n-4}+\cdots+L_{n-2}(a,b,c)x\end{aligned}$$

$$+L_{n-1}(a,b,c)\Big]+a^n\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^n\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^n\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \qquad \text{(註2)}$$

$$=(x-a)(x-b)(x-c)\Big[h_0(a,b,c)x^{n-3}+h_1(a,b,c)x^{n-4}+\cdots+h_{n-4}(a,b,c)x$$

$$+h_{n-3}(a,b,c)\Big]+a^n\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^n\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^n\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$(\because\ L_k(a,b,c)=h_{k-2}(a,b,c))$$

至此, 可得

$$x^n=(x-a)(x-b)(x-c)\Big[h_0(a,b,c)x^{n-3}+h_1(a,b,c)x^{n-4}+\cdots+h_{n-4}(a,b,c)x$$

$$+h_{n-3}(a,b,c)\Big]+a^n\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^n\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^n\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

意義: 由此式可知, x^n 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 的商式係數, 正是 a,b,c 三變數構成的「完全齊次對稱多項式」$h_j(a,b,c)$, 其中次數 j 由 0 到 $n-3$。

註1: 將 $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$ 之證明置於附錄。

註2: 將 $L_0(a,b,c)=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=0$ 與 $L_1(a,b,c)=\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}=0$ 之證明置於附錄。

三、主要定理:

由以上的探索過程, 歸納可得以下的定理:

多項式除法基本定理: 設 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 全相異, 且 $n\geq m\geq 2$, 則

$$x^n=\left[\prod_{1\le i\le m}(x-p_i)\right]\left[\sum_{j=0}^{n-m}h_j(p_1,p_2,\ldots,p_m)x^{n-m-j}\right]+\sum_{j=1}^{m}p_j^n\frac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\neq j}}(x-p_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\neq j}}(p_j-p_i)}.$$

證明:

$$\frac{x^n-\sum\limits_{j=1}^{m}p_j^n\dfrac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(x-p_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(p_j-p_i)}}{\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)}=\frac{x^n}{\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)}-\sum_{j=1}^{m}p_j^n\frac{\left(\dfrac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(x-p_i)}{\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)}\right)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(p_j-p_i)}$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{x^n}{\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)}+\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j^n}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(p_j-p_i)(p_j-x)}=L_n(p_1,p_2,\ldots,p_m,x)\\
&=h_{n-(m+1-1)}(p_1,p_2,\ldots,p_m,x)\qquad(\text{由 } h-L \text{ 轉換公式})\\
&=\sum_{j=0}^{n-m}h_j(p_1,p_2,\ldots,p_m)x^{n-m-j}\qquad(\text{將齊次式按照 } x \text{ 的次方降冪展開})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ x^n=\Bigg[\prod_{1\le i\le m}(x-p_i)\Bigg]\Bigg[\sum_{j=0}^{n-m}h_j(p_1,p_2,\ldots,p_m)x^{n-m-j}\Bigg]+\sum_{j=1}^{m}p_j^n\frac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(x-p_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(p_j-p_i)},\text{得證。}$$

意義: x^n 除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 的商式爲 $\sum\limits_{j=0}^{n-m}h_j(p_1,p_2,\ldots,p_m)x^{n-m-j}$, 餘式爲 $\sum\limits_{j=1}^{m}p_j^n\dfrac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(x-p_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(p_j-p_i)}$, 此式將 x^n 除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 所得商式與餘式的係數, 完全用 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 來表達, 刻劃了多項式除法的內在架構, 故稱之爲「多項式除法基本定理」。

特別地, 只著眼於商式的係數時, 可得所謂的「商式定理」:

> **商式定理**: 設 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 全相異, 且 $n\ge m\ge 2$, 則 x^n 除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 所得的商式的係數, 恰爲 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 構成的「完全齊次對稱多項式」$h_j(p_1,p_2,\ldots,p_m)$, 次數 j 由 0 到 $n-m$。

四、應用:

(一) 對稱多項式的 $e-h$ 恆等式

將

$$x^n = \left[\prod_{1\le i\le m}(x-p_i)\right]\left[\sum_{j=0}^{n-m}h_j(p_1,p_2,\ldots,p_m)x^{n-m-j}\right]+\sum_{j=1}^{m}p_j^n\frac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(x-p_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(p_j-p_i)}$$

一式改寫成等價的 $x^n=(x^m-e_1x^{m-1}+\cdots+(-1)^ke_kx^{m-k}+\cdots+(-1)^me_m)(h_0x^{n-m}+h_1x^{n-m-1}+\cdots+h_kx^{n-m-k}+\cdots+h_{n-m-1}x+h_{n-m})+R(x)$, 其中

$$R(x)=\sum_{j=1}^{m}p_j^n\frac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(x-p_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(p_j-p_i)}$$

$\Rightarrow \deg R(x)\le m-1$ 。 (註1)

設 m 爲定數, 取 $n\ge 2m$, 比較式子等號兩邊 x^m 的係數, 則等號左邊是 0 ($\because\ n\ge 2m>m$),

右邊是 $h_{n-m}-e_1h_{n-m-1}+\cdots+(-1)^ke_kh_{n-m-k}+\cdots+(-1)^me_mh_{n-2m}$,

即得對所有固定的 m, 當 $n\ge 2m$ 時,

$$h_{n-m}-e_1h_{n-m-1}+\cdots+(-1)^ke_kh_{n-m-k}+\cdots+(-1)^me_mh_{n-2m}=0$$

恆成立。令 $N=n-m$, 則 $n\ge 2m\Leftrightarrow N\ge m$, 依此可將上述事實寫成:

對所有固定的 m, 當 $N\ge m$ 時,

$$h_N-e_1h_{N-1}+\cdots+(-1)^ke_kh_{N-k}+\cdots+(-1)^me_mh_{N-m}=0$$

恆成立。亦即對所有固定的 m, 當 $N\ge m$ 時, $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^ke_kh_{N-k}=0$ 恆成立。

此恆等式刻畫了基本對稱多項式 e_k 與完全齊次對稱多項式 h_k 的關聯性。另外, $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^ke_kh_{N-k}=0$ 也說明了 $\langle h_n\rangle$ 構成一個 m 階遞迴數列。

例: 當 $m=3$ 時, 有 $h_N-e_1h_{N-1}+e_2h_{N-2}-e_3h_{N-3}=0$, 對 $N\ge 3$ 皆成立。 (註2)

註1: 此處用 e_k 表示 $e_k(p_1,p_2,\ldots,p_m)$, 用 h_k 表示 $h_k(p_1,p_2,\ldots,p_m)$。

註2: 此處用 h_k 表示 $h_k(p_1,p_2,p_3)$。

(二) Padovan **數列 (巴都萬數列)**

定義 Padovan 數列 $\langle P_n \rangle$: $\begin{cases} P_0 = P_1 = P_2 = 1 \\ P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \end{cases}$ 。(參考資料 [2])
數列的前幾項爲 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, $\cdots$ 。

設其特徵方程式 $x^3 - x - 1 = 0$ 的三根爲 α, β, γ, 由參考資料 [3], 知數列的一般項爲

$$P_n = \frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\alpha^n + \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\beta^n + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}\gamma^n.$$

本文在此給出 P_n 一般項的另一個表達式:

$$P_n = \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\alpha^{n+4} + \frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\beta^{n+4} + \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\gamma^{n+4}. \quad \text{(證明見附錄)}$$

意義: 此一表達式將 P_n 改寫成拉格朗日型式 $L_{n+4}(\alpha, \beta, \gamma)$, 由 $h - L$ 轉換公式, 可再變成 $h_{n+2}(\alpha, \beta, \gamma)$, 即

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\alpha^{n+4} + \frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\beta^{n+4} + \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\gamma^{n+4} \\ &= L_{n+4}(\alpha, \beta, \gamma) = h_{n+2}(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned}$$

得到關係式: $P_n = h_{n+2}(\alpha, \beta, \gamma)$, 其中 $n \geq 0$, 即Padovan 數列可用「完全齊次對稱多項式」表示。此式也可寫成 $h_n(\alpha, \beta, \gamma) = P_{n-2}$, 其中 $n \geq 2$ 。

應用: 由商式定理, 取 $m = 3$, 且 p_1, p_2, p_3 分別爲 α, β, γ (即 $x^3 - x - 1 = 0$ 的三根), 可得

$$\begin{aligned} x^n = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)[&h_0(\alpha, \beta, \gamma)x^{n-3} + h_1(\alpha, \beta, \gamma)x^{n-4} + \cdots + h_{n-4}(\alpha, \beta, \gamma)x \\ &+ h_{n-3}(\alpha, \beta, \gamma)] + R(x), \end{aligned}$$

其中 $R(x)$ 爲 x^n 除以 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 所得的餘式。於是有

$$x^n = (x^3 - x - 1)[P_{-2}x^{n-3} + P_{-1}x^{n-4} + P_0x^{n-4} + \cdots + P_{n-6}x + P_{n-5}] + R(x). \quad \text{(註)}$$

此式說明了當我們用 x^n 除以 $x^3 - x - 1$ 時, 所得的商式係數, 恰好爲 Padovan 數列。

例: 由長除法可得

$$x^{10} = (x^3 - x - 1)(1x^7 + 0x^6 + 1x^5 + 1x^4 + 1x^3 + 2x^2 + 2x + 3) + 4x^2 + 5x + 3.$$

註: P_{-1} 與 P_{-2} 的值可由遞迴關係 $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ 來決定。

例: 由 $P_2 = P_0 + P_{-1}$, 得 $P_{-1} = 0$。由 $P_1 = P_{-1} + P_{-2}$, 得 $P_{-2} = 1$ 。

參、結語

有「餘式定理」, 爲何沒有「商式定理」? 相信部份讀者腦海也曾經閃過此一念頭。

本篇文章的出發點並非是要標新立異, 而是在探索之後, 發覺多項式除法實有其更深入的內在結構: 除法原理 $f(x)=g(x)\cdot Q(x)+R(x)$ 之中, 抽象而需用演算法一步步求出的商式 $Q(x)$, 在最根本的情形, 即 x^n 除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$, 其中 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 全相異, 此時 $Q(x)$ 可以用具體的公式 $h_j(p_1,p_2,\ldots,p_m)$ 加以表達, 特將此一事實, 命名爲「商式定理」。當然, 此一命名是否恰當, 就有賴各位讀者作出判斷與指教了。

在多項式除法的過程中, 出現了人們熟知的費氏數列 (參考資料 [4]), 此一奇特現象, 背後有其必然性: 一方面, x^n 除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 的商式的係數, 構成數列 $\langle h_n\rangle$, 另一方面, 本文也證明了 $\langle h_n\rangle$ 是遞迴數列。也就是說, 透過「商式定理」, 本文說明了爲何在多項式除法的過程中, 會出現遞迴數列。相信除此之外,「商式定理」應該可以有其他更有趣更有意義的應用, 筆者相當期待。

附錄

1. $L_3(a,b,c)=h_1(a,b,c)$

證明:

$$
\begin{aligned}
L_3(a,b,c)&=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{(c-b)(c-a)(b-a)}\\
&=\frac{\begin{vmatrix}1&a&a^3\\1&b&b^3\\1&c&c^3\end{vmatrix}}{(c-b)(c-a)(b-a)}=\frac{\begin{vmatrix}1&a&a^3\\0&b-a&b^3-a^3\\0&c-a&c^3-a^3\end{vmatrix}}{(c-b)(c-a)(b-a)}=\frac{(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&b^2+ba+a^2\\1&c^2+ca+a^2\end{vmatrix}}{(c-b)(c-a)(b-a)}\\
&=\frac{(b-a)(c-a)[(c^2-b^2)+(c-b)a]}{(c-b)(c-a)(b-a)}=\frac{(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}{(c-b)(c-a)(b-a)}\\
&=a+b+c=h_1(a,b,c)
\end{aligned}
$$

2. $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$

證明: 令

$$
f(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\Rightarrow f(a)=f(b)=f(c)=1
$$

$$
\because\quad \deg f(x)\le 2\Rightarrow f(x)=1
$$

3. (1) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=0$

(2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}=0$

證明:

(1) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{(c-b)+(a-c)+(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)}=0$

(2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)}=0$

4. $P_n=\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\alpha^{n+4}+\dfrac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\beta^{n+4}+\dfrac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\gamma^{n+4}.$

證明: 一方面, x^3-x-1 的三根爲 $\alpha,\beta,\gamma\Rightarrow x^3-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\Rightarrow$ $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-1-1=-1\Rightarrow(1-\beta)(1-\gamma)=\dfrac{1}{\alpha-1}$

另一方面, 注意到 $x^5-x^4-1=(x^3-x-1)(x^2-x+1)$ (參考資料 [5])

$\Rightarrow\ \alpha^5-\alpha^4-1=(\alpha^3-\alpha-1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$

$\Rightarrow\ \alpha^4(\alpha-1)=1$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{\alpha-1}=\alpha^4$

綜合以上討論, 可得 $(1-\beta)(1-\gamma)=\alpha^4$, 同理可證$(1-\alpha)(1-\gamma)=\beta^4$ 與 $(1-\alpha)(1-\beta)$ $=\gamma^4$, 可得

$$\begin{aligned}P_n&=\frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\alpha^n+\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\beta^n+\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\gamma^n\\&=\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\alpha^{n+4}+\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\beta^{n+4}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\gamma^{n+4},\end{aligned}$$ 得證。

参考資料

1. 陳建燁。推廣的 Vandermonde 行列式(最右行升次型)。高中數學學科中心電子報第 114 期。
2. 廖信傑。用矩陣方法探討三階遞迴數列。數學傳播季刊, 38(1), 36-55, 2014。
3. mathworld.wolfram.com/PadovanSequence.html。
4. 陳建燁。多項式除法與遞迴數列。高中數學學科中心電子報第108期。
5. 陳建燁。遞迴數列的「特徵多項式」與「線性衍生遞迴式」。數學傳播季刊, 40(4), 57-62, 2016。

—本文作者任教台北市立第一女子高級中學—