數學傳播 41卷4期, pp. 69-77

三宅一生的服裝設計與扭棱摺疊

常文武 · 王儷娟 · 呂安雲

奇美博物館 2016 年底曾舉辦長達半年的「紙上奇蹟」特展, 期間展出的一件精品是利用摺紙概念設計的摺疊連身裙。這是由時尚圈享有國際盛名的三宅一生 (Issey Miyake) 所領導的設計團隊 (Reality Lab) 共同研發創作的 132 5系列之一。這一系列於 2010 年一推出即廣受各方讚譽 [1] (http://www.tokyofashiondiaries.com/132-5/)。

132 5 這系列的概念時裝設計, 共同點是可以從摺疊成平面的 2D 圖形, 在拉起的瞬間即轉化成可穿上身的 3D 立體造型時裝。正如設計者對「132 5」代碼的解釋:"1"是指每件服裝是由一整塊布做成, "3"意指其三維空間的立體造形, "2"爲其摺疊成平面時的二維形狀, 數字之間空一格意味著從「平面的」到「穿上身」的時間, "5"代表服裝的轉化有五種以上的可能性。

被設計者津津樂道而且廣受人們讚揚的這件時裝到底有什麼新奇之處呢?

原來, 三宅設計團隊會發展此時裝系列, 源自三谷純 (Jun Mitani) 的技術支持和布施知子 (Tomoko Fuse) 的理論啟發, 設計中巧妙運用了摺紙技術和平面幾何學知識! 不過, 讀者只要有初中數學程度, 經過解讀也能弄懂其內在的數學關係。那就讓我們來充當這個解讀者吧!

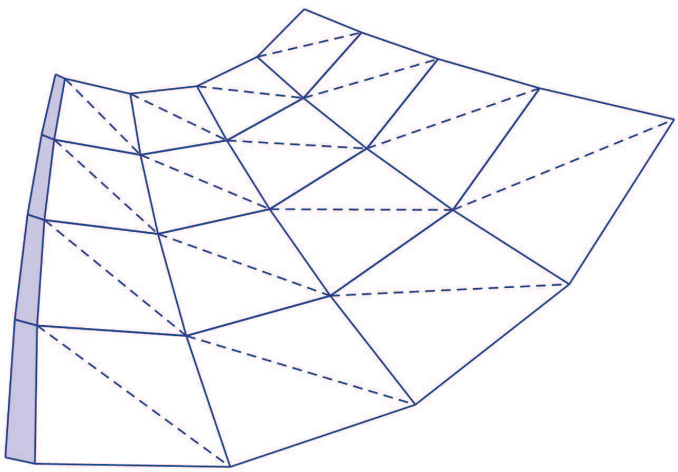

圖 1: 衣服的展開圖

首先, 我們需要親自做一個衣服的微縮紙樣。步驟如下:

1. 照著圖 1 的樣式列印下來。
2. 依輪廓剪下。(圖 2)
3. 用一支無墨原子筆刻畫上面的摺痕。(圖3)
4. 將左右側邊黏合。(圖4)
5. 照摺痕從下到上, 依山線和谷線 (實線爲山線, 折疊時保持上凸, 虛線爲谷線, 折疊時使其下凹) 摺疊好, 最終壓平成型。(圖 5–7)

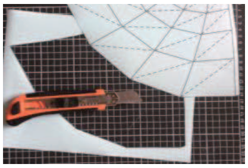

圖 2: 刻圖

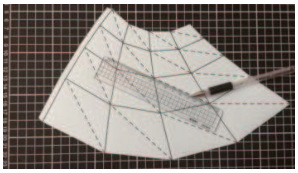

圖 3: 描線

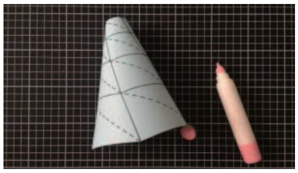

圖 4: 黏合

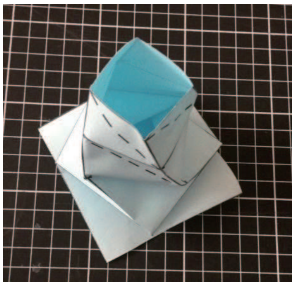

圖 5: 摺疊

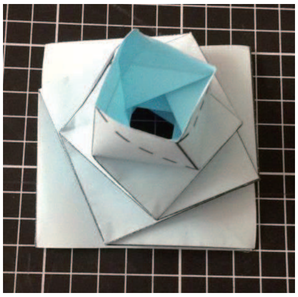

圖 6: 摺疊

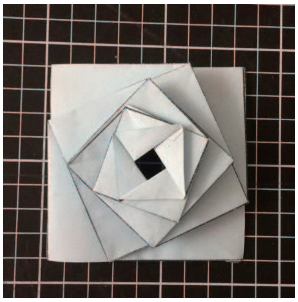

圖 7: 成型

製作完成後, 就進入解讀階段。

第一個問題是: 這些摺痕是怎麼設計出來的?

簡而言之, 這是一個從基本圖形 (圖 1 中左下角) 經過一系列旋轉和大小伸縮變化產生的圖。所以關鍵要解釋「基本圖形」的由來。

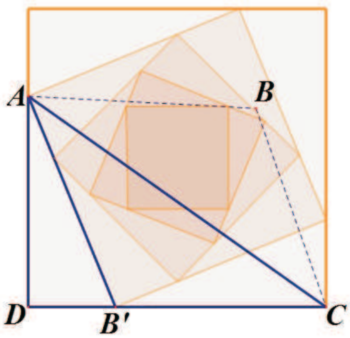

圖 8

圖 8 顯示的圖形是摺平後的衣服。其中基本圖形 $ABCD$ 經過摺疊形成了三角形 ACD, 並且 D、B'、C 三點共一線。

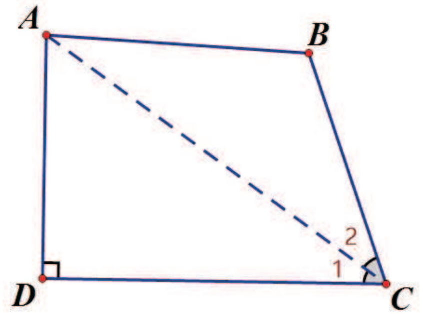

圖 9

圖 9 是將圖 8 中基本圖形 (也是圖 1 左下角) 單獨繪出以便考察, 它是怎樣的一個四邊形呢?

圖中除了有一個直角 $\angle D$ 以外, 還有一點是對角線 $\overline{CA}$ 平分 $\angle BCD$, 即 $\angle 1 = \angle 2$。這可從圖 8 中 D、B'、C 三點一線推得。此外, 由圖 9 內部正方形經四次旋轉變正可見正方形每次反時針轉動 22.5° 角度。這一點等價於 $\overline{AD} : \overline{DC} = 1 : \sqrt{2}$ 。隨後證明。

經過這一番解讀, 這個四邊形的形狀就確定了。

用一張 A4 紙可以快速摺出一個這樣的圖形。因爲 A4 紙是具有長寬比爲 $\sqrt{2} : 1$ 特徵的, 所以我們可以直接摺其對角線得到圖 9 中的三角形 ADC。至於三角形 ABC 可以將 CD 經過摺對角線 AC 到達的位置確立爲 CB 所在直線。而 B 的位置就只要利用 $\overline{BC} = \overline{AD}$ 就可確定下來。

請讀者再來列印四個基本圖形拼接成的圖 10, 它正是圖 1 最下方一層的「扇環」裙擺。

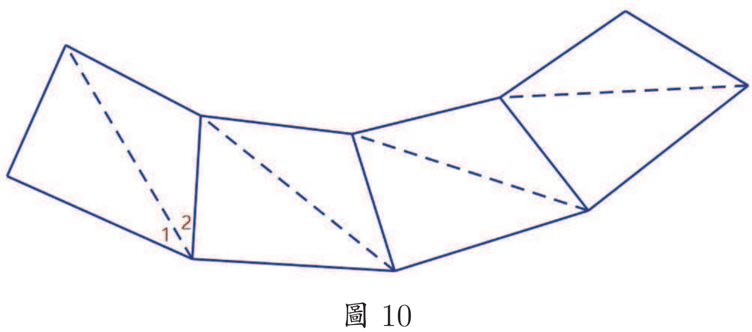

圖 10

針對這個「扇環」, 試著重建上面所有的摺痕並按照摺痕的引導形成圖 11 的樣子。此時, 裙擺折平後的底部正方形出現了!

圖 11

前文提到 $\sqrt{2}:1$ 這個奇怪的比, 現在可以解釋一下了。請看圖 12, 爲了讓每個正方形在收縮的同時轉動相同的度數, 使得第四個正方形與第一個正方形各邊平行, 必須讓 $\angle 3=\angle 4=\angle 5=\angle 6=22.5^\circ$ 。

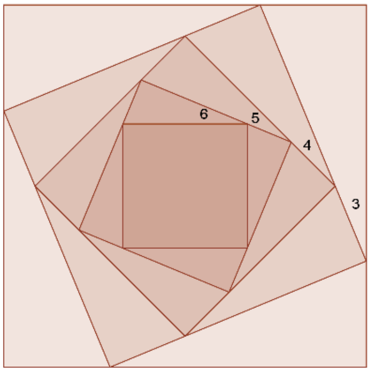

圖 12

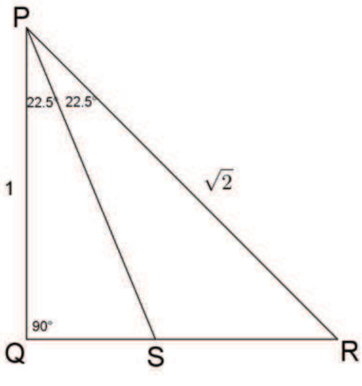

圖 13

在圖 13 所示等腰直角三角形 PQR 中, $\overline{QS}:\overline{SR}=\overline{PQ}:\overline{PR}=1:\sqrt{2}$ 且 $\overline{QS}+\overline{SR}=\overline{PQ}=1$

$$\therefore\ \overline{QS}=1\times\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$

由此可知圖 14 中,

$$\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{AD}:(\overline{DB'}+\overline{B'C})=\overline{AD}:(\overline{DB'}+\overline{AD})=1:[(\sqrt{2}-1)+1]=1:\sqrt{2}$$

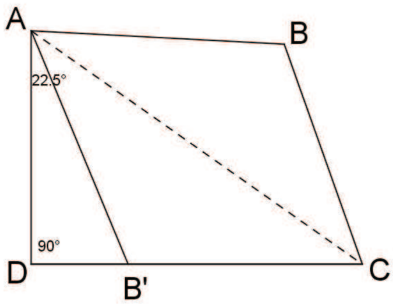

圖 14

探索中我們已經知道 $1:\sqrt{2}$ 這個比對應於一個特殊的旋轉角, 它應該可以改變, 無非是將旋轉角變化爲不同的角度而已。

果然, 一個不一樣的裙子設計在改變直角邊的兩股之比後得到了。如圖 15, 從效果看正方形的基底保持不變, 但旋轉角變爲 30° 左右。同時, 裙子變短了些。這樣的超短裙估計只能給跳天鵝湖的芭蕾舞者穿了。

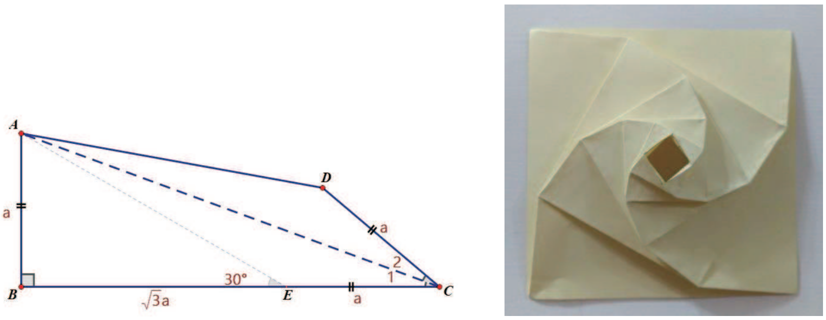

圖 15 : 變化了的基本形和相應的摺成效果圖

既然基本形的長寬比可以有變化, 那讓我們再繼續探究第二個問題, 如果我們只求整體的結構能在 2 維和 3 維之間切換, 那麼是否會得到底部是正 N 邊形的其它設計?

首先, 讓我們先界定一個概念, 給出基本圖形的明確定義:

N-**扭棱基本形**: 稱具有一組對邊相等的凸四邊形爲 N-扭棱基本形, 如果 N 個這樣的四邊形依對應相等的邊首尾相連, 黏合形成一個環後, 經每個圖形的對角線以及拼接邊來回摺疊, 最終可摺平成爲一個帶孔的正 N 邊形。

需要注意的一點是, 同爲 N-扭棱基本形製成的外顯樣貌還有所不同。例如形成的 N 邊形可以直接在外部顯現, 也可以藏在裏面, 外面以螺線的型態呈現。但他們的摺製原理相同, 只是基本形的形狀大小影響了摺疊時的角度, 因此, 我們能在此以統一的數學規律來解釋 (如圖 12 的兩種變化)。

那麼, 什麼樣的凸四邊形有資格成爲 N-扭棱基本形呢? 經過多次嘗試和歸納, 我們總結得出以下的定理。

定理: 已知凸四邊形有一組對邊相等, 它們與夾在其間的較長對角線形成一對內錯角。這對內錯角之和如果能整除 $360°$, 那麼這四邊形 $ABCD$ 就是一個 N-扭棱基本形。其中 N 就是相除所得的正整數商。

在證明定理前, 先看兩個實例。

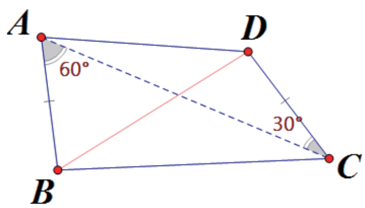

圖 16

例如, 在圖 16 中, 凸四邊形 ABCD 滿足: $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{AC}>\overline{BD}$, $\angle BAC+\angle ACD=90°$, 它是一個以 $\overline{AC}$ 爲扭摺棱的 4-扭棱基本形。

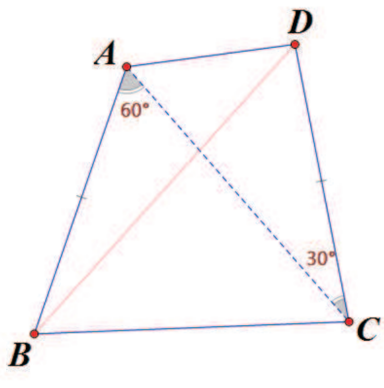

圖 17

又如, 在圖 17 所示的凸四邊形中, 儘管 $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\angle BAC+\angle ACD=90^\circ$, 然而 $\overline{AC}<\overline{BD}$, 所以它不是一個以 AC 爲扭摺棱的 4-扭棱基本形。

下面即得出定理的證明:

證明: 由於旋轉的對稱性, 我們只需證明兩個基本圖形在沿著對角線摺疊後的圖形按照對應邊拼接, 能形成了一個符合正 N 邊形的內角的拼接角, 並且中間留有空隙以便形成內圈的正 N 邊形。

不失一般性, 以下皆以一個 3-扭棱基本形爲例繪圖。

事實上, 如圖 18, 任何基本形經過沿著長對角線一次摺疊, $\angle 1$、$\angle 2$ 由原來的內錯關係變爲居對角線 $\overline{AC}$ 同旁的關係。兩個這樣的結構再經過對應邊拼接後得到圖 19。其中, 第一塊基本形的 $\angle 2$ 與第二塊基本形的 $\angle 1$ 形成一個三角形的兩內角。根據外角定理, 三角形的外角等於其兩內對角的和。所以, $\angle 1+\angle 2=\angle 3$, 而此三角形的外角 $\angle 3$ 同時也是預期拼成的正 N 邊形的一個外角。因此, 可由 $\angle 1+\angle 2=360^\circ/N$ 的已知條件得出 N 個基本圖形連續拼接時每次剛好旋轉 $360^\circ/N$, 最終從角度方面看剛好拼成正 N 邊形。(註: 根據外角定理, 任何多邊形的外角和都是 360°; 若是正多邊形, 還有外角都相等的性質, 結果就顯現每個外角都是 $360^\circ/N$, 同時, 也可判定一個多邊形有 N 邊。)

接著還需證明確有可供轉動的邊長空間存在。

如圖 20, 以三塊基本形拼接圖來作演示。當中間塊保持展開狀態, 與其相鄰的左右兩個基本形摺好相拼時, 可發現已知條件中“摺痕爲長對角線”的條件保證了摺疊中間圖形的對角線時仍有空檔 $(\overline{KL})$ 存在以便於構成內圈正三角形。

事實上, 在圖 20 中, $\triangle ABE$ 與 $\triangle ABD$ 有相等的兩邊, 由已知 $\overline{BE}=\overline{AC}>\overline{BD}$, 導致 E 點與 A 點在 BD 的同側。類似的推理可得 F 與 C 在 BD 的同側。這表明 $\overline{AC}$ 穿過 BD 時先經過 BE 再經過 DF, 從而必然產生一段空檔 $\overline{KL}$。進一步還可知道, 經過 $\overline{AC}$ 摺痕的摺疊, $\overline{KL}$ 最終成爲了正 N 邊形的邊長。

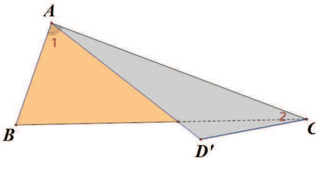

圖 18

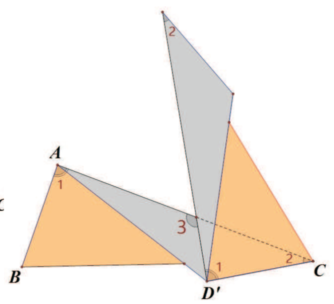

圖 19

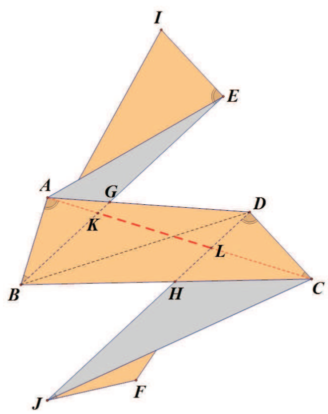

圖 20

至此, 我們已經將三宅一生的 132 5系列的代表性時裝完全解讀清楚了。

不妨看看藉助這一定理出現的兩種 3-扭稜結構。

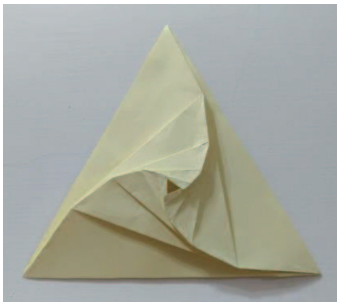 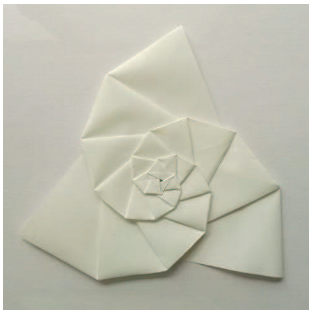

圖 21: 壓平的兩種 3-扭稜結構 (左: 王儷娟摺製; 右: 呂安雲摺製)

我們應用相同的原理來設計的其他多邊形扭稜作品如下:

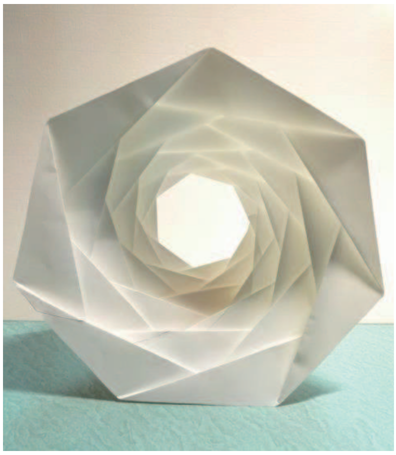

圖 22: 壓平的 7-扭稜結構 (由呂安雲摺製)

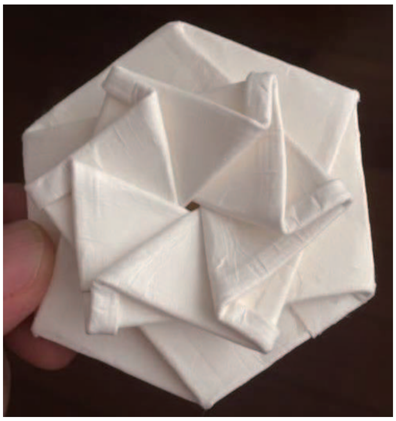

圖 23: 紙杯製作的 6-扭稜結構 (常文武設計摺製)

有趣的是, 這些形態各異的作品摺平後在表面形成了 N 條優美的對數螺旋線。以圖 21 中右圖的 3 扭稜爲例, 其摺平後的表面留下了 3 條對數螺旋線。通過數學計算, 可以找到適當的對數螺旋擬合它。有興趣的讀者還可以造訪官長壽老師製作的 Geogebra 動畫演示網頁 [2]。

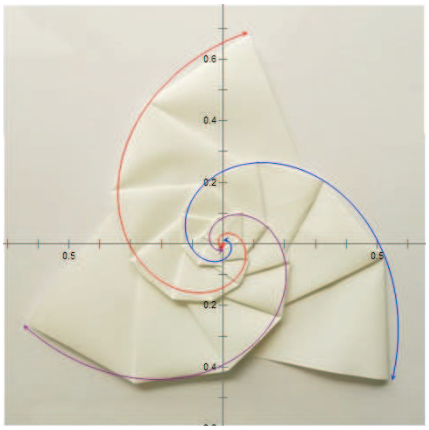

圖 24: 扭稜結構上的對數螺旋 (呂安雲摺製)

數學本來給人一種抽象的刻板印象, 然而數學與時裝設計、摺疊藝術居然還有如此緊密的聯繫, 這的確讓我們感到欣喜!

致謝: 特別感謝官長壽老師用 GGB 軟體繪製程式爲本文提供驗證的依據, 並繪製了部分插圖。感謝匿名審稿人以及李蕙如老師和李政憲老師專業審讀了文章並提出修改意見。

參考文獻

1. Tokyo Fashion Diaries, http://www.tokyofashiondiaries.com/132-5/.
2. 官長壽, https://www.geogebra.org/m/JGYkuxUQ.
3. http://www.isseymiyake.com/en/brands/132_5.html.

—本文作者常文武任職中國上海市普陀區現代教育技術中心, 王儷娟任教台南市立仁德文賢國中, 呂安雲任教竹北市康乃薾雙語中小學—