數學傳播 41卷4期, pp. 60-68

五合一定理

蔡聰明

本文我們要證明下列五個幾何定理都是等價的:1. 畢氏定理; 2. 畢氏逆定理; 3. 三角形的餘弦定律; 4. 圓內接四邊形的餘弦定律; 5. 托勒密定理。

筆者曾經看過學生這樣論證: 考慮三邊爲 3, 4, 5 的三角形, 因爲 $5^2 = 4^2 + 3^2$, 所以根據畢氏定理知, 此三角形爲直角三角形, 並且邊 5 所對應的角爲直角。一般都會說, 這個論證有瑕疵, 因爲並不是根據畢氏定理, 而是根據畢氏逆定理才對。但是, 若畢氏定理與畢氏逆定理等價, 則上述論證在邏輯上並不離譜。

由畢氏定理證明畢氏逆定理是歐氏《原本》的 I.48 (第 I 冊的第 48 命題), 反過來由畢氏逆定理證明畢氏定理, 筆者未曾見過。其次, 由托勒密定理證明畢氏定理是顯然的, 反過來由畢氏定理證明托勒密定理, 筆者也未曾見過。

在由畢氏定理證明托勒密定理的過程中, 我們用到了三角形的餘弦定律與圓內接四邊形的餘弦定律, 後者筆者也未曾見過, 這些可能都是筆者孤陋寡聞。

本文是根據筆者對中學生演講的講義, 整理寫成的。

一、畢氏定理(I.47)

假設 a, b, c 爲 $\triangle ABC$ 的三邊。若 $\angle C = 90°$, 則 $c^2 = a^2 + b^2$。見圖1。

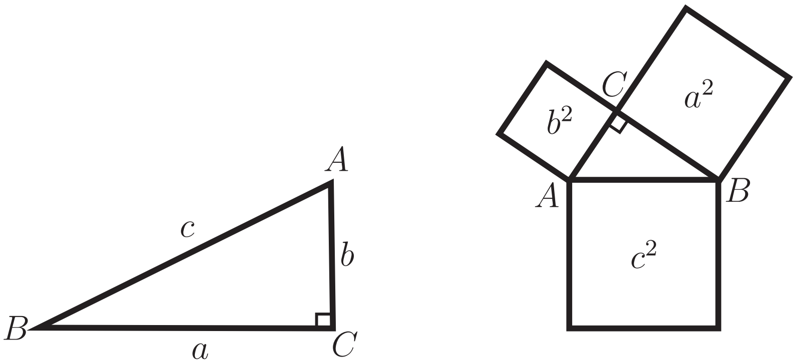

圖 1

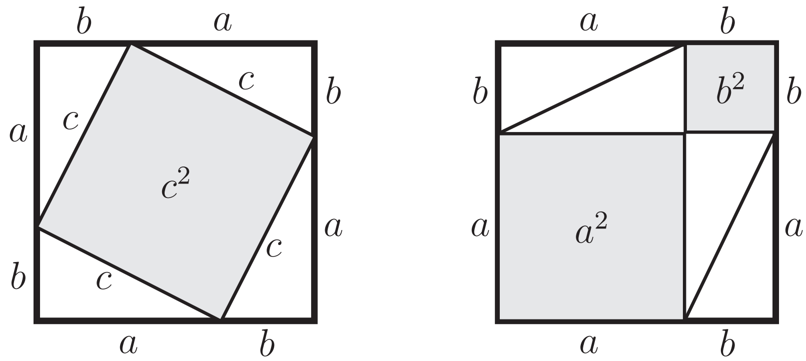

圖 2

在圖 2 中, 看呀! 瞧呀! (Lo and Behold!) 就看出 $c^2 = a^2 + b^2$。這就是所謂的「無言的證明」(Proofs without words)。 □

畢氏定理堪稱爲「四最定理」: 它的「證明」與「名稱」最多, 它是「最美麗」的公式之一, 並且也是基礎數學中「應用最廣泛」的一個定理。

在文獻上, Loomis [2] 對畢氏定理收集有 370 種證法 (有趣的是鯊魚約有 370 種), 一天證明一種, 一年都證不完。更稀奇的是, 世界金氏記錄畢氏定理有 520 種證法。

其次, 這個定理的名稱至少有 10 種: 畢氏定理, 商高定理, 陳子定理, 勾股定理, 百牛定理 (The Hecatomb Proposition), 巴比倫定理, 三平方定理, 新娘坐椅定理 (Theorem of the Bride's Chair, 因其圖形好像是新娘的坐椅), 第 47 定理 (The 47 th Theorem), 木匠法則 (The Carpenters' Rule)。

畢氏定理除了證法與名稱都是最多之外, 它在基礎數學中佔有核心的地位。我們簡直可以用畢氏定理把一大半的基礎數學連貫起來。畢氏定理是幾何學的核心, 「真理之路」(the way of truth)。

二、畢氏定理 ⇒ 畢氏逆定理

畢氏逆定理: 假設 a, b, c 爲 $\triangle ABC$ 的三邊。若 $c^2 = a^2 + b^2$, 則 $\angle C = 90°$。

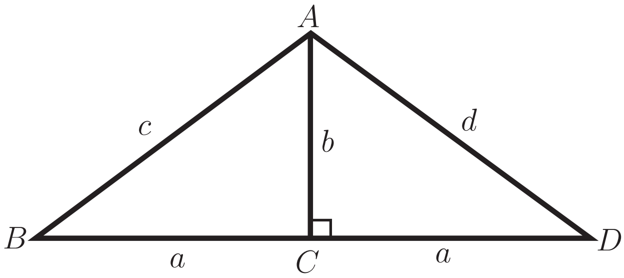

圖 3

在圖 3 中, 假設 $\triangle ABC$ 具有 $c^2 = a^2 + b^2$ 的關係, 我們要證明 $\angle C = 90°$。過 C 點向右作直線段 $\overline{CD} = a$ 並且 $CD \perp AC$, 連結 AD, 令 $\overline{AD} = d$。根據畢氏定理, 我們有 $d^2 = a^2 + b^2$, 所以 $c^2 = d^2$, 從而 $c = d$。由 SSS 的全等定理知 $\triangle ABC \cong \triangle ACD$, 於是 $\angle ACB = \angle ACD = 90°$。 □

三、畢氏逆定理 ⇒ 畢氏定理

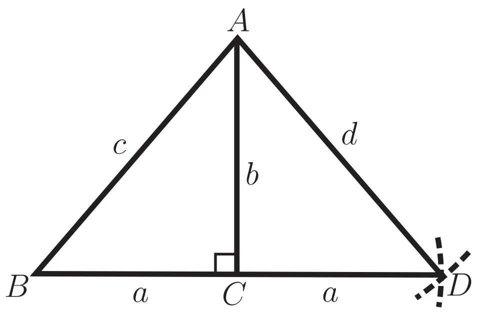

圖 4

在圖 4 中, 假設 $\angle ACB = 90°$, 我們要證明 $c^2 = a^2 + b^2$。以 A 點爲圓心, $d = \sqrt{a^2+b^2}$ 爲半徑作一圓弧; 又以 C 爲圓心, a 爲半徑作一圓弧。因爲 $a+b > d = \sqrt{a^2+b^2} > a$ 與 b, 所以兩圓弧會相交, 令其相交於 D (還會有另一交點), 由建構知 $d^2 = a^2+b^2$。又由畢氏逆定理知, $\angle ACD = 90°$。因此 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (SAS), 於是 $c = d$, 從而 $c^2 = d^2 = a^2+b^2$。 □

問題: 給兩線段 a 與 b, 利用尺規作出線段 a^2 與 b^2, 再作出 $\sqrt{a^2+b^2}$。

四、畢氏定理 ⇒ 三角形的餘弦定律

三角形的餘弦定律(簡稱為餘弦定律).

假設 a, b, c 爲 $\triangle ABC$ 的三個邊, 則有

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad 或 \quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \quad 或 \quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad 或 \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

考慮銳角與鈍角三角形的情形。在圖 5 的左圖中, 由畢氏定理得到

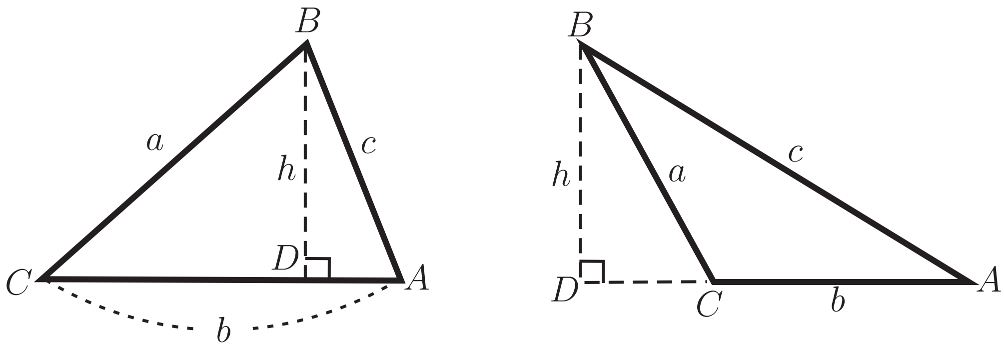

圖 5

$$
\begin{aligned}
c^2 = h^2 + \overline{DA}^2 &= (a^2 - \overline{CD}^2) + (\overline{CA} - \overline{CD})^2 \\
&= a^2 - \overline{CD}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{CA} \times \overline{CD} + \overline{CD}^2 \\
&= a^2 + b^2 - 2b \times \overline{CD} = a^2 + b^2 - 2b \times a\cos C \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos C
\end{aligned}
$$

在右圖中, 仍然是由畢氏定理得到

$$
\begin{aligned}
c^2 = h^2 + \overline{DA}^2 &= (a^2 - \overline{CD}^2) + (\overline{CA} + \overline{CD})^2 \\
&= a^2 - \overline{CD}^2 + \overline{CA}^2 + 2\overline{CA} \times \overline{CD} + \overline{CD}^2 \\
&= a^2 + b^2 + 2b \times \overline{CD} = a^2 + b^2 + 2b \times a\cos(180^\circ - C) \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos C
\end{aligned}
$$

另外兩式同理可證。 □

餘弦定律同時可以推導出畢氏定理與畢氏逆定理, 可以說是一箭雙鵰。

問題: 用放大鏡看一個三角形, 角度不變, 為什麼? 試證明之。

五、三角形的餘弦定律 $\Rightarrow$ 圓內接四邊形的餘弦定律

圓內接四邊形的餘弦定律.

假設 a, b, c, d 為圓內接四邊形 $ABCD$ 的四個邊, 則有

1. $b^2 + c^2 = d^2 + a^2 - 2(bc + da)\cos A$ 或 $\cos A = \dfrac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{2(bc + da)}$,
2. $c^2 + d^2 = a^2 + b^2 - 2(cd + ab)\cos B$ 或 $\cos B = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(cd + ab)}$,

3. $d^2+a^2=b^2+c^2-2(da+bc)\cos C$ 或 $\cos C=\dfrac{b^2+c^2-d^2-a^2}{2(da+bc)}$,

4. $a^2+b^2=c^2+d^2-2(ab+cd)\cos D$ 或 $\cos D=\dfrac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(ab+cd)}$

在圖 6 中, 因爲 $\angle B=\pi-\angle D$, 所以 $\cos B=-\cos D$。對 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ACD$ 使用餘弦

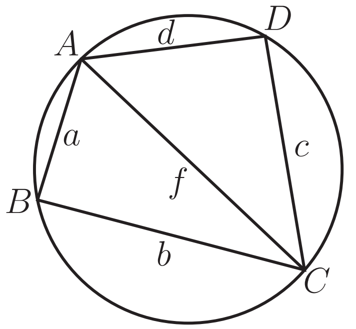

圖 6

定律, 得到

$$f^2=a^2+b^2-2ab\cos B=a^2+b^2+2ab\cos D=c^2+d^2-2cd\cos D$$

所以

$$\cos D=\frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(ab+cd)}$$
$$\cos B=-\cos D=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(cd+ab)}$$

其餘的兩種情形同理可證。 □

注意: 當 $d=0$ 時, A 與 D 重合, $f=c$, 於是第 2 式變成 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos B$, 這恰是三角形的餘弦定律。因此, 圓內接四邊形的餘弦定律是餘弦定律的推廣。

六、圓內接四邊形的餘弦定律 $\Rightarrow$ 托勒密定理

托勒密定理.

假設 $ABCD$ 爲圓內接四邊形, 則兩對角線乘積等於兩雙對邊乘積之和, 見圖 7, 亦即

$$ef=ac+bd.$$

在圖 7 中, 由圓內接四邊形的餘弦定律

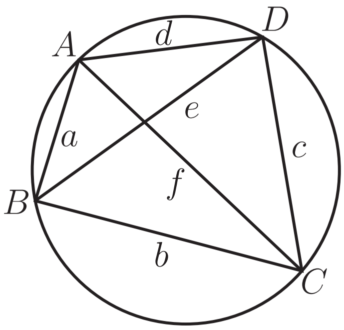

圖 7

$$\cos D = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(ab+cd)}, \quad \cos B = -\cos D = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

對 $\triangle ACD$ 使用餘弦定律得到

$$\begin{aligned} f^2 &= c^2+d^2-2cd\cdot\cos D \\ &= c^2+d^2-2cd\cdot\frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(ab+cd)} \\ &= \frac{(c^2+d^2)(ab+cd)-cd(c^2+d^2-a^2-b^2)}{ab+cd} \\ &= \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} \end{aligned}$$

同理可得

$$e^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$

兩式相乘得到

$$e^2f^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}\cdot\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} = (ac+bd)^2$$

從而

$$ef = ac+bd$$ □

七、托勒密定理 ⇒ 畢氏定理

這是顯然的! 只要將圓內接四邊形改成長方形, 由托勒密定理立即就得到畢氏定理, 故畢氏定理是托勒密定理的特例, 托勒密定理是畢氏定理的推廣。 □

順便談一下由畢氏定理看出托勒密定理的一種發現理路。

由一個直角三角形, 作出另一個相同的直角三角形, 合成一個長方形, 再做一個外接圓。畢氏定理的 $c^2=a^2+b^2$ (直角三角形), 兩元化爲 $c\cdot c=a\cdot a+b\cdot b$ (長方形), 解釋爲長方形兩個對角線乘積等於兩雙對邊乘積之和。再把長方形改爲任意圓內接四邊形, 仍然有兩個對角線乘積等於兩雙對邊乘積之和, 就是托勒密定理 $ef=ac+bd$。見圖 8。

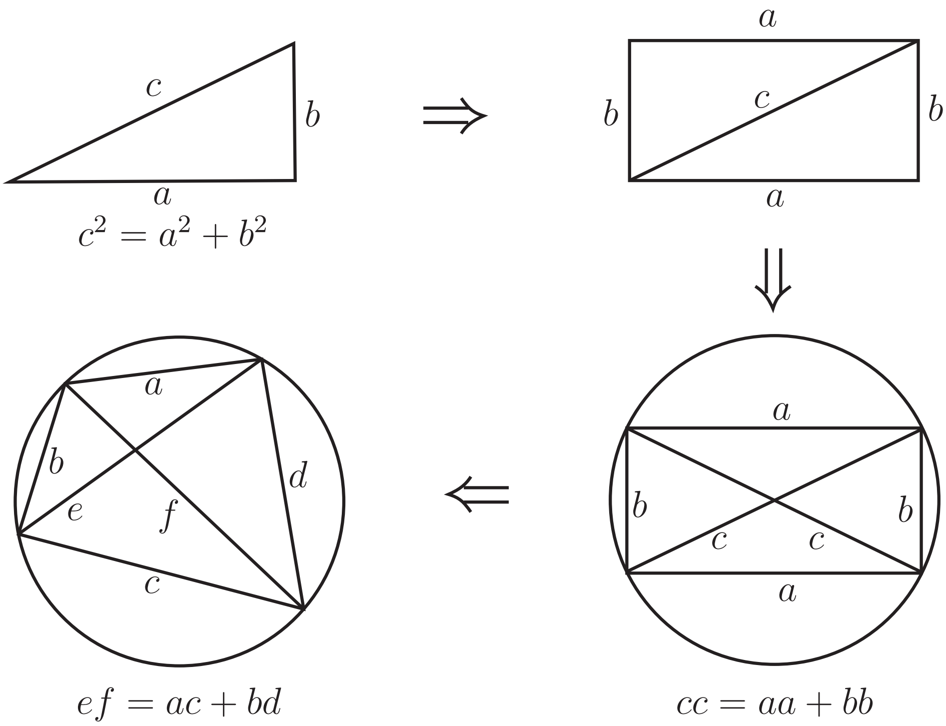

圖 8

托勒密定理的證明: 在圖 9 中, 過 A 點作 AP 使得 $\angle 1=\angle 2$。因爲 $\angle 3=\angle 4$, 所以 $\triangle ABC\sim\triangle APD$。於是

$$\frac{e}{d}=\frac{b}{\overline{PD}}\quad\text{或}\quad e\cdot\overline{PD}=bd.$$

同理可知 $\triangle ABP\sim\triangle ACD$, 因此

$$\frac{a}{e}=\frac{\overline{BP}}{c}\quad\text{或}\quad e\cdot\overline{BP}=ac$$

兩式相加就得到 $ef=ac+bd$。 $\square$

托勒密定理是許多三角恆等式的根源, 例如它可以推導出和差角公式、正弦定律與餘弦定律。托勒密利用這些結果來製作弦表 (相當於正弦函數的數值表)。

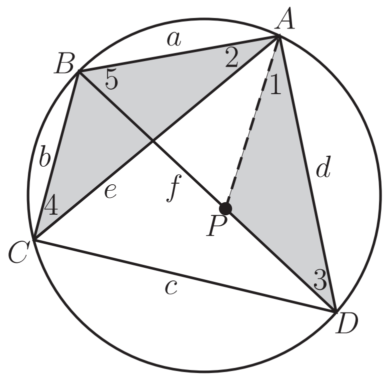

圖 9

底下我們用托勒密定理推導出餘弦定律:

如圖10, 考慮 $\triangle ABC$, 將它翻轉 180 度, 使得底邊仍然重疊在一起, 得到 $\triangle AB'C$, 則四點 A, B', B, C 共圓, 令 $d = \overline{BB'}$。因爲 $d = b - 2a\cos C$, 由托勒密定理得到

$$\begin{aligned} c^2 &= bd + a^2 = b(b - 2a\cos C) + a^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned} \qquad \square$$

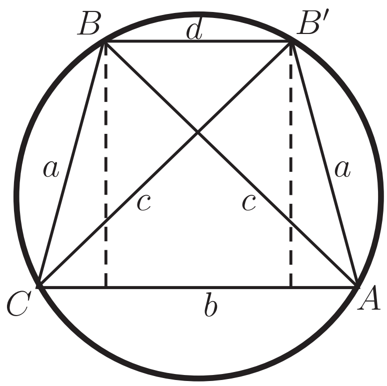

圖 10

八、結語

總結上述, 我們有如下的邏輯網絡 (logical net):

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{三角形的餘弦定律} \Rightarrow & \text{圓內接四邊形的餘弦定律} \\ & & \Uparrow & \Downarrow \\ \text{畢氏逆定理} \Leftrightarrow & \text{畢氏定理} & \Leftarrow & \text{托勒密定理} \end{array}$$

這個邏輯網絡還可以繼續再擴展出去, 把許多重要的幾何定理連都結起來, 其中畢氏定理是天地的中心。

還有一條邏輯的小徑:

$$\text{托勒密定理} \Rightarrow \text{三角形的餘弦定律} \Rightarrow \text{畢氏定理。}$$

畢氏定理展現著簡潔, 歷久彌新, 可以不斷生長與加深拓廣。下面三式被公認爲是重要且美麗的公式:

平面幾何學的畢氏公式: $c^2 = a^2 + b^2$.

微積分的歐拉 (Euler) 公式: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

物理學的愛因斯坦質能互變公式: $E = mc^2$.

畢氏定理與圓都屬於二次的世界, 前者掌握住最基本的長度與距離概念與計算, 從而也有了圓的方程式 , 這根本就是畢氏定理的化身!

圓最完美與對稱, 等速率圓周運動與畢氏定理更是周期運動與整個三角學的出發點。

参考文獻

1. Euclid. The Elements I. Translated by Sir Thomas L. Heath. Dover, 1956.
2. Elisha Scott Loomis, The Pythagorean Proposition. 1968
3. Elia Maor and Eugen Jost, Beautiful Geometry. Princeton University Press, 2014.

—本文作者爲台灣大學數學系退休教授—