數學傳播 41卷4期, pp. 3-12

幾何及廣義相對論中的純量曲率

演講者：Richard Schoen 教授
時　間：民國 105 年 12 月 19 日
地　點：天文數學館639演講廳
整　理：姜義浩

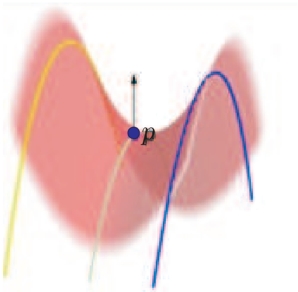
很高興再次來到台北, 這是我今年第二次來訪, 這次會待一個月左右。我之後要給一系列三次演講。現在要給的是一般性的演講。我要對在座的專家們說聲抱歉, 因爲我不會講太深入的東西, 我只希望賦予這一系列演講一些動機, 一般性地讓大家有一個初步的了解。

這次演講的主題關乎幾何和廣義相對論。幾何和廣義相對論的共同點, 在於它們都探討曲空間 (curved space)。在幾何學, 我們探討度量 (metric), 並用度量結構 (metric structure) 探討流形 (manifold), 而通常可藉由曲率之性質反映度量結構。廣義相對論中, 重力場是一個時空度量 (space time metric), 引導出一個在時空上的曲幾何 (curved geometry), 所以幾何學跟廣義相對論有很多共同點, 但兩者又不全然相關, 較相關的部分是純量曲率 (scalar curvature)。我之後會解釋這些及物理理論裡一些相當具體的問題。

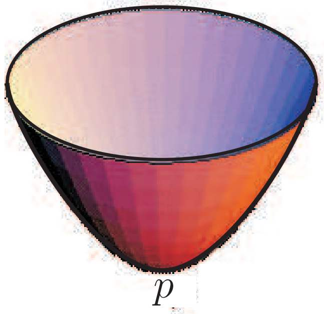
我會從二維曲空間開始講, 將點出兩個面向, 這兩個面向在某些意義下可推廣至高維, 特別是三維。

迄今, 我們對曲率的了解多來自高斯關於 $\mathbb{R}^3$ 中之曲面的理論。想像三維空間, 然後想像平滑曲面, 高斯針對曲面發展了 intrinsic 幾何及 extrinsic 幾何。Intrinsic 幾何聚焦於高斯曲率。假設我們在 $\mathbb{R}^3$ 取一個曲面, 在曲面上任找一點, 於此點有兩個主曲率 (principal curvatures) k_1 及 k_2, 分別測量曲面在 $\mathbb{R}^3$ 最大和最小的彎曲度, 也就是最大和最小的法向 (normal) 曲率。有一個可能發生的情況是猴鞍曲面 (saddle surface), 假如我選擇法向量向上, k_1 可能會

指向正向, 而 k_2 指向負向。重點是, 在鞍點 (saddli point), k_1 是正的, 而 k_2 是負的。另一個可能是： 二者同爲正或負, 在這個情況下曲面局部爲凸。假如我拿一個局部爲凸的曲面, 則 k_1 和 k_2 同爲正或負。



p: saddle point with $k_1 > 0 > k_2$

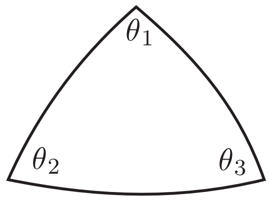


p: $k_1 k_2 > 0$

高斯發現這兩個主曲率的乘積跟曲面嵌入周遭空間的方式無關, 只跟 intrinsic 幾何性質有關。換言之, 假設一個人住在曲面而看不到其所嵌入的空間, 應該可以直接測量高斯曲率。我這次演講中一個重要的量是高斯曲率, 爲 k_1 和 k_2 的乘積, 是 intrinsic。我有興趣討論的曲面理論, 及它與相對論相關的部分, 是關於高斯曲率大於或等於零的曲面。

考慮一個二維的曲面, 不必然嵌入於三維空間, 但具備第一基本形式 (first fundamental form)。第一基本形式就是黎曼度量 (Riemannian metric), 是在每個切空間 (tangent space) 的內積, 正定 (positive definite) 的內積。現在取一個 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面, 審視其切空間, 限制內積函數於其上, 得到黎曼度量 g, 爲切空間的內積。於曲面上移動審視各點。假如曲面光滑, 就是黎曼曲面。我有興趣的是高斯曲率 K 大於等於零的曲面。

對於我之後要推廣到高維的曲面, 我要問兩個問題。第一個問題是, 我們怎麼探測曲率? 我們住在曲空間的事實, 要如何測量得知? 這是第一個問題。有一種經典的方法可解決這問題, 假如你讀過球面幾何, 你就知道球面三角形跟歐氏三角形不一樣。特別而言, 假如你取一個曲面上的測地三角形 (geodesic triangle), 測量三角形 T 的內角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, 得到一個美麗的公式, 是 Gauss-Bonnet 定理的一個特例, 相關於三內角和與 π 的差, 並把此角度差表示成在三角形內部 T 高斯曲率的面積分。所以, 特別而言, 一個球面三角形的內角和大於平面空間的三角形的內角和：



$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi = \int_T K da. \tag{1}$$

假設高斯曲率 K 是常數或幾乎是常數, 我們做三角測量, 就可以知道自己住在一個曲空間。假設我們住在二維曲面, 想要測量其曲率, 我們可以藉助於三角測量。事實上, 這部分可能比較難

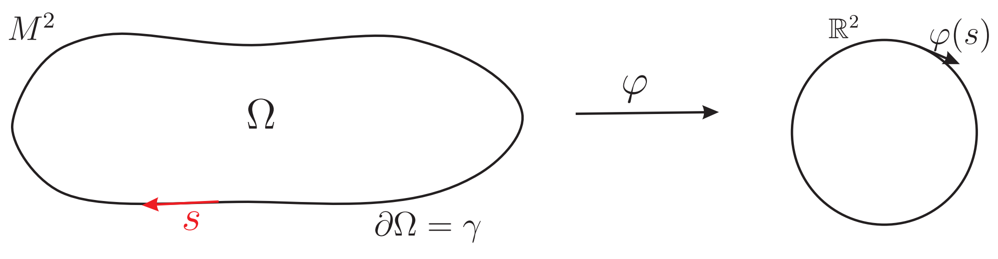
測量, 但假如 K 是常數, 你就可以比較簡單地測出, 因爲有許多三角函數公式可用, 你可以用其它量代替面積。高斯是數學家也是測量家, 他做過如此的測量 : 他考慮横跨三座山頂的三角形, 根據三角測量法算出地球的半徑。他估計得不錯; 我不確知他估計得多好, 但如果假設地球是個完美的球面, 我們用三角測量法就可以測出其曲率, 而這個曲率就是地球半徑的平方的倒數。這是一種方法, 用局部測量, 我們可以測知自己身處一個曲空間, 並測出空間如何彎曲。事實上, 我要指出, 這公式有一個我們以後會用到的、更一般化的版本。

更一般而言, 一個三角形是一個分段光滑 (piecewise smooth) 的曲線, 每一邊都是測地線 (連結兩點最短的曲線)。我們可以對任一封閉曲線給一個公式 : 認取一區域 Ω, 假設 Ω 的邊界是一封閉曲線 γ; 我們可以寫一個適用於任何區域的、更一般化的公式。我們假設這是一個單連通的區域。局部 Gauss-Bonnet 定理說 : 假如我在 Ω 上對高斯曲率積分, 我得到的是 2π 乘上尤拉示性數 (Euler characteristic) 減去測地曲率沿邊界的線積分, 而在此例中尤拉示性數是 1; 測地曲率測量切向量在曲面的圍空間 (ambient space) 之變化。這就是局部 Gauss-Bonnet 定理 :

$$\int_\Omega K da = 2\pi - \int_\gamma \kappa ds. \tag{2}$$

現在假如你拿這這個公式應用於某情境, 你會發現測地曲率和三角形的外角有關。從 (2) 式推到 (1) 式很簡單。我們能夠偵測出自己身處一個曲率 K 大於或等於零的空間, 唯當 (2) 式右邊的量大於或等於零。

現在我企圖從一個不同的角度想這個問題。我把 2π 想成是一個總曲率 (total curvature)。也就是說, 我想做的是比較這個曲空間和一個模型空間, 而這模型空間就是平面空間 $\mathbb{R}^2$。我在 $\mathbb{R}^2$ 畫一個圓, 圓心在原點, 圓的長度取爲 γ 的長度 ($r = \partial\Omega$ 如上述)。我選擇這個圓, 總曲率取爲 2π, 把它想成是一個 γ 的等距同構 (isometry)。我以長度做爲曲線參數, 稱之爲 s, 沿著曲線 γ 測量 s 。既然兩個曲線等長, 我可以把它想成是一個等距嵌入 (isometric embedding)。我取一個函數 φ, 將曲線 γ 等距地映射至此圓。我用單位速度沿著曲線 γ 走。因爲曲線沒有 intrinsic 幾何, 所以任何曲線都可以等距嵌入於同樣長度的單位圓。



假如我記這個圓的曲率爲 $\bar{\kappa}$, 就可以重寫這個公式。考慮 $\bar{\kappa}$ 和 φ 的合成函數, 我可以將

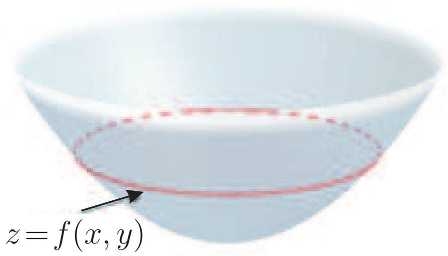
2π 寫成 $\overline{\kappa}\circ\varphi$ 在 γ 上的積分; 我把已映至圓的 γ 再拉回來, 積分值無論如何是個常數：

$$\int_{\Omega} K da = 2\pi - \int_{\gamma} \kappa ds = \int_{\gamma} (\overline{\kappa}\circ\varphi - \kappa) ds$$

換句話說, 我可以用下述方法偵測出自己身處一個具非負曲率的曲面：我任取一個單連通的區域 Ω, 將其邊界等距嵌入於 $\mathbb{R}^2$ 中的圓。模型空間 $\mathbb{R}^2$ 中圓的總曲率會大於等於 γ 的測地曲率積分; 兩者相等時 Ω 爲平面, 也就是 K 等於零。根據高斯的理解,「$K=0$」等價於「度量局部爲平面度量」, 因而你可以在任何點附近引入歐氏座標。

如是, 在任一個單連通的區域, 我們可用更加一般化的測量代替三角測量。我們可以計算曲率積分的差：對於任何選取之區域 Ω, 模型空間的邊界曲率積分減掉曲空間對於 Ω 邊界的測地曲率積分。當高斯曲率大於等於零, 這積分差要大於等於零。假如我們真想計算出曲率, 我們得先要更了解公式 (2) 的左邊。這是第一點。所以, 要測出我們所在之二維曲面的曲率, 是可能的, 用局部測量就可以了。這是第一部分。

我想考慮的第二個二維的情況, 是 K 大於等於零的完備 (complete) 曲面。當一個曲面的 K 大於零, 我們或許會想像它是封閉的, 可能是一個球面或什麼的。但事實上它不一定要是封閉的。我可以關注完備、非緊緻曲面 (M,g); 完備的意思就是測地線可延伸至無窮遠點。要讓完備曲面嵌入於 $\mathbb{R}^3$, 我可取它爲凸函數的圖形; $z=f(x,y)$ 是一個凸函數, 引導 (induce) 出其函數圖形上的度量, 定義了 $\mathbb{R}^3$ 中的一個正曲率曲面。通常, 趨近無窮遠時, 曲率會以某種速率趨近零; 事實上, 它必須以某種速率趨近零。但我並不想探討最一般的漸近。我假設它有很好的漸近行爲。那是什麼意思呢? 如圖所示, 趨近無窮遠時, 曲面會趨近於一個旋轉對稱的平直面, 一個圓錐。這裡的想法是： 在無窮遠處, 曲面看起來像一個旋轉對稱的平直曲面; 就這個圖形來說, 其實它不一定要旋轉對稱, 畢竟我們是在一個 intrinsic 情境。



Cone

cylinder

$\mathbb{R}^3$ 中的曲面趨近於圓錐時, 引導出的度量會漸近對稱。這些漸近極限的形貌可以被刻劃; 可以很簡單地看出, 任何一個旋轉對稱之平直曲面, 必等距同構於二維平面、圓錐或圓柱。因此, 這些近似曲面看起來可以像圓錐, 也可以像平面或圓柱; 你大可以想像一個凸曲面近似於圓柱。這些是僅有的旋轉對稱平直曲面。在這個框架下, 我能做的是給大圓寫一個公式; 我從這裡走一個遠距離, 到一個半徑爲 r 的大圓 C_r, 我可以在此圓上寫一個 $\overline{\kappa}$ 減 κ 的積分, 而這就是 2π 減去 κ 在這個圓上的積分。

$$\int_{C_r}(\overline{\kappa}-\kappa)ds = 2\pi - \int_{C_r}\kappa ds.$$

當 r 很大時, 曲面近似一個圓錐, 而下述極限

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}(\overline{\kappa}-\kappa)ds. \tag{3}$$

就是圓錐角 (cone angle)。每個圓錐在無窮遠處都有一個角度, 是當 r 趨近於無限大時的極限值 (3), 不爲負值, 且唯當 K 到處爲零時 (3) 爲零, 意即曲面是平直的。換言之, 考慮任何有良好漸近行爲且曲率非負的曲面, 設其在無窮遠處有一個漸近之圓錐; 除非此曲面是平直的, 也就是二維平面 $\mathbb{R}^2$, 否則曲面與漸近圓錐會有一特定的偏差。這個角就是曲面與平直面在無窮遠處的偏差, 也就是這個漸近量。因此, 我們不僅能夠局部測量出曲率, 還另有一個漸近量; 依據 Gauss-Bonnet 定理, 此漸進量就是總曲率 (K 在曲面 M^2 的積分)。所以就二維情況而言, 我們有局部測量和漸近測量。

現在, 講到廣義相對論, 二維就不夠了, 廣義相對論是三加一維空間, 三維空間加一維時間。所以要了解相對論的問題, 我們至少還要再加一維。事實上, 有一些問題和二維的問題看起來幾乎一模一樣。我現在要介紹這些問題。所以, 記住剛才的兩個情況：首先問說我們是否可以局部測量曲率, 之後又測量了一個漸近量。此漸近量可以解釋成 2π 和近無窮遠處錐角之差異, 而這又測量了空間的總曲率。這跟相對論有什麼關係?

在相對論, 我們有一個四維空間, 是四維時空空間 S^4 。假如我們想像一瞬間的世界, 一般而言, 時空空間會被分葉 (foliated) 成一片片三維空間, 而你可以想像這些三維空間被一個時間函數定義。在此, 我們取一片三維的 M^3, 包含於 S^4, 是三維類空間 (space-like) 超曲面。時空度量是羅倫茲度量 (Lorentz metric), 但在 M^3 引導出的度量是正定的, 這使得 M^3 具備度量 g, 而這度量 g 是正定的、被一個內積定義, 叫做黎曼度量。當然, 時空上的度量滿足愛因斯坦方程式。我不寫出愛因斯坦方程式了, 關於它們我已經講太多。愛因斯坦方程式引導出 M 上的一系列方程式, 而這些在廣義相對論裡被稱爲限制方程式 (constrained equations)。所以, 不是每個黎曼流形都可以是合理的物理時空裡的類空間 (space-like) 超曲面, 度量 g 須滿足某些條件才可以; 那些條件長什麼樣子? 它們取決於兩件事。愛因斯坦方程式是一系列、十條數

學公式, 其中四條是在 M 上的限制方程式, 而這些方程式取決於引導出的度量及第二基本形式 (second fundamental form)。有一些 M 上的資料我不多說了; 但 M 在 $\mathbb{R}^3$, 其第二基本形式、外在曲率在這裡爲零, 是一個很重要的特殊情況。在這特殊情況, 第二基本形式是零, 由愛因斯坦方程式得知, 度量 g 的純量曲率是非負的, 這意味著物質可能存在。在這特殊的、第二基本形式爲零的情況, 純量曲率表示物質密度 (不管這物質密度場是什麼)。在相對論, 你可能有類似磁場的物質場, 你也可能有重力場, 一般說來它們是耦合的。拓樸上 S^4 是時空空間, 是一個有羅倫茲度量的四維時空流形, 我假設它滿足愛因斯坦方程式, 並可能存在物質場。假如有物質, 純量曲率就會是正的; 在真空的例子裡, 純量曲率爲零, 名爲真空。

容我解釋一下純量曲率。在高維, 曲率的故事比較複雜。一般而言, 假如 $n \geq 3$, 任取一個黎曼流形 (M, g), 會有一個黎曼曲率張量 (Riemannian curvature tensor), 在二維時簡化爲高斯曲率, 而在高維時包含豐富許多的資訊。這是個 full curvature; 黎曼當年問 :「在什麼情況下度量會局部等距同構於歐氏度量?」時, 導出了黎曼曲率張量, 規模很大, 有很多分量, 可以用二維截面的曲率深入了解。我們可以做的是對黎曼張量取 traces。稱黎曼張量的第一個 trace 爲里奇曲率 (Ricci curvature), 是愛因斯坦方程式中出現的量。這第一個 trace 測量某種平均值, 是所有二維截面的高斯曲率之平均, 具方向性。進而, 我們稱里奇張量的 trace 爲純量曲率。

黎曼張量是個代數結構相當複雜的張量。里奇張量比較簡單; 我們取 trace, 得到一個和度量同型態的張量。假如我們再取一次 trace, 得到的就是純量曲率 R_g 。就是這個量和相對論有關。如果一黎曼流形是個類空間 (space-like) 超曲面, 位在一個第二基本型式爲零的合理物理時空裡, 則其 R_g 必須非負或到處爲零。

現在我要強調另一個高維空間與二維空間的差異 : 在二維空間, 高斯曲率蘊含一切; 一旦高斯曲率爲零, 度量就簡單了, 就是一個歐氏度量, 是平直的。在高維, 純量曲率只是曲率張量很小的一部分。純量曲率爲零時, 度量未必是平直的, 可能是個複雜的度量。所以, 賦予純量曲率的條件, 相較於高斯曲率之相應條件, 其效力是很弱的。

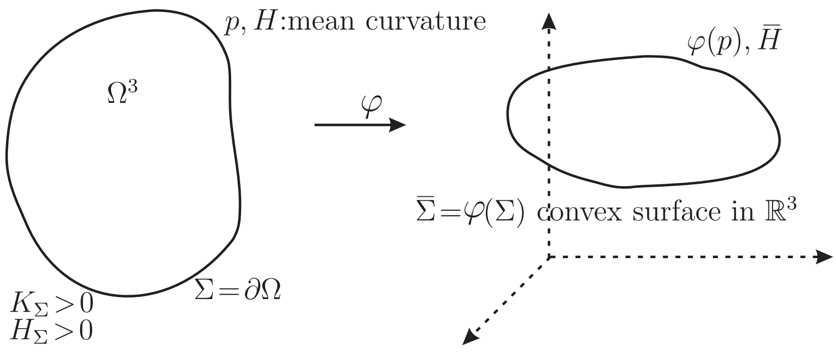
另一方面, 非常值得注意的是, 之前兩個我提過的曲面性質, 至少在三維流形有類似物。所以對三維或高維流形, 我們會問與二維情況類似的問題。回想那兩個問題, 第一個是局部性偵測出曲率的幾何, 第二個是大域漸近行爲。現考慮 M^3, 因此先談三維的情況; 假設 M^3 有一個度量 g, 是時空空間的一個截面, 純量曲率非負, 我們可以問一樣的問題 : 假設我們身處曲幾何, 要如何偵測出曲率? 要怎麼做呢? 這比二維的情況複雜很多, 但有趣的是, 至少部份的解答是和二維的幾乎一模一樣。容我接下來說明。這就讓我們回溯到上一個問題 : 怎麼偵測出我們所在空間的局部幾何。這在相對論被稱爲類局部質量 (quasi-local mass), 賦予某一個時空區域一個量, 測量其重力的含量。

重力的含量是個大議題; 事實上類局部質量有許多不同的名稱及定義, 所以這不是一個定

義十分良好的議題。有一個類局部質量的版本是由物理學家布朗 (Brown) 和約克 (York) 提出, 另有一個定理我稍後要說明。布朗-約克類局部質量之定義如下述：假如我們取 $\mathbb{R}^3$ 中的區域 Ω, Ω 的邊界爲曲面 Σ 。回想我對二維曲面做的, 我取邊界曲線, 將之想像成等距同構於一個在模型空間裡的圓。現在這裡的模型空間是 $\mathbb{R}^3$ 。我要做的是把邊界曲面等矩崁入於 $\mathbb{R}^3$ 。我要一個等距關係 φ 。現在假如你關注等距崁入曲面的問題, 你會面臨很大的困難, 即使僅是局部建立一個等距嵌入都難。但在一個久爲人知的特殊情況, 有個很難的定理, 1950 年左右就發現這可以做到, 是關於正曲率曲面的結果。假如你考慮一個在三維空間裡的區域, 邊界曲率爲正, 有一個老定理 Wyel embedding theorem 告訴你這是可行的。現在考慮 $\overline{\Sigma} = \varphi \circ \Sigma$, $\overline{\Sigma}$ 是一個 $\mathbb{R}^3$ 中的凸曲面。回想在二維曲面, 我們關注測地曲率; 現在關注的是平均曲率。在每一個邊界點有一個平均曲率 H, 是 k_1 和 k_2 的和, 就是 Σ 在 M 內的兩個主曲率的和; M 內的 Σ 是個曲面, 是個曲空間, 你可以如同高斯般操作此曲空間, 得到兩個主曲率, 稱這兩個主曲率的和爲平均曲率。現於曲空間任取點 p, 考慮點 $\varphi \circ p$, 取這個曲面的平均曲率, 稱之爲 $\overline{H}$; 布朗-約克質量 (類局部質量), 就是 $1/8\pi$ 乘上 $\overline{H}$ 減去 H 在 Σ 的積分：

$$m_{BY} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} (\overline{H} - H) da. \tag{4}$$

要注意 φ 是等距同構、等距嵌入, 因此面積幾乎不變, 所以這個量就是 $\overline{\Sigma} = \varphi \circ \Sigma$ 的總平均曲率減掉 Σ 的總平均曲率, 就是布朗-約克質量。



布朗和約克提出這個局部質量的定義時, 對它的性質不很了解。在 2002 年, 史宇光及譚聯輝完成了重大的工作, 證明這質量不爲負值; 且唯當 Σ 是一個平面時, 這個質量的值爲零, 於是不只純量曲率爲零, 度量也是平直的。這幾乎完全類比於二維曲面的結果。我們能操作的區域, 其邊界滿足一些幾何條件：高斯曲率爲正, 且平均曲率不爲負。假如給你這些條件, 你得到布朗-約克質量 (類局部質量), 滿足非常類似二維曲面的性質。這是 2002 年做的, 過去十年, 又有很多工作把這些想法延伸到時空幾何中。而當你有第二基本形式的時候又如何呢？這是比較複雜的情況, 相關工作主要由丘成桐和王慕道完成; 非常成功且令人驚訝地, 他們建立了能延伸

到時空的一般理論。我沒有時間詳細說明這工作了。上述這些工作給局部問題一個答案, 告訴你如何用局部測量來測量你是否在一個曲空間裡。儘管它並非完全地一般化, 能測量的區域須滿足一些幾何條件, 仍算是第一部分結果的三維版本。

我接著講完備的情況。完備的情況和局部的情況緊密相關。史宇光及譚聯輝證明定理時, 用的是完備的情況, 具漸近平直度量。現有 (M^3, g), 假設 g 是非緊緻的, 有良好的漸近行爲, 並假設 R_g 的純量曲率非負, 有良好的漸近行爲。我們可以假設漸近行爲不能再好; 可以多好呢? 我們期望曲面漸進地平直, 曲率在無窮遠處趨於零; 所以, 在無窮遠處, 至少純量曲率爲零。

現於漸近極限處, 純量曲率爲零, 我們也自然地假設漸近極限爲旋轉對稱, 在 $\mathbb{R}^3$ 中旋轉後不變 (invariant under rotation)。如同在二維的情況, 這兩個特質刻劃了這個度量。純量曲率爲零且 non-trivial 的旋轉對稱度量, 形成單參數族, 名爲史瓦席格度量 (Schwarzschild metric), 是相對論最早找到的確切解。它們像什麼呢? 旋轉對稱, 漸近平直。我對接近無窮大時的行爲有興趣, 而實際上它們延伸到雙重無窮空間 (doubly infinite space)。

這些度量可以寫成如下的形式：

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{m}{2|x|}\right)^4 \delta_{ij},$$

一個以質量 m 爲單參數的量乘以歐氏度量。這些度量定義在 $\mathbb{R}^3$ 扣掉原點; 由於純量曲率在無窮遠處 $R_g \equiv 0$, 它們是定義在 $\mathbb{R}^3$ 的調和函數; 更且, 它們皆爲旋轉對稱不變。這些度量是所有能讓純量曲率局部爲零的度量。m 是一個參數, 稱爲史瓦席格質量。因此, 一個實際的假設是 g 漸近於某個史瓦席格度量 g_m 。現在, 再次如同二維的情況, 我們假設 M 漸近於圓錐, 更且假設 g 漸近於史瓦席格度量 g_m 。在這些漸近假設下, 我們可有更具一般性的漸近行爲。有一個定義良好的量, 被稱爲 ADM 質量, 是漸近史瓦席格度量 g_m 的質量, 並且也是 $\overline{H}$ 減去 H 在一個大球面上 S_r 的積分取極限後除以 8π：

$$\frac{1}{8\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} (\overline{H} - H) da, \tag{5}$$

換言之, 它是布朗-約克質量的極限。說到大球面 S_r, 所有球面都漸近於圓球; 事實上, 史瓦席格度量下的球面都是圓的。我們假設度量漸近於史瓦席格度量, 因此球面幾乎是圓的, 而 (4) 的極限是 ADM 質量 (5)。正質量定理, 也就是我在此系列演講的基本定理, 說明 ADM 質量爲非負, 且唯當 M 是 $\mathbb{R}^3$, ADM 質量爲零。這是布朗-約克質量的大域版本, 史宇光及譚聯輝的定理是其局部化版本, 而此局部化的工作用了大域的理論及證明。所以我們有個相對應於二維定理的漸近定理, 述說度量不能太快接近歐氏度量。現在有個量, 名爲總質量, 導致度量以某種速率偏離歐氏度量; 這個速率在三維情況是半徑的倒數, 就是距離的倒數; 這就是正質量定理。

正質量定理很久以前就被證明了, 不過有些情況沒涵蓋於現存的文獻, 我整個演講系列就是想完整地探討正質量定理。現在整理一下已知的結果。三維的情況很久以前就證明了, 丘成桐和我發展了利用最小曲面證明的方法。丘成桐和我將證明推廣至任意維度, 不過有些限制。不久之後, Witten 提供了一個另一個證明, 適用於任意維度。所以現在有三個證明, 三種方法。第一種方法, 運用最小超曲面的方法, 是丘成桐和我在 1980 年做的。不久之後, 有了用狄拉克算子的方法, 就是 Witten 的方法。最近有一個新方法, 不是直接證正質量定理, 而是用一些方法轉化正質量定理爲里奇流的理論。據我們所知, 幾乎所有三維的幾何性質都可以用里奇流說明。特別而言, 也可以用里奇流證明三維空間的正質量定理, 因爲你可以將正質量定理轉化爲三維環面正純量曲率度量的不存在性。里奇流可以完整分類具正純量曲率的三維流形, 所以這也算是個不同的方法。這些都是三維。假如考慮高維呢?

你可能會問 : 爲什麼要關心高維呢? 是有一些理由這麼做。首先, 正能量理論、正質量理論出現在弦論, 而弦論關乎高維度。所以在物理學上有理由要關心高維。數學上也有關心的理由。正質量定理包含 Yamabe 問題, 蘊含流形上常純量曲率度量的存在性。而純量曲率度量分兩類, 它們或者最小化其相對應的變分問題, 或者未將之最小化。在最小化變分問題的情況, 我們可以擺脫掉處理正質量定理的困難。不過, 在更一般的情況, 鞍點 (saddle point) 存在, 未最小化變分問題, 就需要正質量定理。

無論如何, 了解各個方法是否都可證明正質量定理, 是很有趣的。我解釋一下三個方法各有哪些缺點。第一種, 最小超曲面法, $n \leq 7$ 時是可行的, $n = 8$ 也行得通, 可援用另一些結果處理; 九維以上的話, 會有些技術上的問題, 肇因於最小超曲面的奇異點。這一系列的演講, 要討論那些方法似乎可以處理奇異點, 並嘗試給予完整的、適用於任何維數的證明。這不是我原先預定要講的, 但我認爲一切都還 okay, 而一個想談這些的原因就如上述。這是第一種方法。第二種方法 : 沒有維度的限制, 但要定義狄拉克算子, 流形必須爲自旋 (spin)。這給了一個拓樸上的限制。一些人嘗試擺脫這個限制, 但都沒有完全成功; 目前仍有人致力於解決這問題。所以, 在高維空間, 第二種方法在自旋流形上可行, 但在非自旋流形上則情況尚不明朗。至於運用里奇流的證明, 在大於等於四維時非常困難。要了解里奇流, 關鍵是要知道如何經由奇異點建構里奇流。所以你必須了解里奇流的奇異點。在三維時, 透過 Hamilton 和 Perelman 的工作, 我們對此有不錯的了解; 但在高維, 這是非常非常困難的問題。所以里奇流似乎在高維極難使用。

我要講的方法是最小超曲面法; 它的困難, 源自於最小化體積時, 會有個奇特而尚未被完全了解的現象。假如取三維空間的一個曲線, 讓它包圍的體積最小化, 會得到一個完美的曲面, 但假如在高維度, 在 n 維空間取一個 $n-2$ 維邊界, 讓它包圍的體積最小化, 你可以有解答。但假如 n 太大, 8 以上, 最小化體積的超曲面一般來說會有奇異點。有一個很稀疏的 (thin) 奇異點集合, 其 Hausdorff 維度不大於 $n-7$ 。因此, 最小化體積之超曲面直到七維都是光滑的, 但在更高維, 可能會有個稀疏的奇異點集合。奇異點集合造成正質量定理證明的困難, 我在

這裡尚未描述。有困難, 關鍵是困難能否避開、是否有真正重要的內容。

整個故事引人入勝的元素之一, 就是狄拉克算子、超曲面兩種方法的關聯。用狄拉克算子、超曲面兩種方法所得的結果多所重合, 而狄拉克算子和超曲面是非常不一樣的兩個東西。這二者密切相關, 且藉由一些定理, 兩者皆提供了理解純量曲率的途徑。但兩者如何深入地連結則很不明朗。關於純量曲率問題, 我認爲這是真正有趣的事之一。這就是我的一系列演講的簡單介紹。謝謝。

問題及回答

1. 正質量理論為什麼正確?

這是在六零年代數學相對論界的一個重要問題。物理學的想法是重力爲吸引力。ADM 質量測量重力輻射。你必須想像從遠處看一個重力系統, 任取兩個物體, 假如它們的質量是負的, 則兩物體會相斥; 但是兩個星系應該會相吸, 所以重力加總應該是個吸引力。很多物理學家不很講究數學。而我們認爲重力顯然具有這個性質。另一方面, 廣義相對論如此博大精深, 其證明極其奧妙。你知道那麼多不同的解, 所以正質量定理是非常具一般性的定理, 能容許任何一個想得到的分布, 只要該分布滿足正能量定理、正質量定理、總質量爲正。對高維空間, 我不能聲稱自己有任何直覺, 我也不知道物理學家怎麼處理, 但在三維空間, 這肯定是公認爲對的事。

2. 複結構?

我們在奇數維空間用狄拉克算子, 所以和複結構不直接相關。假如你考慮愛因斯坦方程式的正定解, 可知複變函數和廣義相對論略有相關, 最爲人所知的是 Kälher 流形。但在正質量定理, 複結構未起作用, 我們是在實維度用實狄拉克算子。