數學傳播 41卷3期, pp. 93-96

合情推理引領探究 解題反思滿載而歸
—— 一道例題教學的感想

陳波

很多數學的新發現大都是從猜想、估計開始的, 這些猜想再經過嚴密的論證推理, 獲得數學上的新結論。因此, 在數學問題的探究中滲透合情推理的思想顯得尤爲重要。合情推理的學習不但可以豐富人們的科學思想, 也可以提高人們的辯證思維能力。中學階段, 教師在數學教學過程中除了教授學生基礎知識, 更應該注重學生思維品質的形成, 注重把合情推理的思想貫穿於整個教學過程。本文以一道例題教學實際談談合情推理在數學發現中的應用。

1. 例題及解答

例題: $A(1,2)$ 爲 $\Gamma_0: y^2=4x$ 上一定點, 過 $P(5,-2)$ 作 Γ_0 的弦 BC, 判斷 $\triangle ABC$ 的形狀。

教師引導學生思考如下問題:

問題 1: 觀察題目中的條件, 指出隱含條件是什麼; 如何用數量關係刻畫這一隱含條件。

學生討論得: (隱含條件) B, C, P 三點共線; 可以用直線 BP 的斜率與直線 CP 的斜率相等刻畫三點共線; 也可以用向量 $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CP}$ 共線刻畫三點共線。

問題 2: 判斷 $\triangle ABC$ 的形狀有哪些方法。

學生討論得:

方法 1: 若知道 $\triangle ABC$ 三邊的長, 則可用餘弦定理求 $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$。通過判斷 $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ 與 0 的大小, 從而判斷 $\triangle ABC$ 的形狀。

方法 2: 利用向量知識求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$。通過判斷 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 與 0 的大小, 從而判斷 $\triangle ABC$ 的形狀。

教師分析: 設 $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$, $y_1\neq y_2$。

$$\therefore\ \overrightarrow{BP}=(5-x_1,-2-y_1),\quad \overrightarrow{CP}=(5-x_2,-2-y_2),$$

$\because B,C,P$ 三點共線, 所以向量 $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CP}$ 共線,

$\therefore\ (5-x_1)(-2-y_2)=(5-x_2)(-2-y_1)$, 即 $5(y_1-y_2)+2(x_1-x_2)+x_1y_2-x_2y_1=0.$

代入 $x_1=\dfrac{y_1^2}{4}$, $x_2=\dfrac{y_2^2}{4}$ 化簡得: $20+2(y_1+y_2)+y_1y_2=0$。

接著, 嘗試計算 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。

$$\begin{aligned}
\because\ \overrightarrow{AB}&=(x_1-1,y_1-2),\qquad \overrightarrow{AC}=(x_2-1,y_2-2),\\
\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(x_1-1)(x_2-1)+(y_1-2)(y_2-2)\\
&=x_1x_2-(x_1+x_2)+y_1y_2-2(y_1+y_2)+5\\
&=\frac{1}{16}y_1^2y_2^2-\frac{1}{4}(y_1^2+y_2^2)+y_1y_2-2(y_1+y_2)+5\\
&=\frac{1}{16}[-20-2(y_1+y_2)]^2-\frac{1}{4}(y_1^2+y_2^2)-4(y_1+y_2)-15\\
&=\frac{1}{2}y_1y_2+(y_1+y_2)+10=0.
\end{aligned}$$

$\therefore AB\perp AC$, $\triangle ABC$ 是直角三角形。

2. 問題與思考

通過這道例題的教授, 能否使學生的思維在縱向和橫向上都得到發展? 學生將知識遷移和整合的能力是否提高? 這是數學教師應該深入思考的問題。在數學教學中, 從特殊到一般, 利用合情推理的方式進行數學發現, 是一種常見的數學研究方法。因此, 我們在合情推理的引領下進一步探究這道題目。

3. 合情推理引領探究

探究1: $A(1,2)$ 爲抛物線 $y^2=4x$ 上一定點, B, C 爲抛物線上的點, 若 $AB\perp AC$, 則直線 BC 有什麼特徵?

設直線 BC 的方程爲 $x=ty+s$。代入 $y^2=4x$, 得:

$$y^2-4ty-4s=0 \qquad \therefore\ y_1+y_2=4t,\ y_1y_2=-4s.$$

$$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2s=4t^2+2s,\quad x_1x_2=\frac{1}{16}y_1^2y_1^2=s^2.$$

$$\begin{aligned}由\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(x_1-1)(x_2-1)+(y_1-2)(y_2-2)\\&=x_1x_2-(x_1+x_2)+y_1y_2-2(y_1+y_2)+5\\&=s^2-6s+5-8t-4t^2=[(1-s)-2t][(5-s)+2t]=0.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad t=\frac{1-s}{2}\quad 或\ t=-\frac{5-s}{2}.$$

若 $t=\dfrac{1-s}{2}$, 則直線 BC 的方程爲 $x=\dfrac{1-s}{2}y+s$, 即 $2(x-1)-(1-s)(y-2)=0$(捨去)。

若 $t=-\dfrac{5-s}{2}$, 則直線 BC 的方程爲 $x=-\dfrac{5-s}{2}y+s$, 即 $2(x-5)+(5-s)(y+2)=0$。顯然直線 BC 過定點 $(5,-2)$。

接著, 思考一般情況。

探究 2: $A(m,n)$ 爲拋物線 $y^2=4cx$ $(c>0)$ 上一定點, B, C 爲拋物線上的點, 若 $AB\perp AC$, 則直線 BC 有什麼特徵?

類比探究 1, 有:

設直線 BC 的方程爲 $x=ty+s$, 代入 $y^2=4cx$, 得:

$$y^2-4tcy-4sc=0 \qquad \therefore\ y_1+y_2=4tc,\ y_1y_2=-4sc.$$

$$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2s=4t^2c+2s,\quad x_1x_2=\frac{1}{16c^2}y_1^2y_1^2=s^2.$$

$$\begin{aligned}由\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(x_1-m)(x_2-m)+(y_1-n)(y_2-n)\\&=x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2+y_1y_2-n(y_1+y_2)+n^2\\&=s^2+m^2+n^2-2ms-4sc-4nct-4cmt^2\\&=s^2+m^2+4cm-2ms-4sc-4nct-n^2t^2\\&=[(m-s)-nt][(m+4c-s)+nt]=0.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad t=\frac{m-s}{n}\quad 或\ t=-\frac{m+4c-s}{n}.$$

若 $t=\dfrac{m-s}{n}$, 則直線 BC 的方程爲 $x=\dfrac{m-s}{n}y+s$, 即 $n(x-m)-(m-s)(y-n)=0$(捨去)。

若 $t=-\dfrac{m+4c-s}{n}$, 則直線 BC 的方程爲 $x=-\dfrac{m+4c-s}{n}y+s$, 即 $n(x-m-4c)+(m+4c-s)(y+n)=0$。

顯然直線 BC 過定點 $(m+4c,-n)$。

4. 結論提煉

由上面探究過程, 得到如下結論:

結論 1: $A(m,n)$ 爲拋物線 $y^2=4cx$ $(c>0)$ 上一定點, B, C 爲拋物線上的點, 若 $AB\perp AC$, 則直線 BC 過定點 $(m+4c,-n)$。

結論 2: $A(m,n)$ 爲拋物線 $y^2=4cx$ $(c>0)$ 上一定點, 過定點 $(m+4c,-n)$ 的直線 BC 交拋物線於 B, C 兩點, 則 $AB\perp AC$。

結論 2 的證明是容易的, 本文就不再給出證明過程。

進一步思考, 發現結論 1 中「$AB\perp AC$」即直線 AB 的斜率 k_{AB} 與直線 AC 的斜率 k_{AC} 滿足「$k_{AB}k_{AC}=-1$ (定值)」。若 $k_{AB}k_{AC}=k$ (定值), 那麼直線 BC 是否仍過定點。實際上, 類似與探究 2 的解答過程就得到:

結論 3: $A(m,n)$ 爲拋物線 $y^2=4cx$ $(c>0)$ 上一定點, B, C 爲拋物線上的點, 若直線 AB 的斜率 k_{AB} 與直線 AC 的斜率 k_{AC} 滿足 $k_{AB}k_{AC}=k$ (定值), 則直線 BC 過定點 $(m-\dfrac{4c}{k},-n)$。

再逆向思考問題, 又得到:

結論 4: $A(m,n)$ 爲拋物線 $y^2=4cx$ $(c>0)$ 上一定點, 過定點 $(m-\dfrac{4c}{k},-n)$ 的直線 BC 交拋物線於 B, C 兩點, 則直線 AB 的斜率 k_{AB} 與直線 AC 的斜率 k_{AC} 滿足 $k_{AB}k_{AC}=k$ (定值)。

結論 4 的證明也是容易的, 本文就不再給出證明過程。

5. 結束語

正如數學家波利亞所說:「我們靠論證推理來肯定我們的數學知識, 而靠合情推理來爲我們的猜想提供依據」。因此, 在數學教學中教師要持之以恆、循序漸進的培養學生合情推理的意識。

—本文作者任教中國陝西省漢中市略陽縣天津高級中學—