數學傳播 41卷3期, pp. 86-92

奇妙的平方數與四季數

梁培基

一、引言

著名的美國數學家李學數教授在《數學與數學家的故事》一書中[1], 講述了古今中外很多優美有趣的數學故事, 爲枯燥乏味的數字家族增添了絢麗燦爛的色彩。用飽蘸深情的妙筆, 綻開優美的數學之花。用古今數學名人的實例啟迪後人, 熱愛數學, 研究數學。李學數教授數學功底深厚, 才華橫溢, 涉獵面廣, 中西貫通, 所講故事深入淺出, 情趣盎然。這套叢書發人深省, 啟始肇端。學生愛好, 成人喜歡。用現代的詞語可說是充滿了「正能量」不可多得、必不可少的好書!

二、有趣的平方數

在《數學與數學家的故事》第 5 冊的第 14 頁至 16 頁「奇妙的平方數」一文中, 介紹了兩個有趣的平方數問題。

問題(1): $1233 = 12^2 + 33^2$

$8833 = 88^2 + 33^2$

問題 (2): $956^2 = 913\ 936 \qquad 913 + 936 = 1849 = (43)^2$

$957^2 = 915\ 849 \qquad 915 + 849 = 1764 = (42)^2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

可以一直續算到 968,

$968^2 = 937\ 024 \qquad 937 + 024 = 961 = (31)^2$

從 956, 957, ..., 968 共有 13 組連續數的解。這是不是很奇妙?

以上結果是一個印度年輕人發現的, 你能找到類似的例子嗎?

對於上述兩個問題, 筆者得到如下結果:

對於問題 (1), 不妨設 $H = A^2 + B^2$ 的和, 設兩個不相同的 A 分別爲 $A1$ 與 $A2$, 由於兩組的 B 相同, 統稱爲 B。B 的位數爲 K。

由表 1 可知: $A2=10^K-A1$。也就是說, 知道一個 $A1$, 就可以計算出 $A2$, 從而得到兩組平方數, 一根藤上兩個瓜。

我們約定: 由

$A1^2+B^2=H1$ 組成的平方數組, 稱爲「本原解數組」簡稱「本原解」,

$A2^2+B^2=H2$ 組成的平方數組, 稱爲「對偶解數組」簡稱「對偶解」。

平方數組的這一性質與卡布列克 (KABULEK) 數組的對偶解相同, 可說有「同工異曲之妙」[2]。

問題(1) 得到的結果見表 1:

表 1

$H=A^2+B^2$	A	B 爲 2 位數	表 1
1233 ($H1$)	12 ($A1$)	33	本原解
8833 ($H2$)	88 ($A2$)	33	對偶解的 B 相同
		B 爲 3 位數	
10100	10 ($A1$)	100	同 B 者爲對偶解
990100	990 ($A2$)	100	以下不再注明
		B 爲 4 位數	
588,2353	588	2353	
9412,2353	9412	2353	
		B 爲 5 位數	
990,09901	990	09901	
99010,09901	99010	09901	
17650,38125	17650	38125	
82350,38125	82350	38125	
25840,43776	25840	43776	
74160,43776	74160	43776	
		B 爲 6 位數	
116788,321168	116788	321168	
883212,321168	883212	321168	
123288,328768	123288	328768	
876712,328768	876712	328768	

對於問題 (2), 分別設 X、A、B 爲互不相同的自然數, Q 爲 $(A+B)$ 之和的平方根, 他們之間的關係如表 2 所示。

奇妙的特性:

(1) X 為連續數公差為 1 遞增, 上升。

(2) A 是 X^2 的前 (左) 半部分, B 是 X^2 的後 (右) 半部分。A 的元素全部是奇數, 且公差為 2 遞增。

(3) $A+B$ 之和全是平方數。

(4) Q 為連續數公差為 1 依次遞減, 下降。

(5) $Q+X$ 之和全部為 "9", 其"9" 的位數與 X 的位數相同,「恒 9(久)」。

當 X 為 9 位數時, 可以得到 13099 組連續解。能否得到更多的連續解呢? 回答是肯定的, 只要你有時間。當然, 你可以命令電腦輕鬆完成!

結果見表 2.

表 2

X 為 2 位數						
X	X^2	A	B	$A+B$	Q	$X+Q$
86	7396	73	96	169	13	99
87	7569	75	69	144	12	99
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
90	8100	81	00	81	9	5組連續解
X 為 3 位數						
956	913936	913	936	1849	43	999
957	915849	915	849	1764	42	999
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
968	937024	937	024	961	31	13組連續解
X 為 4 位數						
9859	97199881	9719	9881	19600	140	9999
9860	97219600	9721	9600	19321	139	9999
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
9900	98010000	9801	0000	9801	99	42組連續解
X 為 5 位數						
99553	9910799809	99107	99809	198916	446	99999
99554	9910998916	99109	98916	198025	445	99999
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
99683	9936700489	99367	00489	99856	316	131組連續解

X 爲 6 位數						
998586	997173,999396	997173	999396	1996569	1413	999999
998587	997175,996569	997175	996569	1993744	1412	999999
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
999000	998001,000000	998001	000000	998001	999	415 組連續解
X 爲 7 位數						
9995528	9991057,9998784	9991057	9998784	19989841	4471	9999999
9995529	9991059,9989841	9991059	9989841	19980900	4470	9999999
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
9996837	9993675,0004569	9993675	0004569	9998244	3162	1310 組連續解
X 爲 8 位數						
99985858	99971717,99996164	99971717	99996164	199967881	14141	99999999
99985859	99971719,99967881	99971719	99967881	199,939,600	14140	99999999
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
99990000	99980001,00000000	99980001	00000000	99980001	9999	4143 組連續解
X 爲 9 位數						
999955279	999910559,999967841	999910559	999967841	1999878400	44720	999999999
999955280	999910561,999878400	999910561	999878400	1999788,961	44719	999999999
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
999968377	999936755,000014129	999936755	000014129	999950884	31,622	13099 組連續解

三、奇妙的四季數

四季數的發現

蘇東坡曰:「舊書不厭百回讀, 熟讀深思子自知。」

在探討平方數的時候, 幻方的影子時常在腦子裡遊蕩, 每當遇到難題或有空隙時間, 總喜歡查看河圖、洛書, 在河圖與洛書的構造上來尋找答案, 這是多年之「癖」。也許是老祖宗偏袒的緣故, 只要專心看幾次, 一般會有收穫。看「洛書」(圖 1) 已不知多少次了！

突然間, 看到四角全部是偶數的洛書圖, 突發靈感, 發現:

$2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16$ (把洛書中的 1 與 6, 看作 16)
$2^{16}=4^8=16^4,\ldots,$

於是, 產生了「冪次和」傳遞循環的思想: 設 A,B,C,D 爲互不相同的正整數。若

$$A^B=B^C=C^D=D^A(ABCD) \tag{1}$$

則稱 A^B 或 B^C 或 C^D 或 $D^A(ABCD)$ 爲「四季數」。

「四季數」的最小解是 65536。

當 $A=2,\ B=16,\ C=4,\ D=8$ 時 (1) 式成立。

即: $2^{16}=16^4=4^8=8^2\times(2\times16\times4\times8)=65536$

在上式中, 把 A、B、C、D 四個數巧妙的傳遞並連接起來, 每個數都使用三次, 不偏不倚, 奇妙無比。

「四季數」的命名是根據《莊子》「知北遊」:「天地有大美而不言, 四時有明法而不議, ..., 」衍生而來。四季循環, 生生不息。並且洛書的發源地 — 黃河流域, 是四季最明顯的地區。

「四季數」是從我國的三階幻方 (圖1) 裡得到的。三階幻方不僅僅是行、列及對角線上 3 個數之和等於 15, 還有很多鮮爲人知神奇奧妙的性質, 待另敘。

古人把構造三階幻方的方法概括爲「戴九履一, 左三右七, 二四爲肩, 六八爲足, 五居其中。」

爲什麼稱「二四爲肩, 六八爲足」呢? 這是一般人認爲特別膚淺與可笑的問題。也難怪呀, 老子曰:「上士聞道, 勤而行之; 中士聞道, 若存若亡; 下士聞道大笑, 不笑, 不足以爲道。」一個新思想、新事物的出現總會有人懷疑或恥笑, 以不屑的眼光看待之。

爲什麼「二四爲肩」呢? 筆者認爲: 所謂「肩」, 就是要兩肩平衡、平等, 故而產生了「比肩」一詞。那麼, 它與本文的數字有什麼關係呢? 君請看:

$$2^4=4^2.$$

這是唯一一對, 底數與指數可以互換, 且其冪和相等的兩個數。經過左肩與右肩的相互作用, 2^4 與 4^2 可以劃等號, 就能理解「二四爲肩」的意義了。

爲什麼「六八爲足」呢?

這要從「九」談起, 古人視「九」爲最大、最神聖的數字, 故洛書有「戴九履一」,「九」居其上。下面的六、一、八之意義在於:

$$9^3=8^3+1^3+6^3.$$

也就是說, 9^3 囊括了 $6^3+1^3+8^3$ 的總和, 故 9 在上, 爲首。8、1、6 在下而爲足。並且 $9^2=81$, 9、2 在上, 81 在下。還有更加神奇的奧秘將在另篇敘述。

那麼, 它與 65536 有什麼聯繫呢?

四季數的淵源

近幾百年來, 由於「哥德巴赫猜想」的影響力, 數學界對素數倍感興趣, 忽略了對偶數的探討。筆者發現洛書的四隅角是四個偶數, 分別爲 2, 4, 8, 16 (這裡同樣把 1 與 6 看作 16)。

我們對洛書 (圖1) 的偶數, 從上角向下垂直方向進行組合分析:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖 1

把右上角的 2 與右下角的 16 組合得: $2^{16} = 65536$.

把左上角的 4 與左下角的 8 組合得: $4^8 = 65536$.

再對洛書四角偶數進行交叉組合:

把右下角的 16 與左上角的 4 組合得 $16^4 = 65536$.

把左下角的 8 與右上角的 2 組合及四隅角的四個數之積, 得:

$$8^2 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16 = 65536.$$

整理上述幾個等式, 得:

$$2^{16} = 16^4 = 4^8 = 8^2 \times (2 \times 4 \times 8 \times 16) = 65536.$$

於是, 就誕生了這個「四季數」。

有趣的是, 在上述式子中, 這四個偶數既可作底數, 又可作指數, 又可作因數, 互相循環。可說是「能上 (作指數)、能下 (作底數)、能居中 (作因數)」, 一個小小四季數竟然領悟了「中庸」之道: 上中下皆可適應, 左中右無所不能。一個奇妙的「數字團體」, 竟然領略了人類的屬性: 能大、能小、能曲、能伸。

可首尾易換 (百姓與總統平等, 萬衆歡呼稱讚),

能前後兼顧 (富裕周濟貧窮, 令貪官污吏汗顏)。

妙哉! 並且每個偶數都恰恰出現三次, 不多不少, 絕對平均。從而, 完成了鮮爲人知的歷史使命 — 誕生了「這個奇妙的四季數」。

從洛書裡找到了這個「四季數」的答案, 並不是歪打正著, 這個事例再次說明, 起源於中國古代的「河圖、洛書」蘊藏了無窮無盡的珍寶, 等待著眼光窅茫之人的擷取與開發。目前從河圖、洛書中所汲取的成果比比皆是, 但不足其蘊藏量之萬一也!

「莫怪棗不甜, 只因時未到。」到那橙黃橘綠山花爛漫時, 河圖、洛書必將綻放出更加奇異的絢麗光彩, 登上數學宮殿的大雅之堂而爲世人所景仰!

另外,《道德經》的「精髓」名言與四季數中的 A, B, C, D 之傳遞關係:

道德經云: 人法地, 地法天, 天法道, 道法自然。

又: 道生一, 一生二, 二生三, 三生萬。都是四傳遞關係。

「四季數」中的 A, B, C, D 也是四傳遞關係: $A^B=B^C=C^D=D^A(ABCD)$.

是偶然的巧合呢? 還是另有玄機?

問題: 1、是否存在由「奇數」構成的這類數呢?

2、是否存在 $n>4$ 元素的這類數呢?

從三階幻方裡發現了這個神奇的「四季」數, 使我國古老的洛書大放異彩。

可說是: 中國洛書, 源遠流長, 偶數集合, 再放光芒!

四、不是結語

最近發現, 四季數與費馬素數有蛛絲馬跡:

形如: $\mathbb{F}_n=2^{2^n}+1$ 得到的素數稱爲費馬素數, 目前得到的費馬素數只有 5 個:

$$F_0=2^1+1=3$$
$$F_1=2^2+1=5$$
$$F_2=2^4+1=17$$
$$F_3=2^8+1=257$$
$$F_4=2^{16}+1=65537$$

65537 是目前所知的最大費馬素數, 亦即四季數 $65536+1$ 是目前最大的費馬素數。而 65536 是最小的四季數, 至今尚未發現第二個四季數, 是偶然巧合? 還是有必然聯繫呢?

希望把這個資訊傳播出去, 以便儘快解決費馬素數難題與四季數問題。

數學傳播, 傳播數學, 人人熱愛數學, 個個爭相傳播!

参考文獻

1. 李學數。數學與數學家的故事。第5冊, 上海科學技術出版社, 14-16, 2015。
2. 梁培基等。KABULEK 數組探微。甘肅高師學報, (2), 7-8, 2004。
3. 吳振奎等。名人趣題妙解。天津教育出版社, 427-430, 2001。

—本文作者任職中國河南省封丘縣科協—