數學傳播 41卷3期, pp. 82-85

一道不等式的兩個不同證明

徐彥輝

命題: 若 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 爲滿足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ 的正數, $\lambda \geq \dfrac{1}{n^2}$, 則

$$\Big(a_1+\frac{\lambda}{a_1}\Big)\Big(a_2+\frac{\lambda}{a_2}\Big)\cdots\Big(a_n+\frac{\lambda}{a_n}\Big) \geq \Big(\frac{1}{n}+n\lambda\Big)^n.$$

秦慶雄, 範花妹 (2012) 運用均值不等式給出了這個命題的一種巧妙證明[1]。連威翔 (2014) 通過先證明特殊情形再推廣到一般情形證明了該命題[2]。劉才華 (2016) 採用「以直代曲」思想也證明了該命題[3]。筆者現運用均值不等式得到了一種不同於文 [1] 的證法(即下文的證法1)。同時, 筆者覺得文 [3] 的計算有些複雜, 筆者採用「以直代曲」的切線逼近思想得到了一種更簡單的證法 (即下文的證法 2), 並對該命題的條件改進得到一個改進命題 (即下文的改進命題)。

爲了給出筆者的第一種證法, 先證明一個引理。

引理: 設 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in R_+$, $n \geq 2$, 則

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i) \geq \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i}\right)^n.$$

證明: (1) 先證明當 $n=2^k$ $(k\in Z_+)$ 的情形命題成立。對 k 用數學歸納法。

當 $k=1$ 時, 即只要證 $(a_1+b_1)(a_2+b_2) \geq (\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{b_1b_2})^2$,

即只要證 $a_1b_2+a_2b_1-2\sqrt{a_1b_2a_2b_1} \geq 0$, 即只要證 $(\sqrt{a_1b_2}-\sqrt{a_2b_1})^2 \geq 0$, 顯然成立。

假設當 $k=s$ 時命題成立。則當 $k=s+1$ 時

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{2^{s+1}}(a_i+b_i) &= \left[\prod_{i=1}^{2^s}(a_i+b_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{2^s}(a_{i+2^s}+b_{i+2^s})\right]\\ &\geq \left[\left(\sqrt[2^s]{\prod_{i=1}^{2^s} a_i}+\sqrt[2^s]{\prod_{i=1}^{2^s} b_i}\right)\left(\sqrt[2^s]{\prod_{i=1}^{2^s} a_{i+2^s}}+\sqrt[2^s]{\prod_{i=1}^{2^s} b_{i+2^s}}\right)\right]^{2^s}\\ &\geq \left(\sqrt[2^{s+1}]{\prod_{i=1}^{2^{s+1}} a_i}+\sqrt[2^{s+1}]{\prod_{i=1}^{2^{s+1}} b_i}\right)^{2^{s+1}}.\end{aligned}$$

故當 $n=2^k(k\in Z_+)$ 的情形命題成立。

(2) 再證明：若 $n=r+1$ 時命題成立, 則 $n=r$ $(r\geq 2, r\in Z_+)$ 時命題成立。

令 $A=\sqrt[r]{\prod\limits_{i=1}^{r}a_i}$, $B=\sqrt[r]{\prod\limits_{i=1}^{r}b_i}$, $a_i^*=a_i$, $b_i^*=b_i$, $a_{r+1}=A$, $b_{r+1}=B$, 則由歸納假設知

$$\prod_{i=1}^{r+1}(a_i^*+b_i^*)\geq\left(\sqrt[r+1]{\prod_{i=1}^{r+1}a_i^*}+\sqrt[r+1]{\prod_{i=1}^{r+1}b_i^*}\right)^{r+1}=(A+B)^{r+1}$$

$$\therefore\quad \prod_{i=1}^{r}(a_i+b_i)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{r+1}(a_i^*+b_i^*)}{A+B}\geq(A+B)^r.$$

綜上, 引理得證。

證法1: 由引理得

$$\Big(a_1+\frac{\lambda}{a_1}\Big)\Big(a_2+\frac{\lambda}{a_2}\Big)\cdots\Big(a_n+\frac{\lambda}{a_n}\Big)\geq\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{a_i}}\right)^n$$
$$=\left(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\frac{\lambda}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\right)^n,$$

即只要證

$$\left(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\frac{\lambda}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\right)^n\geq\left(\frac{1}{n}+n\lambda\right)^n,$$

即只要證

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\frac{\lambda}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\geq\frac{1}{n}+n\lambda,$$

即只要證

$$\left(\frac{1}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)\left(n\lambda-\frac{\lambda}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\right)\geq 0,$$

由 $\dfrac{1}{n}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\geq\dfrac{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}{n}$ 和 $n\lambda\geq n\times\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{n}$ 知上式成立, 證畢。

證法2: 將原不等式變形爲

$$\sqrt[n]{\frac{\frac{1}{n}+n\lambda}{a_1+\frac{\lambda}{a_1}}\cdot\frac{\frac{1}{n}+n\lambda}{a_2+\frac{\lambda}{a_2}}\cdots\frac{\frac{1}{n}+n\lambda}{a_n+\frac{\lambda}{a_n}}}\leq 1,$$

由

$$\sqrt[n]{\frac{\frac{1}{n}+n\lambda}{a_1+\frac{\lambda}{a_1}}\cdot\frac{\frac{1}{n}+n\lambda}{a_2+\frac{\lambda}{a_2}}\cdots\frac{\frac{1}{n}+n\lambda}{a_n+\frac{\lambda}{a_n}}}\le\frac{\frac{\frac{1}{n}+n\lambda}{a_1+\frac{\lambda}{a_1}}+\frac{\frac{1}{n}+n\lambda}{a_2+\frac{\lambda}{a_2}}+\cdots+\frac{\frac{1}{n}+n\lambda}{a_n+\frac{\lambda}{a_n}}}{n},$$

故只要證

$$\frac{1}{a_1+\frac{\lambda}{a_1}}+\frac{1}{a_2+\frac{\lambda}{a_2}}+\cdots+\frac{1}{a_n+\frac{\lambda}{a_n}}\le\frac{n}{\frac{1}{n}+n\lambda}=\frac{n^2}{1+n^2\lambda},$$

即只要證

$$\frac{a_1}{a_1^2+\lambda}+\frac{a_2}{a_2^2+\lambda}+\cdots+\frac{a_n}{a_n^2+\lambda}\le\frac{n^2}{1+n^2\lambda}.$$

令 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+\lambda}$, 則

$$f(\frac{1}{n})=\frac{n}{1+n^2\lambda},\quad f'(x)=\frac{\lambda-x^2}{(x^2+\lambda)^2},\quad f'(\frac{1}{n})=\frac{n^4\lambda-n^2}{(1+n^2\lambda)^2},$$

則 $f(x)$ 在點 $x=\dfrac{1}{n}$ 處的切線方程爲

$$y-\frac{n}{1+n^2\lambda}=\frac{n^4\lambda-n^2}{(1+n^2\lambda)^2}(x-\frac{1}{n}),$$

即爲

$$y=\frac{n^4\lambda-n^2}{(1+n^2\lambda)^2}x+\frac{2n}{(1+n^2\lambda)^2},$$

則只要證

$$\frac{x}{x^2+\lambda}\le\frac{n^4\lambda-n^2}{(1+n^2\lambda)^2}x+\frac{2n}{(1+n^2\lambda)^2},$$

即只要證 $n^2(n^2\lambda-1)x^3+2nx^2-(1+3n^2\lambda)x+2n\lambda\ge 0$, 即只要證

$$(nx-1)^2[(n^2\lambda-1)x+2n\lambda]\ge 0, \tag{1}$$

由已知條件 $\lambda\ge\dfrac{1}{n^2}$ 知該式顯然成立, 則

$$\frac{a_1}{a_1^2+\lambda}+\frac{a_2}{a_2^2+\lambda}+\cdots+\frac{a_n}{a_n^2+\lambda}\le\frac{n^4\lambda-n^2}{(1+n^2\lambda)^2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\frac{2n^2}{(1+n^2\lambda)^2}=\frac{n^2}{1+n^2\lambda}.$$

證畢。

證完以後, 我們還可以進一步考慮條件 $\lambda\ge\dfrac{1}{n^2}$ 是否是最優的, 是否可以改進? 如我們可以考慮 : 當 $\lambda<\dfrac{1}{n^2}$ 時, 即 $n^2\lambda-1<0$ 時, 命題是否成立? 從 (1) 式中, 我們可以發現

: 由於 $(nx-1)^2 \geq 0$, 故只要 $(n^2\lambda-1)x+2n\lambda \geq 0$, 就可以得到 $(nx-1)^2 \times [(n^2\lambda-1)x+2n\lambda] \geq 0$。由於 $(n^2\lambda-1)x+2n\lambda$ 可以看成是關於 x 的一次函數, 故當 $\lambda < \dfrac{1}{n^2}$ 時, 只要 $(n^2\lambda-1)\cdot 1+2n\lambda \geq 0$, 即當 $\dfrac{1}{n(n+2)} \leq \lambda < \dfrac{1}{n^2}$ 時, 則對於任意的 $x \in (0,1)$, 都有 $(n^2\lambda-1)x+2n\lambda \geq 0$。所以, 原命題的條件可以改進, 即得到一個改進命題。

改進的命題: 若 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 爲滿足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ 的正數, $\lambda \geq \dfrac{1}{n(n+2)}$, 則

$$\Big(a_1+\frac{\lambda}{a_1}\Big)\Big(a_2+\frac{\lambda}{a_2}\Big)\cdots\Big(a_n+\frac{\lambda}{a_n}\Big) \geq \Big(\frac{1}{n}+n\lambda\Big)^n.$$

致謝: 感謝審稿人對本文所提出的寶貴的修改意見!

參考文獻

1. 秦慶雄, 範花妹。從Cauchy 不等式的一種證法談起 [J]。數學傳播, 36(2), 85-93, 2012。
2. 連威翔。回響: 一道不等式的另一種證法[J]。數學傳播, 38 (3), 93-96, 2014。
3. 劉才華。一道不等式的再證[J]。數學傳播, 40(3), 83-84, 2016。

—本文作者任教中國浙江溫州大學數信學院—